

Н. Г. ЗУЕВ, канд. физ.-мат. наук, А. М. ТИТАРЕНКО, канд. физ.-мат. наук,
О. И. ПОДГАЙКО, канд. физ.-мат. наук

ЛИНИИ РАВНЫХ АМПЛИТУД И ИНВАРИАНТЫ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ, РАБОТАЮЩИХ В ПЕРВОЙ И ВЫСШИХ ЗОНАХ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

В нелинейных колебательных системах индуктивного и емкостного характера, которые могут работать как в первой, так и высших зонах параметрической неустойчивости, наблюдается непосредственная связь между амплитудой и фазой колебаний, а переходные процессы определяются характером нелинейности. При анализе процессов в таких системах возникают трудности адекватной оценки их состояния, которые возрастают с увеличением номера рассматриваемой зоны неустойчивости. Сложность расчета параметров и режимов работы подобных нелинейных систем является одним из факторов, сдерживающих их развитие.

Цель данной работы – получение уравнений линий равных амплитуд, а также инвариантов движения, связывающих амплитуду и фазу колебаний в зонах параметрической неустойчивости, пригодных для оценки состояния системы, описываемой уравнением Матье с кубической правой частью.

Рассмотрим нелинейную колебательную систему, работа которой описывается дифференциальным уравнением [1]:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + \gamma \frac{d}{d\tau} (\phi(\tau) f(y)) + \lambda \phi(\tau) f(y) = 0, \quad (1)$$

где $\tau = \omega_n t$; $\phi(\tau) = ch(B_n \sin \tau)$; $f(y) = sh \frac{y}{2}$; ω_n, B_n – круговая частота и безразмерная амплитуда сигнала накачки соответственно.

Коэффициент γ определяет затухание в системе, а λ пропорционален квадрату ее собственной частоты. Уравнение (1) можно получить, например, при рассмотрении нелинейных параметрических систем с периодически меняющейся индуктивностью, в которых кривые намагничивания представлены трансцендентной функцией – гиперболическим синусом. Упрощенным вариантом уравнения (1) является уравнение Матье с кубической правой частью

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + (p^2 - \varepsilon \cos \tau) y = k \varepsilon y^3, \quad (2)$$

где $\tau = \omega_n t$ – собственное время системы; ε – малый параметр; k – величина, характеризующая степень нелинейности и тип системы; $p = \frac{\omega}{2\omega_n}$ – величина, пропорциональная собственной частоте ω .

Переменная y в уравнении может обозначать, в частности, напряжение на обмотках резонансного контура нелинейной системы.

Исследование уравнения (2) имеет не только теоретическое, но и практическое значение, поскольку консервативная идеализация позволяет в какой-то степени предвидеть поведение и диссипативной системы, указывает возможные устойчивые и неустойчивые периодические стационарные решения.

Покажем возможность получения уравнения линий равных амплитуд и инвариантов движения для уравнения (2), а также проведем их анализ.

Получение уравнений линий равных амплитуд

Линиями равных амплитуд будем называть линии в координатах (p, ε) , на которых амплитуда колебания остается постоянной [2]. В дальнейшем будем предполагать, что рассматриваются достаточно малые окрестности точек $(1/2; 0)$, $(1; 0)$, $(3/2; 0)$, ..., т.е. предположим,

что $|p - n/2| < \varepsilon$, где n – натуральное число, а ε – величина значительно меньше единицы. Ищем решение уравнения (2) в виде ряда, содержащего конечное число слагаемых [3]:

$$y = a \cos(p\tau - \phi) + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \varepsilon^3 U_3 + \dots + \varepsilon^n U_n. \quad (3)$$

Основной компонентой этого ряда является функция $a \cos(p\tau - \phi)$, в которой функции $a = a(\tau)$ и $\phi = \phi(\tau)$ являются медленно меняющимися. Число n можно положить равным номеру рассматриваемой зоны неустойчивости колебаний.

