

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЗВЕНЬЕВ РЕАЛЬНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНЫХ

В. З. Магергут, М. Б. Карцынель

Днепропетровск

Рассмотрим устойчивую одноконтурную САР с запаздыванием, состоящую из звеньев с передаточными функциями $\frac{K_i}{D_i(p)}$, в которую для улучшения качества вводится первая (вторая) реальная положительная ($m > 0$) производная с передаточной функцией

$$W_1(p) = \frac{m_1 \tau_1 p}{1 + \tau_1 p} \left(W_2(p) = \left(\frac{m_2 \tau_2 p}{1 + \tau_2 p} \right)^2 \right),$$

где m_1 (m_2) — передаточный коэффициент звена;

τ_1 (τ_2) — постоянная времени звена;

p — оператор Лапласа.

Некоторые из возможных способов введения производных от сигналов указаны на рис. 1.

Все эти способы характеризуются одинаковым характеристическим уравнением замкнутых систем и, таким образом, с точки зрения устойчивости все они являются тождественными. Для случая введения первой производной характеристическое уравнение

$$D(p)(1 + \tau_1 p) + K(1 + \tau_1 p + m_1 \tau_1 p) e^{-pt} = 0, \quad (1)$$

для второй

$$D(p)(1 + 2\tau_2 p + \tau_2^2 p^2) + K(1 + 2\tau_2 p + \tau_2^2 p^2 + m_2^2 \tau_2^2 p^2) e^{-pt} = 0, \quad (2)$$

где $D(p) = \prod_{i=1}^n D_i(p)$ — знаменатель передаточной функции разомкнутой

САР без введения производных;

$K = \prod_{i=1}^n K_i$ — общий коэффициент усиления разомкнутой САР

без введения производных;

t — время запаздывания.

Переходя к частным выражениям и векторам, в (1) и (2) получим уравнение кривой D -разбиения по общему коэффициенту усиления K соответственно для первой производной

$$\bar{K}_1 = - \frac{D(i\omega) e^{i\omega t}}{1 + \frac{m_1 \tau_1 (i\omega)}{1 + \tau_1 (i\omega)}}, \quad (3)$$

для второй

$$K_2 = - \frac{D(i\omega) e^{i\omega t}}{1 + \frac{m_2^2 \tau_2^2 (i\omega)^2}{1 + 2\tau_2(i\omega) + \tau_2^2(i\omega)^2}} \quad (4)$$

где $D(i\omega)$ представляет собой годограф Михайлова разомкнутой САР без введения производных и запаздывания, а числитель $D(i\omega) e^{i\omega t}$ годограф, получаемый из годографа $D(i\omega)$ путем поворота вектора каждой точки частоты ω_i на угол $\omega_i t$ против часовой стрелки. Знаменатели выражений (3) и (4) представляют собой сдвинутую на единицу вправо АФХ звена первой или второй производных.

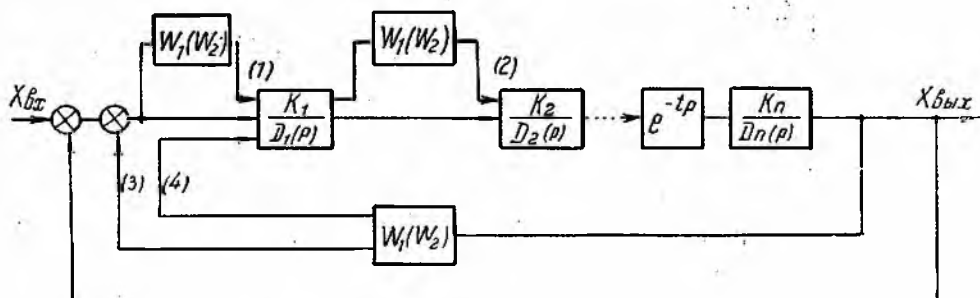


Рис. 1.

Геометрическая интерпретация выражений (3) и (4) дана на рис. 2, где пунктиром изображена АФХ первой производной.

