

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ И МАТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЭФФЕКТА ФАРАДЕЯ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ГИРОТРОПНЫХ СЛОЕВ

Введение

Изучению гиротропных (в частности, ферритовых, плазмopodobных) сред уделяется большое внимание в электродинамике и технике СВЧ [1–5]. Их отличительной особенностью по сравнению с изотропными средами является то, что даже в однородной гиротропной среде распространяются две волны – правой и левой круговой поляризации (эффект Фарадея) [6]. Этот эффект используется при разработке элементов СВЧ трактов, антенных систем, устройств оптоэлектроники, поглощающих и отражающих покрытий и т.п. [1–10].

В настоящей работе исследуются электродинамические свойства ограниченной периодической последовательности (ОПП) попарно чередующихся изотропных магнитоэлектрических и гиротропных слоев. Поля рассеяния ОПП определялись методами теории цепей и матричных функций [11–14]. Разработанный подход позволяет значительно сократить численные расчеты, а в ряде случаев, например в задаче распространения поперечной волны в периодической слоистой продольно намагниченной гиротропной среде, получить решение в аналитическом виде.

Постановка задачи. Поля

Исследуется периодическая в направлении оси OZ структура из N одинаковых элементов (периодов) (рис. 1). Каждый из них включает два слоя толщиной d_1 и d_2 ($d_1 + d_2 = L$). Первый слой – однородный изотропный магнитоэлектрик с параметрами ϵ_1 и μ_1 , второй – продольно намагниченный гиротропный слой, материальные параметры которого определяются тензорными величинами

$$\hat{\epsilon}_2 = \begin{pmatrix} \epsilon_T & i\beta & 0 \\ -i\beta & \epsilon_T & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_L \end{pmatrix}, \quad \hat{\mu}_2 = \begin{pmatrix} \mu_T & i\alpha & 0 \\ -i\alpha & \mu_T & 0 \\ 0 & 0 & \mu_L \end{pmatrix}. \quad (1)$$

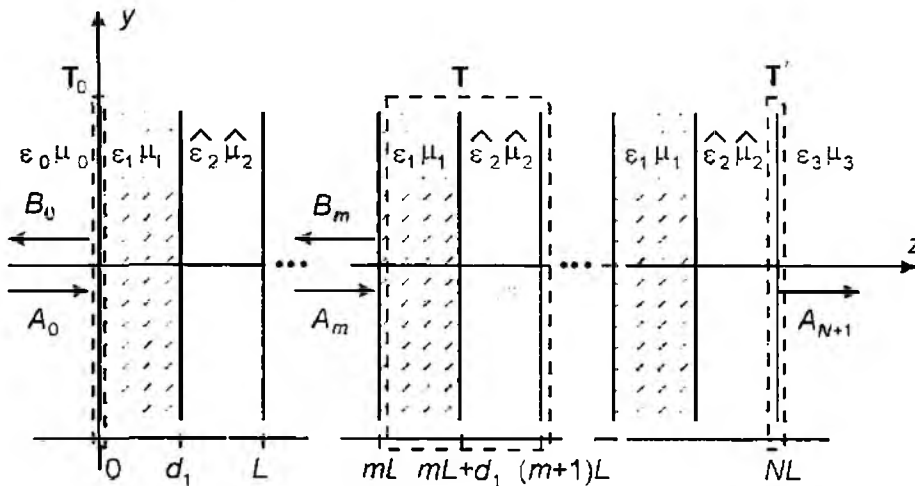


Рис. 1

Материальные параметры ϵ_1 , μ_1 , ϵ_2 , μ_2 в общем случае могут зависеть от частоты и для среды с потерями быть комплексными. Окружающие полупространства $z \leq 0$ и $z \geq NL$ характеризуются проницаемостями ϵ_0 , μ_0 и ϵ_3 , μ_3 соответственно.

Из области $z \leq 0$ на структуру строго падает плоская монохроматическая волна либо перпендикулярной ($\mathbf{E}_e \parallel \mathbf{x}_0$), либо параллельной ($\mathbf{H}_h \parallel \mathbf{x}_0$) поляризации:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{H}_0 \end{Bmatrix} = \mathbf{x}_0 \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{Y_0^e} \\ \sqrt{Y_0^h} \end{Bmatrix} A_0 \exp\{-i(\omega t - k_0 z)\}, k_0 = k\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}. \quad (2)$$

Представим линейно поляризованную волну (2) суперпозицией волн с правой "+" и левой "-" круговой поляризациями (ПКП и ЛКП) [6]:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^+ + \mathbf{H}^-.$$