Необходимо определить U_1, U_2, \dots, U_n как функции от τ . При любом $\varepsilon \neq 0$ и $n \rightarrow \infty$ ряд (3) не всегда сходится. Здесь же, когда число членов n ограничено, мы будем искать функции U_1, U_2, \dots, U_n путем итераций, предполагая, что ε достаточно мало. Тем самым можно избежать трудностей, связанных с вопросом сходимости ряда (3). Фактически трудно дать количественную оценку понятию «достаточно малый», предположение о малости лучше рассматривать как эвристическое, справедливость которого будет установлена при дальнейших вычислениях (3).

Подставив (3) в (2), получим

$$\begin{aligned} & \left[2pa \frac{d}{d\tau} + \frac{d^2 a}{d\tau^2} - a \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \right] \cos(p\tau - \phi) + \left[-2p \frac{da}{d\tau} + 2 \frac{du}{d\tau} \cdot \frac{d\phi}{d\tau} + a \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} \right] \sin(p\tau - \phi) + \\ & + \varepsilon \left[\frac{d^2 U_1}{d\tau^2} + p^2 U_1 \right] + \varepsilon^2 \left[\frac{d^2 U_2}{d\tau^2} + p^2 U_2 \right] + \varepsilon^3 \left[\frac{d^2 U_3}{d\tau^2} + p^2 U_3 \right] + \dots + \\ & + \varepsilon^n \left[\frac{d^2 U_n}{d\tau^2} + p^2 U_n \right] = \frac{\varepsilon a}{2} \cos[(p+1)\tau - \phi] + \frac{\varepsilon a}{2} \cos[(p-1)\tau - \phi] + \\ & + \varepsilon \frac{3}{4} ka^3 \cos(p\tau - \phi) + \varepsilon \frac{1}{4} ka^3 \cos[3(p\tau - \phi)] + \varepsilon^3 \frac{3}{2} ka^2 U_1 + \\ & + \varepsilon^2 \frac{3}{2} ka^2 U_1 \cos[2(p\tau - \phi)] - \varepsilon^2 U_1 \cos \tau + \varepsilon^3 \frac{3}{2} ka^2 U_2 + \varepsilon^3 3ka U_1^2 \cos(p\tau - \phi) + \\ & + \varepsilon^3 \frac{3}{2} ka^2 U_2 \cos[2(p\tau - \phi)] + \varepsilon^4 k U_1^3 + \varepsilon^4 \frac{3}{2} ka^2 U_3 + \varepsilon^4 \frac{3}{2} ka^2 U_3 \cos[2(p\tau - \phi)] + \\ & + \varepsilon^4 6ka U_1 U_2 \cos(p\tau - \phi) + \varepsilon^3 U_2 \cos \tau + \varepsilon^4 U_3 \cos \tau + \dots + \varepsilon^{n+1} U_n \cos \tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим зоны неустойчивости вблизи резонансной частоты $p = 1/2$ в первом приближении. Если бы p значительно отличалось от $1/2$, то (4) можно было бы заменить системой уравнений:

$$2pa \frac{d\phi}{d\tau} + \frac{d^2 a}{d\tau^2} - a \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 = \varepsilon \frac{3}{4} ka^3, \quad (5)$$

$$-2p \frac{da}{d\tau} + 2 \frac{da}{d\tau} \cdot \frac{d\phi}{d\tau} + a \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} = 0, \quad (6)$$

$$\varepsilon \left(\frac{d^2 U_1}{d\tau^2} + p^2 U_1 \right) = \frac{\varepsilon a}{2} \cos[(p+1)\tau - \phi] + \frac{\varepsilon a}{2} \cos[(p-1)\tau - \phi] + \varepsilon \frac{1}{4} ka^3 \cdot \cos[3(p\tau - \phi)]. \quad (7)$$

Если p близко к $1/2$, то в возмущенном уравнении (7) появляется член $\frac{\varepsilon a}{2} \cos[(p-1)\tau - \phi]$, который «приводит» к резонансу (секулярный член). Поэтому запишем его в вариационных уравнениях (5) и (6), предварительно преобразовав. Поскольку выражение

$$\cos[(p-1)\tau - \phi] = \cos[(1-2p)\tau + 2\phi] \cos(p\tau - \phi) - \sin[(1-2p)\tau + 2\phi] \cdot \sin(p\tau - \phi),$$