При использовании результатов* определения основных свойств САР из кривой D -разбиения, увеличение критического коэффициента усиления системы $K_{кр}$ является для рассматриваемых четырех случаев наиболее существенным критерием улучшения ее качественных показателей. Последний определяем из выражений (3), (4); он равен минимальному значению отрезка, отсекаемого на положительном направлении действительной оси.

Определим значения параметров звена реальной первой и второй производных τ и m , полностью ограничивающих увеличение $K_{кр}$. Значения эти назовем критическими. Определим также максимальное критическое значение времени запаздывания $t_{кр\max}$, при котором введение реальных дифференцирующих звеньев для увеличения $K_{кр}$ при любых значениях параметров m и τ не эффективно.

Рассмотрим вначале систему без запаздывания. Заменяем в характеристических уравнениях (1) и (2) при $t = 0$ p на $i\omega$ и приравняем порознь нулю действительную и мнимую части. Учитывая, что $D(i\omega) = u(\omega) + i v(\omega)$, получим:

для первой производной

$$K_1 + u(\omega) - \tau_1 v(\omega) \omega = 0; \quad (5a)$$

$$K_1(m_1 + 1) \tau_1 \omega + v(\omega) + \tau_1 u(\omega) \omega = 0, \quad (5b)$$

для второй производной

$$K_2 + u(\omega) - \tau_2^2 u(\omega) \omega^2 - K_2(m_2^2 - 1) \tau_2^2 \omega^2 - 2\tau_2 v(\omega) \omega = 0; \quad (6a)$$

* М. В. Мееров. Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. Физматгиз, 1959.

$$v(\omega) - \tau_2^2 v(\omega) \omega^2 + 2K_2 \tau_2 \omega + 2\tau_2 u(\omega) \omega = 0. \quad (66)$$

Затем решим задачу нахождения оптимального значения m при заданной величине τ , т. е. найдем значение $m = m_0$, при котором можно получить максимальное значение критического коэффициента усиления системы $K_{кр, \max}$. Зная $D(i\omega)$ и τ из уравнений (5а) и (66) находим

$$K_1 = -u(\omega) + v(\omega) \tau_1 \omega; \quad (7)$$

$$K_2 = \frac{-v(\omega) + \tau_2^2 v(\omega) \omega^2 - 2\tau_2 u(\omega) \omega}{2\tau_2 \cdot \omega}. \quad (8)$$

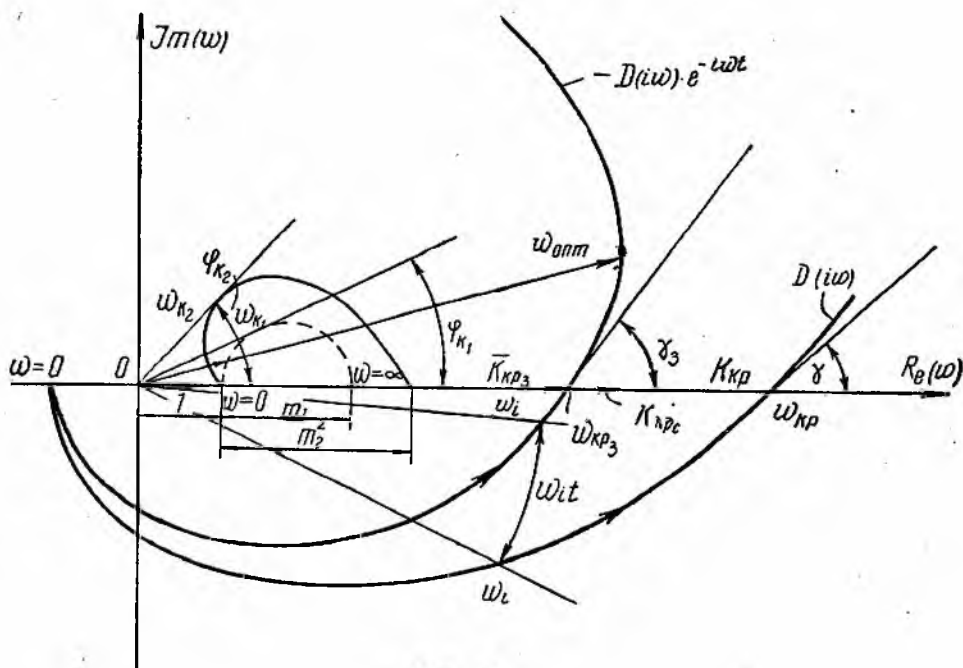


Рис. 2.