Компоненты поля в области $z \leq 0$ тогда принимают вид (здесь и далее рассматриваем случай перпендикулярной поляризации, для параллельной поляризации решение ищется аналогично):

$$\begin{aligned} E_{x0}^\pm &= \sqrt{\frac{1}{Y_0^e}} (A_0^\pm e^{ik_0 z} + B_0^\pm e^{-ik_0 z}), & H_{x0}^\pm &= \pm i \sqrt{Y_0^e} (A_0^\pm e^{ik_0 z} - B_0^\pm e^{-ik_0 z}), \\ E_{y0}^\pm &= \mp i \sqrt{\frac{1}{Y_0^e}} (A_0^\pm e^{ik_0 z} + B_0^\pm e^{-ik_0 z}), & H_{y0}^\pm &= \sqrt{Y_0^e} (A_0^\pm e^{ik_0 z} - B_0^\pm e^{-ik_0 z}). \end{aligned}$$

Компоненты поля на выходе из структуры ($z \geq NL$)

$$\begin{aligned} E_{x3}^\pm &= \sqrt{\frac{1}{Y_3^e}} A_{N+1}^\pm e^{ik_3(z-NL)}, & H_{x3}^\pm &= \pm i \sqrt{Y_3^e} A_{N+1}^\pm e^{ik_3(z-NL)}, \\ E_{y3}^\pm &= \mp i \sqrt{\frac{1}{Y_3^e}} A_{N+1}^\pm e^{ik_3(z-NL)}, & H_{y3}^\pm &= \sqrt{Y_3^e} A_{N+1}^\pm e^{ik_3(z-NL)}. \end{aligned}$$

Компоненты полей в слоях m -го периода $mL \leq z \leq mL + d_1$ и $mL + d_1 \leq z \leq (m+1)L$, соответственно запишутся следующим образом:

$$E_{x1}^\pm = \sqrt{\frac{1}{Y_1^e}} (A_m^\pm e^{ik_1(z-mL)} + B_m^\pm e^{-ik_1(z-mL)}), \quad H_{x1}^\pm = \pm i \sqrt{Y_1^e} (A_m^\pm e^{ik_1(z-mL)} - B_m^\pm e^{-ik_1(z-mL)}), \quad (3)$$

$$E_{y1}^\pm = \mp i \sqrt{\frac{1}{Y_1^e}} (A_m^\pm e^{ik_1(z-mL)} + B_m^\pm e^{-ik_1(z-mL)}), \quad H_{y1}^\pm = \sqrt{Y_1^e} (A_m^\pm e^{ik_1(z-mL)} - B_m^\pm e^{-ik_1(z-mL)}).$$

$$E_{x2}^\pm = \sqrt{\frac{1}{Y_2^{e\pm}}} (C_m^\pm e^{i\gamma^\pm(z-mL-d_1)} + D_m^\pm e^{-i\gamma^\pm(z-mL-d_1)}), \quad H_{x2}^\pm = \pm i \sqrt{Y_2^{e\pm}} (C_m^\pm e^{i\gamma^\pm(z-mL-d_1)} - D_m^\pm e^{-i\gamma^\pm(z-mL-d_1)}), \quad (4)$$

$$E_{y2}^\pm = \mp i \sqrt{\frac{1}{Y_2^{e\pm}}} (C_m^\pm e^{i\gamma^\pm(z-mL-d_1)} + D_m^\pm e^{-i\gamma^\pm(z-mL-d_1)}), \quad H_{y2}^\pm = \sqrt{Y_2^{e\pm}} (C_m^\pm e^{i\gamma^\pm(z-mL-d_1)} - D_m^\pm e^{-i\gamma^\pm(z-mL-d_1)}).$$

Здесь $k_j = k_0 n_j$, $n_j = \sqrt{\epsilon_j \mu_j}$, $Y_j^e = Y_j^h = \eta_j^{-1}$, $\eta_j = \sqrt{\mu_j / \epsilon_j}$ при $j = 0, 1, 3$; $Y_2^{e\pm} = k(\epsilon_\tau \pm \beta) / \gamma^\pm$. $Y_2^{h\pm} = \gamma^\pm / k(\mu_\tau \pm \alpha)$ волновые проводимости и $\gamma^\pm = k\sqrt{(\epsilon_\tau \pm \beta)(\mu_\tau \pm \alpha)}$ – постоянная распространения в гиротропной среде.