то имеем:

$$2pa \frac{d\phi}{d\tau} + \frac{d^2a}{d\tau^2} - a \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 = \frac{\varepsilon a}{2} \cos[(1-2p)\tau + 2\phi] + \varepsilon \frac{3}{4} ka^3, \quad (8)$$

$$-2p \frac{da}{d\tau} + 2 \frac{da}{d\tau} \cdot \frac{d\phi}{d\tau} + a \frac{d^2\phi}{d\tau^2} = -\frac{\varepsilon a}{2} \sin[(1-2p)\tau + 2\phi], \quad (9)$$

$$\frac{d^2U_1}{d\tau^2} + p^2U_1 = \frac{a}{2} \cos[(p+1)\tau - \phi] + \frac{1}{4} ka^3 \cos[3(p\tau - \phi)]. \quad (10)$$

Функции $a(\tau)$ и $\phi(\tau)$ являются, по предположению, медленно меняющимися. Медленность изменения $a(\tau)$ и $\phi(\tau)$ определяется тем, что производные $\frac{da}{d\tau}$ и $\frac{d\phi}{d\tau}$ будут величинами первого порядка малости по сравнению с $a(\tau)$ и $\phi(\tau)$, т.е. $\frac{da}{d\tau} \ll a$, $\frac{d\phi}{d\tau} \ll \phi$ [4]. Так как рассматривается первое приближение, то в силу медленности изменения функций a и ϕ в уравнениях (8) и (9) можно пренебречь членами $\frac{d^2a}{d\tau^2}$, $\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2$, $\frac{da}{d\tau} \cdot \frac{d\phi}{d\tau}$, $\frac{d^2\phi}{d\tau^2}$, являющимися величинами второго порядка малости. В результате получаем вариационные уравнения в первом приближении:

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\varepsilon}{4p} \cos[(1-2p)\tau + 2\phi] + \varepsilon \frac{3ka^2}{8p}, \quad (11)$$

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{\varepsilon a}{4p} \sin[(1-2p)\tau + 2\phi]. \quad (12)$$

Из (10) находим U_1 , а затем, в силу (3), и $y(\tau)$:

$$U_1 = -\frac{a}{2(2p+1)} [\cos(p+1)\tau - \phi] - \frac{ka^3}{32p^2} \cos[3(p\tau - \phi)], \quad (13)$$

$$y(\tau) = a \cos(p\tau - \phi) - \frac{\varepsilon a}{2(2p+1)} \cos[(p+1)\tau - \phi] - \varepsilon \frac{ka^3}{32p^2} \cos[3(p\tau - \phi)]. \quad (14)$$

Обозначив $\theta_n = \left(\frac{n}{2} - p\right)\tau + \phi$, где θ_n – фаза колебаний в n -й зоне неустойчивости ($n \in N$), получаем из (11) и (12) систему укороченных уравнений:

$$\frac{d\theta_1}{d\tau} = \frac{1}{2} - p + \frac{\varepsilon}{4p} \cos 2\theta_1 + \varepsilon \frac{3ka^2}{8p}, \quad (15)$$

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{\varepsilon a}{4p} \sin 2\theta_1. \quad (16)$$

Приравняв нулю правые части уравнений (15) и (16), получаем условия стационарности колебаний. Из (16) следует, что для стационарности необходимо выполнение условий $a = 0$ (состояние покоя системы) или $\sin 2\theta_1 = 0$ (отсюда $\cos 2\theta_1 = \pm 1$). Положив в уравнение (15) $\cos 2\theta_1 = \pm 1$ (в предположении, что амплитуда стационарных колебаний a_0 отлична от нуля), получаем уравнение линий равных амплитуд в первом приближении вблизи резонансной частоты $p = 1/2$ для стационарных колебаний

$$\left| 1 - 2p + \varepsilon \frac{3ka_0^2}{4p} \right| = \left| \frac{\varepsilon}{2p} \right|. \quad (17)$$

Эти линии при $k = 0$ и $a_0 = 0$ переходят в границы зон Матье. В дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать малый параметр ε неотрицательным. Поскольку рас-

считывается область вблизи резонансной частоты $p = 1/2$ (для окрестности точки $p = 1/2$, по предположению, выполняется условие $\left| p - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$), то можем полагать $p \approx 1/2$ и в последней формуле в выражении при ε заменить p на $1/2$. Тогда после обозначения $N = \frac{3ka_0^2}{2}$ формула (17) для линий равных амплитуд переписывается в виде

$$|1 - 2p + N\varepsilon| = \varepsilon. \quad (18)$$

Линии равных амплитуд в первом приближении вблизи $p = 1/2$ показаны на рис. 1.