Беря производную от K по ω и приравнявая ее к нулю, получим ряд значений ω , подстановка которых в уравнение (7), (8) даст ряд максимальных значений K . Наименьшее положительное из них определяет максимальный критический коэффициент усиления системы при введении воздействия по производной $K_{кр, \max}$. Частота ω определяющая $K_{кр, \max}$, будет оптимальной. Подставляя соответствующие значения τ , $K_{кр, \max}$ и ω_0 в уравнения (5б) и (6а), найдем m_0 и m_0 .

Определение $\tau_{кр}$

Очевидно, можно найти такое значение $\tau = \tau_{кр}$, которому будет соответствовать $m_0 = 0$ и, следовательно, $K_{кр, \max}$ будет равно $K_{кр, \max}$ без введения воздействия по производным, а ω_0 равно $\omega_{кр}$, отвечающей $K_{кр, \max}$.

Подставляя в (7) и (8) $\omega = \omega_{кр}$, а $\tau = \tau_{кр}$ и учитывая, что $v\omega_{кр} = 0$, получим

$$\frac{dK_1}{d\omega} = -u'(\omega_{кр}) - \tau_{кр} [v(\omega_{кр}) + v'(\omega_{кр}) \omega_{кр}] = 0 \quad (9)$$

и

$$\tau_{кр1} = \frac{1}{\omega_{кр}} \frac{u' \omega_{кр}}{v'(\omega_{кр})}. \quad (10)$$

Однако $\frac{u'(\omega_{кр})}{v'(\omega_{кр})} = \operatorname{tg} \gamma$ (рис. 2) и, следовательно,

$$\tau_{кр1} = \frac{1}{\omega_{кр} \operatorname{tg} \gamma}. \quad (10a)$$

Для второй производной

$$\frac{dK_2}{d\omega} = \frac{\omega_{кр}^3 \tau_{кр2}^2 v'(\omega_{кр}) + \omega_{кр}^2 [\tau_{кр2}^2 v(\omega_{кр}) - 2\tau_{кр2} u'(\omega_{кр}) - \omega_{кр} v'(\omega_{кр}) + v(\omega_{кр})]}{2\tau_{кр2} \omega_{кр}^2} = 0. \quad (11)$$

Решая (11) относительно $\tau_{кр2}$, получим

$$\tau_{кр2}^2 - \tau_{кр2} \frac{2u'(\omega_{кр})}{\omega_{кр} v'(\omega_{кр}) + v(\omega_{кр})} - \frac{1}{\omega_{кр}^2} \frac{\omega_{кр} v'(\omega_{кр}) - v(\omega_{кр})}{\omega_{кр} v'(\omega_{кр}) + v(\omega_{кр})} = 0, \quad (12)$$

откуда

$$\tau_{кр2} = \frac{1}{\omega_{кр} \operatorname{tg} \gamma} [1 + \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \gamma)^2}]. \quad (13)$$

Второе значение $\tau_{кр}$ меньше нуля.

Рассматривая систему с запаздыванием (рис. 2), очевидно из формул (10a) и (13) можно определить для нее критические значения τ :

$$\tau_{кр1} = \frac{1}{\omega_{кр3} \operatorname{tg} \gamma_3}; \quad (14)$$

$$\tau_{кр2} = \frac{1}{\omega_{кр3} \operatorname{tg} \gamma_3} [1 + \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \gamma_3)^2}]. \quad (15)$$

Сравнивая (14) и (15), можно записать $\tau_{кр2}$ через $\tau_{кр1}$

$$\tau_{кр2} = \tau_{кр1} [1 + \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \gamma_3)^2}]. \quad (16)$$