Метод решения. Матрица передачи периода и ОПП

Эквивалентная схема указанной структуры представляет собой каскадное соединение четырехполосников, которые определяются своими матрицами передачи, а поля в окружающих структуру полупространствах связаны уравнением

$$\begin{pmatrix} A_0^\pm \\ B_0^\pm \end{pmatrix} = \mathbf{T}_0 \mathbf{T}^N \mathbf{T}^r \begin{pmatrix} A_{N+1}^\pm \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Для получения аналитического решения, исключающего численное возведение матрицы передачи базового элемента в N -ю степень, используем теорию матричных многочленов.

Согласно интерполяционной формуле Лагранжа и теореме Келли-Гамильтона [11-14]

$$\mathbf{T}^N = \begin{pmatrix} t_{11}P_N(X) - P_{N-1}(X) & t_{12}P_N(X) \\ t_{21}P_N(X) & t_{22}P_N(X) - P_{N-1}(X) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Здесь $P_N(X) = (\xi^N - \xi^{-N}) / (\xi - \xi^{-1})$ – полиномы Могина [14], $\xi^{\pm 1} = X \pm \sqrt{X^2 - 1}$ – корни характеристического уравнения матрицы передачи, $X = (t_{11} + t_{22})/2$. Формулы (5) и (6),(9) определяют коэффициенты отражения (КО) $R = B_0/A_0$ и прохождения (КП) $\tau = A_{N+1}/A_0$ периодической последовательности. В частности, если совпадают волновые характеристики первого регулярного участка базового элемента и подводящих каналов ($Y_0 = Y_1 = Y_3$), то

$$R = \frac{t_{21}P_N(X)}{t_{11}P_N(X) - P_{N-1}(X)}, \quad \tau = \frac{1}{t_{11}P_N(X) - P_{N-1}(X)}. \quad (7)$$

Подстановка (6), (7) в граничные условия определяет матрицу передачи периода

$$\begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{m+1} \\ B_{m+1} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где

$$t_{11} = \frac{1}{4Y_1^e Y_2^{e\pm}} \left\{ (Y_1^e + Y_2^{e\pm})(Y_1^e + Y_2^{e\pm}) e^{-ik_1 d_1} e^{-i\gamma^{\pm} d_2} - (Y_1^e - Y_2^{e\pm})(Y_1^e - Y_2^{e\pm}) e^{-ik_1 d_1} e^{i\gamma^{\pm} d_2} \right\},$$

$$t_{12} = -\frac{1}{4Y_1^e Y_2^{e\pm}} \left\{ (Y_1^e - Y_2^{e\pm})(Y_1^e + Y_2^{e\pm}) e^{-ik_1 d_1} e^{-i\gamma^{\pm} d_2} - (Y_1^e + Y_2^{e\pm})(Y_1^e - Y_2^{e\pm}) e^{-ik_1 d_1} e^{i\gamma^{\pm} d_2} \right\},$$

$$t_{21} = -\frac{1}{4Y_1^e Y_2^{e\pm}} \left\{ (Y_1^e - Y_2^{e\pm})(Y_1^e + Y_2^{e\pm}) e^{ik_1 d_1} e^{i\gamma^{\pm} d_2} - (Y_1^e + Y_2^{e\pm})(Y_1^e - Y_2^{e\pm}) e^{ik_1 d_1} e^{-i\gamma^{\pm} d_2} \right\},$$

$$t_{22} = \frac{1}{4Y_1^e Y_2^{e\pm}} \left\{ (Y_1^e + Y_2^{e\pm})(Y_1^e + Y_2^{e\pm}) e^{ik_1 d_1} e^{i\gamma^{\pm} d_2} - (Y_1^e - Y_2^{e\pm})(Y_1^e - Y_2^{e\pm}) e^{ik_1 d_1} e^{-i\gamma^{\pm} d_2} \right\}.$$

Собственные волны. Коэффициент эллиптичности

Свойства ограниченной периодической последовательности при большом числе периодов $N \gg 1$ в первую очередь определяются условиями и характером распространения собственных волн ее бесконечного аналога ($N = \infty$). Согласно теореме Флоке, волновые функции (поля $f(z)$) в соседних областях бесконечной периодической системы отличаются комплексным множителем $f(z + L) = f(z) \exp(i\Gamma L)$, где L – длина периода, Γ – имеет смысл усредненной постоянной распространения. Отсюда с учетом (8) получаем операторное соотношение

$$\begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix} = \exp(-i\Gamma L) \begin{pmatrix} A_{m+1} \\ B_{m+1} \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} A_{m+1} \\ B_{m+1} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

которое определяет множитель Флоке как собственное значение матрицы передачи базового элемента (корень ее характеристического уравнения, $\exp(\pm i\Gamma L) \equiv \xi^{\pm 1}$).