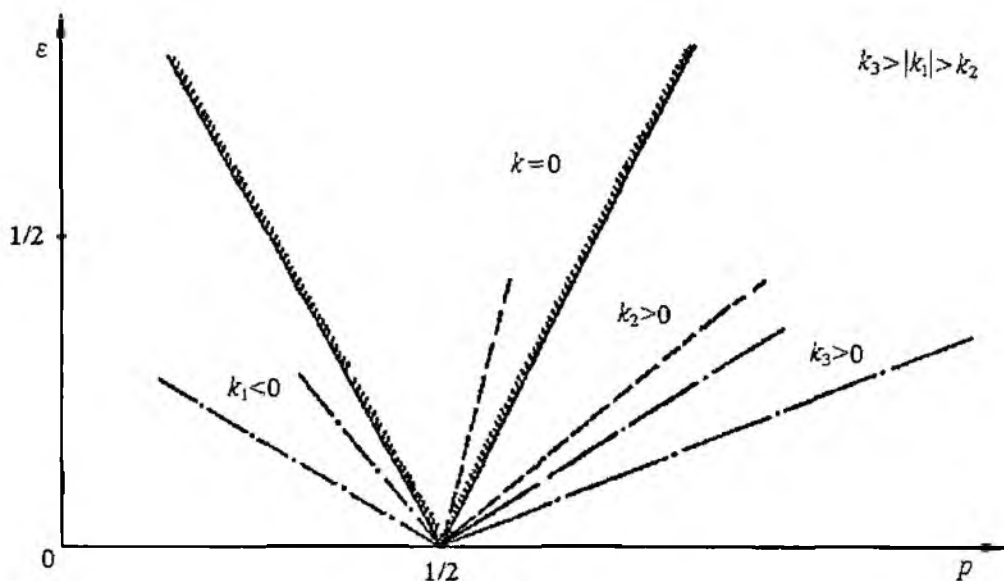


Рис. 1

Из (18) видно, что введение нелинейности в уравнение Матье приводит к повороту линий равных амплитуд относительно точки $(1/2, 0)$ в системе координат (p, ε) , и угол поворота тем больше, чем больше по модулю k и амплитуда стационарных колебаний a_0 . При $k < 0$ поворот осуществляется против часовой стрелки, а при $k > 0$ – по часовой.

Расчеты показывают, что когда $|k|$ возрастает, то раствор угла α между линиями равных амплитуд уменьшается, поскольку $\operatorname{tg} \alpha = \frac{16}{3(3k^2 a_0^4 + 4)}$. Таким образом, правая и левая линии равных амплитуд поворачиваются на различные по величине углы.

Перейдем ко второму приближению вблизи $p = 1/2$. Вычислив сумму

$$\varepsilon^2 \frac{3}{2} ka^2 U_1 + \varepsilon^2 \frac{3}{2} ka^2 U_1 \cos[2(p\tau - \phi)] + \varepsilon^2 U_1 \cos \tau$$

и учитывая, что выражение $\cos[(3p-1)\tau - 3\phi]$ можно представить в виде

$$\cos[(3p-1)\tau - 3\phi] = \cos[(1-2p)\tau + 2\phi] \cos(p\tau - \phi) + \sin[(1-2p)\tau + 2\phi] \sin(p\tau - \phi),$$