Из (16) видно, что

$$\tau_{кр2} > 2\tau_{кр1}. \quad (17)$$

Проанализируем полученные формулы (14)–(17) для системы с запаздыванием. Очевидно, $\operatorname{tg} \gamma_3 > \operatorname{tg} \gamma$ и, следовательно, критические значения τ для системы с запаздыванием будут меньше, чем для системы без запаздывания. При $\gamma_3 > \frac{\pi}{2}$ значения $\tau_{кр1}$ и $\tau_{кр2}$, определяемые формулами (14) и (15), становятся меньше нуля, что показывает неэффективность введения производных для увеличения $K_{крс}$ при $\gamma_3 > \frac{\pi}{2}$. Время запаздывания t , дающее $\gamma_3 = \frac{\pi}{2}$ можно определить как максимальное критическое время запаздывания для случаев введения реальных производных с целью увеличения $K_{крс}$, т. е. $t = t_{кр\max}$.

При $\gamma_3 = \frac{\pi}{2}$ критическое значение $\tau_{кр1}$ станет равным нулю. Для звена второй производной при $\gamma_3 = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{\gamma_3 \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tau_{кр2} = \lim_{\gamma_3 \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\omega_{кр3} \operatorname{tg} \gamma_3} [1 + \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \gamma_3)^2}] = \frac{1}{\omega_{кр}}, \quad (18)$$

что является важным свойством звена второй производной, так как показывает возможность получения эффекта увеличения $K_{крс}$ за счет введения второй реальной производной с $\tau < \tau_{кр_2}$ при $\gamma_2 = \frac{\pi}{2}$.

Определение $\tau_{k\max}$

Найдем еще одно важное соотношение, позволяющее быстро оценить эффективность введения реальных производных. Назовем точку, в которой аргумент АФК знаменателя выражения (3) и (4) достигает максимума, точкой касания и параметрам, характеризующим эту точку, присвоим индекс k (рис. 2).

Соотношение параметров данной точки определяется формулой для первой производной

$$\tau_{k_1} = \frac{1}{\omega_{k_1} \sqrt{m_1 + 1}}; \quad (19)$$

для второй производной

$$\tau_{k_2} = \frac{\sqrt{3}}{\omega_{k_2} \sqrt{m_2^2 + 1}}. \quad (20)$$

Из рис. 2 видно, что точки, соответствующие оптимальному решению, т. е. решению, дающему $K_{крс\max}$ должны лежать не далее точки касания по ходу АФХ. Для выполнения оптимального решения должно выполняться неравенство

$$\tau < \tau_k. \quad (21)$$

Для приближенной оценки оптимального решения в формулы (19) и (20) подставим известное значение m и $\omega_{кр} < \omega_k$. При этом неравенства будут иметь вид

$$\tau_1 < \frac{1}{\omega_{кр} \sqrt{m_1 + 1}}; \quad (22)$$

$$\tau_2 < \frac{\sqrt{3}}{\omega_{кр} \sqrt{m_2^2 + 1}}. \quad (23)$$

Менее точно, но гораздо проще, оценку выполнения оптимального решения можно получить, положив в (22) и (23) $m = m_{\min} = 0$. Тогда

$$\tau_{k_1\max} = \tau_1 < \frac{1}{\omega_{кр}}; \quad (24)$$

$$\tau_{k_2\max} = \tau_2 < \frac{\sqrt{3}}{\omega_{кр}}. \quad (25)$$

При $m_2 > \sqrt{2}$ оценку (25) можно заменить более точной

$$\tau_{k_2\max} = \tau_2 < \frac{1}{\omega_{кр}}, \quad (26)$$

что совпадает с оценкой (24).

Оценка (25) при $m_2 > \sqrt{2}$ возможна, так как в этом случае точка касания не совпадает с точкой, характеризуемой частотой

$$\omega_{кр} = \frac{1}{\tau_2}$$

для звена второй производной.

Так как оценки (22) — (26) соответствуют лишь приближенному выполнению оптимального решения, определяемого в действительности неравенством (21), их следует применять лишь для предварительной оценки, сверяя со значениями $\tau_{кр}$, определяемыми по формулам (14), (15).