запишем после преобразований вариационные уравнения:

$$2pa \frac{d}{d\tau} + \frac{d^2 a}{d\tau^2} - a \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 = \frac{\varepsilon a}{2} \cos 2\theta_1 + \varepsilon \frac{3}{4} ka^3 - \varepsilon^2 \frac{a}{4(2p+1)} - \varepsilon^2 \left[\frac{3k^2 a^5}{128 p^2} - \frac{3ka^3}{8(2p+1)} + \frac{ka^3}{64 p^2} \right] \cos 2\theta_1, \quad (19)$$

$$-2p \frac{da}{d\tau} + 2 \frac{da}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} + a \frac{d^2\phi}{d\tau^2} = -\frac{\varepsilon a}{2} \sin 2\theta_1 + \varepsilon^2 \left[\frac{3ka^3}{8(2p+1)} - \frac{ka^3}{64p^2} \right] \sin 2\theta_1. \quad (20)$$

Положим

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{\varepsilon a}{4p} \sin 2\theta_1 + \lambda_1 \varepsilon^2, \quad (21)$$

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\varepsilon}{4p} \cos 2\theta_1 + \varepsilon \frac{3ka^2}{8p} + \lambda_2 \varepsilon^2, \quad (22)$$

где λ_1, λ_2 – медленно меняющиеся функции от τ .

Подставив (21) и (22) в (19) и (20), находим λ_1, λ_2 :

$$\lambda_1 = \left[\frac{-24p^2 + 26p + 13}{128p^3(2p+1)} ka^2 - \frac{1-2p}{8p^2\varepsilon} \right] a \sin 2\theta_1; \quad (23)$$

$$\lambda_2 = -\frac{4p^2 + 2p + 1}{32p^3(2p+1)} + \frac{15k^2a^4}{256p^3} - \left[\frac{ka^2(24p^2 + 2p + 1)}{128p^3(2p+1)} + \frac{1-2p}{8p^2\varepsilon} \right] \cos 2\theta_1. \quad (24)$$

Отсюда определяем $\frac{d\theta_1}{d\tau}$ и $\frac{da}{d\tau}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{d\tau} = & \frac{1}{2} - p + \varepsilon \frac{3ka^2}{8p} - \frac{1}{2} \left[\frac{4p^2 + 2p + 1}{16p^3(2p+1)} - \frac{15k^2a^4}{128p^3} \right] \varepsilon^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon}{2p} - \frac{ka^2(24p^2 + 2p + 1)}{64p^3(2p+1)} \varepsilon^2 - \frac{(1-2p)\varepsilon}{4p^2} \right] \cos 2\theta_1, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\frac{da}{d\tau} = \left[\frac{\varepsilon}{4p} + \frac{ka^2(-24p^2 + 26p + 13)}{128p^3(2p+1)} \varepsilon^2 - \frac{(1-2p)\varepsilon}{8p^2} \right] a \sin 2\theta_1. \quad (26)$$

В результате из (25) и (26) получаем для линий равных амплитуд вблизи $p = 1/2$ во втором приближении:

$$\begin{aligned} & \left| 1 - 2p + \varepsilon \frac{3ka_0^2}{4p} - \left[\frac{4p^2 + 2p + 1}{16p^3(2p+1)} - \frac{15k^2a_0^4}{128p^3} \right] \varepsilon^2 \right| = \\ & = \left| \frac{\varepsilon}{2p} - \frac{ka_0^2(24p^2 + 2p + 1)}{64p^3(2p+1)} \varepsilon^2 - \frac{1-2p}{4p^2} \varepsilon \right|. \end{aligned} \quad (27)$$

Положив $p = 1/2$, имеем упрощенное уравнение для определения линий равных амплитуд:

$$\left| 1 - 2p + N\varepsilon + \left(\frac{5N^2}{12} - \frac{3}{4} \right) \varepsilon^2 \right| = \left| \varepsilon - \frac{N}{3} \varepsilon^2 \right|. \quad (28)$$

Из анализа (28) следует, что во втором приближении линии разных амплитуд деформируются по сравнению с линиями в первом приближении, но при этом сохраняются их прежние характерные особенности, что и следовало ожидать, поскольку первое приближение, как правило, приводит к тем же качественным результатам, что и высшие [4].

На рис. 2 показаны линии равных амплитуд во втором приближении вблизи $p = 1/2$.

Перейдем ко второй зоне возбуждения вблизи резонансной частоты $p = 1$. Функция $U_1(\tau)$ в данном случае определяется из дифференциального уравнения

$$\varepsilon \left(\frac{d^2 U_1}{d\tau^2} + p^2 U_1 \right) = \frac{\varepsilon a}{2} \cos[(p+1)\tau - \phi] + \frac{\varepsilon a}{2} \cos[(p-1)\tau - \phi] + \varepsilon \cdot \frac{1}{4} \cdot ka^3 \cos[3(p\tau - \phi)]. \quad (29)$$

Из (29) находим U_1 :

$$U_1 = -\frac{a}{2(2p+1)} \cos[(p+1)\tau - \phi] + \frac{a}{2(2p-1)} \cos[(p-1)\tau - \phi] - \frac{ka^3}{32p^2} \cos[3(p\tau - \phi)]. \quad (30)$$

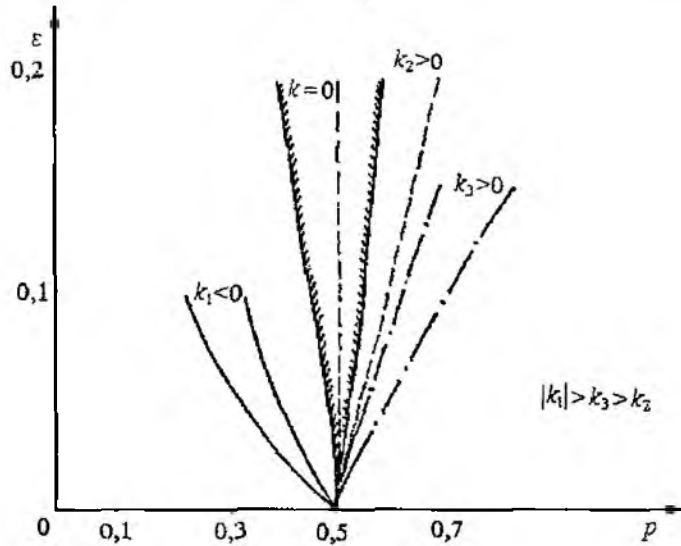


Рис. 2.

В данном случае при вычислении суммы $\varepsilon^2 \frac{3}{2} ka^2 U_1 + \varepsilon^2 \frac{3}{2} ka^2 U_1 \cos 2(p\tau - \phi) + \varepsilon^2 U_1 \cos \tau$ нужно учесть появление резонансов, порождаемых секулярным членом $\cos[(p-2)\tau - \phi]$, который можно преобразовать следующим образом:

$$\cos[(p-2)\tau - \phi] = \cos[2(1-p)\tau + 2\phi] \cos(p\tau - \phi) - \sin[2(1-p)\tau + 2\phi] \sin(p\tau - \phi).$$

Сделав преобразования, запишем вариационные уравнения в виде.

$$2pa \frac{d\phi}{d\tau} + \frac{d^2 a}{d\tau^2} - a \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 = \varepsilon \frac{3}{4} ka^3 + \varepsilon^2 \frac{a}{2(4p^2 - 1)} - \varepsilon^2 \frac{3k^2 a^5}{128p^2} + \varepsilon^2 \frac{a}{4(2p-1)} \cdot \cos[2(1-p)\tau + 2\phi], \quad (31)$$

$$-2p \frac{da}{d\tau} + 2 \frac{da}{d\tau} \cdot \frac{d\phi}{d\tau} + a \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} = -\varepsilon^2 \frac{a \sin[2(1-p)\tau + 2\phi]}{4(2p-1)}. \quad (32)$$

С учетом обозначения $\theta_2 = (1-p)\tau + \phi$ из (31) и (32) находим.

$$\frac{d\theta_2}{d\tau} = 1 - p + \varepsilon \frac{3ka^2}{8p} + \varepsilon^2 \frac{15k^2 a^4}{256p^3} + \varepsilon^2 \frac{1}{4p(4p^2 - 1)} + \varepsilon^2 \frac{\cos 2\theta_2}{8p(2p-1)}, \quad (33)$$

$$\frac{da}{d\tau} = \varepsilon^2 \frac{a \sin 2\theta_2}{8p(2p-1)}. \quad (34)$$