Сравнивая (14) и (24), можно заметить, что при $\gamma_3 > \frac{\pi}{4}$ $\tau_{кр1} < \tau_{кр, \max}$ и, следовательно, формула (14) становится определяющей. Из сравнения (15) и (25) видно, что формула (15) становится определяющей при $\gamma_3 > \frac{\pi}{3}$, а из сравнения (15) и (26) для $m_2 > \sqrt{2}$ что для приближенной оценки эффективности введения звена второй производной можно пользоваться формулой (26), так как $\tau_{кр2} = \sigma_{кр, \max}$ лишь при $\gamma_3 = \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, при значениях τ звена больших, чем получаемым по формулам (21) — (26), можно говорить о нецелесообразности введения такого звена, так как получим не оптимальное решение.

Определение $m_{кр}$

При условии, что сможем определить $\tau_{кр}$, возьмем звено с $\tau_{зад} < \tau_{кр}$ и посмотрим, имеются ли значения m , при которых эффекта увеличения $K_{крс}$ от введения производных не будет. Эти значения назовем критическими — $m_{кр}$.

Выше решалась задача отыскания m_0 при заданном τ . Очевидно, отклонения m от m_0 будут давать значения $K_{крс} < K_{крс, \max}$. Возможны значения $m > m_0$ и $m < m_0$, поэтому очевидно, должно существовать два значения $m_{кр}$ при заданном значении $\tau_{зад}$.

Найдем эти значения для САР без запаздывания. Подставив в (5а) и (6б) $\tau = \tau_{зад}$ и $K = K_{крз}$, найдем значения $\omega_{кр}$, отвечающие этим равенствам.

Очевидно, что значения $\omega_{кр}$ будут в III квадранте. Подставляя найденные $\omega_{кр}$ соответственно в (5б) и (6а) и решая их относительно m , отыщем два значения $m_{кр}$.

Для САР с запаздыванием из характеристических уравнений (1), (2), заменяя p на $i\omega$ и учитывая, что $e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$, получим для первой производной

$$u(\omega) - \tau_1 v(\omega) \omega + K \cos \omega t + K(m_1 + 1) \tau_1 \omega \times \sin \omega t = 0; \quad (27a)$$

$$v(\omega) + \tau_1 u(\omega) \omega - K \sin \omega t + K(m_1 + 1) \times \tau_1 \omega \cos \omega t = 0, \quad (27b)$$

для второй производной

$$u(\omega) - 2\tau_2 \omega v(\omega) - \tau_2^2 \omega^2 u(\omega) + K \cos \omega t - 2K\tau_2 \omega \sin \omega t - K(m_2^2 + 1) \tau_2^2 \omega^2 \cos \omega t = 0, \quad (28a)$$

$$v(\omega) + 2\tau_2 \omega u(\omega) - \tau_2^2 \omega^2 v(\omega) - K \sin \omega t + 2K\tau_2 \omega \cos \omega t + K(m_2^2 + 1) \tau_2^2 \omega^2 \sin \omega t = 0. \quad (28b)$$

Исключая из уравнений (27) и (28) m , решаем их относительно $\omega_{кр}$ путем подстановки $\tau = \tau_{зад}$ и $K = K_{крз}$, а затем подобно предыдущему находим $m_{кр}$.

Заметим, что для $m_{кр} < m_0$ можно получить значения $m_{кр} = 0$.

Аналитическое решение, особенно для САР с запаздыванием, представляет собой весьма трудосмкую задачу. Гораздо проще решается задача графически.

Для второй производной

$$\operatorname{tg} \gamma_{2l} = \frac{2\tau\omega_l}{\tau^2\omega_l^2 - 1}, \quad (32)$$

а угол звена второй производной

$$\gamma_{2l} = 2\gamma_{1l}. \quad (33)$$

Производя аналогичные построения, получим $m_{кр}$ и для второй производной.

Из сказанного выше можно сделать следующие выводы.

Полученные формулы и методы определения $\tau_{кр}$ и $m_{кр}$ позволяют быстро сделать предварительную оценку вводимых для улучшения качества системы реальных положительных первой и второй производных.

В статье показано также различие критических параметров первой и второй производных, которые могут обусловить выбор применения той или иной из них.

Определено максимальное критическое время запаздывания, выше которого введение производных с любыми значениями параметров m и τ не дает эффекта увеличения $K_{крс}$.

Получены формулы для расчета постоянных времени τ , выше значений которых введение производных становится не целесообразным.