Отсюда получаем условие, определяющее линии равных амплитуд вблизи $p = 1$ во втором приближении:

$$\left| 2(1-p) + \varepsilon \frac{3ka_0^2}{4p} + \frac{\varepsilon^2}{2p(4p^2 - 1)} + \varepsilon^2 \frac{15k^2 a_0^4}{128p^3} \right| = \frac{\varepsilon^2}{4p(2p-1)}. \quad (35)$$

После замены $p = 1$ в выражениях при ε и ε^2 получаем упрощенное уравнение для указанных выше линий:

$$\left| 2(1-p) + \frac{N}{2} \varepsilon + \left(\frac{1}{6} + \frac{5N^2}{96} \right) \varepsilon^2 \right| = \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad (36)$$

где, как и для колебаний в первой зоне неустойчивости, $N = \frac{3ka_0^2}{2}$.

Из анализа уравнения (36) следует, что для линий равных амплитуд во второй зоне параметрической неустойчивости сохраняются все характерные особенности, полученные для линий в первой зоне.

Авторами статьи были получены также уравнения линий равных амплитуд для третьей зоны параметрической неустойчивости и показано, что для линий равных амплитуд в третьей зоне сохраняются все выводы, полученные ранее для колебаний в первых двух зонах [2].

Получение инвариантов движения

Как известно [5], если дано какое-либо преобразование класса (пространства) в себя, то любая функция $F(x, y, \dots)$ такая, что $F[f(x), f(y), \dots] = F(x, y, \dots)$ для всех x, y, \dots из C , и любое соотношение $O(x, y, \dots) = A$ такое, что $O(f(x), f(y), \dots) = A$ для всех x, y, \dots из C , называются инвариантами относительно данного преобразования. Если найдены инварианты движения какой-либо системы дифференциальных уравнений, то задача считается решенной.

Найдем инварианты движения для колебаний в первых трех зонах параметрической неустойчивости, когда решение уравнения (2) ищется вблизи резонансных частот $p = 1/2, 1, 3/2$. Если p близко к $1/2$, то для первого приближения были получены уравнения (15) и (16). Из этих уравнений находим

$$\left[1 - 2p + \frac{\varepsilon}{2p} \cos 2\theta_1 + \varepsilon \frac{3ka^2}{4p} \right] da = a \frac{\varepsilon}{2p} \sin 2\theta_1 d\theta_1. \quad (37)$$

Обозначив $a = \sqrt{\rho}$, из (37) получаем

$$\left(1 - 2p + \frac{\varepsilon}{2p} \cos 2\theta_1 + \varepsilon \frac{3k}{4p} \rho \right) d\rho - \frac{\varepsilon}{p} \rho \sin 2\theta_1 d\theta_1 = 0. \quad (38)$$

Сделав несложные преобразования, из (38) имеем в первом приближении инвариант движения для колебаний в первой зоне неустойчивости:

$$\rho \left(1 - 2p + \varepsilon \frac{3k}{8p} \rho + \frac{\varepsilon}{2p} \cos 2\theta_1 \right) = C_1, \quad (39)$$

где C_1 – произвольная постоянная, определяемая начальными условиями при $\tau = \tau_0$.

Из (38) формула для $\rho = a^2$ имеет вид

$$\rho = \frac{4p}{3k\varepsilon} \left(-z \pm \sqrt{z^2 + \frac{3k\varepsilon C_1}{2p}} \right), \quad \text{где } z = 1 - 2p + \frac{\varepsilon}{2p} \cos 2\theta_1. \quad (40)$$

Подставив (40) в (15), находим связь между τ и θ_1 :

$$\pm 2 \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\left(1 - 2p + \frac{\varepsilon}{2p} \cos 2\theta \right)^2 + \frac{3k\varepsilon C_1}{2p}}} = \tau - \tau_0, \quad \text{где } \theta_0 = \left(\frac{1}{2} - p \right) \tau_0 + \phi_0. \quad (41)$$

Таким образом, найдена в квадратурах зависимость между τ и θ_1 .

Из (40) видно, что при $k \neq 0$ амплитуда параметрических колебаний ограничена. Если же $k \rightarrow 0$, то амплитуда будет увеличиваться и в пределе при $k = 0$ (случай уравнения Матье) может обратиться в бесконечность, что согласуется с теорией параметрического возбуждения линейных систем.

Итак, в случае нелинейных систем неограниченного нарастания параметрически возбуждаемых колебаний не происходит, ибо присущая нелинейным системам неизохронность приводит с ростом амплитуды колебаний к нарушению требуемых частотных и фазовых со-

отношений, и к прекращению вложения энергии в систему со стороны механизма, изменяющего параметр, а следовательно, и к установлению определенной амплитуды вынужденных колебаний.

Аналогично можно найти инварианты движения и для колебаний в высших зонах неустойчивости. Например, для второй зоны параметрической неустойчивости колебаний инвариант движения во втором приближении имеет вид

$$\rho \left[2(1-p) + \varepsilon \frac{3k}{8p} \rho + \frac{\varepsilon^2}{2p(4p^2-1)} + \frac{5(k\varepsilon)^2}{128p^3} \rho^2 + \frac{\varepsilon^2}{4p(2p-1)} \cos 2\theta_2 \right] = C_2. \quad (42)$$

Для третьей зоны инвариант движения в третьем приближении имеет вид

$$\rho \left[2\left(\frac{3}{2}-p\right) + \varepsilon \frac{3k}{8p} \rho + \frac{\varepsilon^2}{2p(4p^2-1)} + \frac{5(k\varepsilon)^2}{128p^3} \rho^2 + \varepsilon^3 \frac{3k(16p^4+16p^2-1)}{32p^3(4p^2-1)^2} \rho + \frac{51(k\varepsilon)^3}{4096p^5} \rho^3 + \frac{\varepsilon^3}{32p(p-1)(2p-1)} \cos 2\theta_3 \right] = C_3. \quad (43)$$

Таким образом, в работе получены следующие результаты.

1. Для нелинейной параметрической системы, описываемой уравнением Матье с кубической правой частью, получены уравнения линий равных амплитуд, которые при $k=0$ переходят в границы зоны Матье. Показано, что введение нелинейности в уравнение Матье приводит к повороту и деформации указанных выше линий относительно точек $p=1/2, 1, 3/2$ в системе координат (p, ε) , причем угол поворота тем больше, чем больше по модулю коэффициент k , характеризующий степень нелинейности и тип системы, а также амплитуду стационарных колебаний. Доказано, что наклон в сторону больших или меньших частот зависит от знака k . Для мягкой нелинейной системы ($k > 0$) линии равных амплитуд поворачиваются по часовой стрелке, а для жесткой ($k < 0$) – против часовой стрелки.

2. Для нелинейного уравнения Матье получены инварианты движения, связывающие амплитуду и фазу колебаний, из которых следует, что наличие нелинейности приводит к ограничению амплитуды параметрически возбуждаемых колебаний. Для первой зоны неустойчивости получена в явном виде зависимость между квадратом амплитуды ρ и фазой θ_1 колебаний, а также найдена в квадратурах зависимость между τ и θ_1 .

Список литературы: 1. Зуев Н.Г., Титаренко А.М., Черешников П.И. Исследование нелинейных колебательных систем, работающих в первой и высших зонах параметрической неустойчивости // Проблемы нелинейной электротехники: Тез. докл. III Всесоюз. науч.-техн. конф. Киев, 1988. Ч.1. С.56. 2. Титаренко А.М., Зуев Н.Г., Черешников П.И. О зонах возбуждения одного нелинейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами / Харьк. ин-т радиоэлектрон. Харьков, 1985. 21с. (Рукопись деп. в Укр НИИНТИ 23.07.85, №1502 Ук-85 Деп). 3. Блэкьер О. Анализ нелинейных систем. М.: Мир. 1969. 400с. 4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504с. 5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1984. 832с.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 10.01.2008