Из равенства нулю определителя однородной системы (9) следует дисперсионное уравнение для постоянной распространения собственных волн:

$$\cos(\Gamma L) = X = (t_{11} + t_{22})/2. \quad (10)$$

В отсутствие потерь можно определить условия распространения $|t_{11} + t_{22}| \leq 2$ (зоны прозрачности) и затухания $|t_{11} + t_{22}| > 2$ (зоны запираения) собственных волн бесконечного прототипного построения.

Из (10) получаем выражение относительно усредненной постоянной распространения Γ^{\pm} для ПКП и ЛКП волн $X = \cos(\Gamma^{\pm} L) = \cos(k_1 d_1) \cos(\gamma^{\pm} d_2) - \frac{(Y_1^e)^2 + (Y_2^{e\pm})^2}{2Y_1^e Y_2^{e\pm}} \sin(k_1 d_1) \sin(\gamma^{\pm} d_2)$.

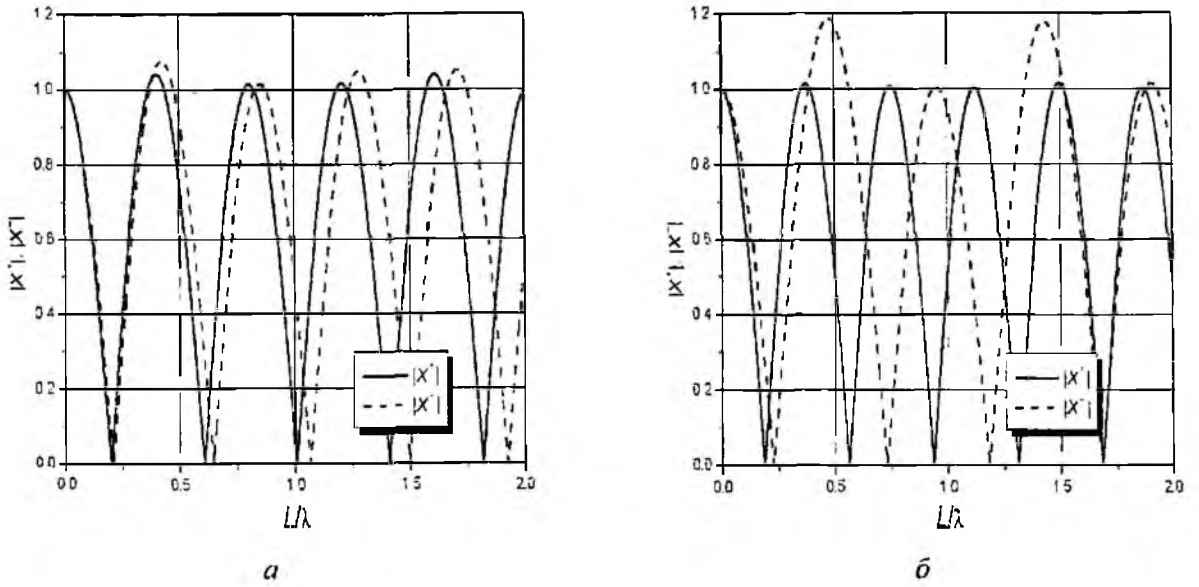


Рис. 2

На рис. 2 (частотная зависимость модуля косинуса усредненной постоянной распространения собственных волн периодической последовательности гиротропных слоев: $\epsilon_1 = \mu_j = 1$, $\epsilon_L = \epsilon_T = 2$, $\beta = 0$, $d_1/L = 0.5$; а – $\alpha = 0.1$; б – $\alpha = 0.4$) видно отличие в постоянных распространения собственных волн ОПП для ПКП и ЛКП волн. Границы зон запираения (прозрачности) для ЛКП волн смещаются в область более высоких частот, а также для этой волны с ростом параметра α (β) наблюдается увеличение ширины зон запираения при определенной толщине гиротропного слоя.

Отмеченная особенность проявляется на частотных ($\sim L/\lambda$, $d_1/L = \text{const}$) зависимостях модуля КО (КП). Они имеют вид чередующихся областей с относительно высоким (зоны квазизапираения) и малым (зоны квазипрозрачности) уровнем отражения (рис. 2, 3, а); (рис. 3: частотная зависимость модуля коэффициента отражения ограниченной периодической последовательности $N = 5$ гиротропных слоев: $\epsilon_1 = \mu_j = 1$, $\epsilon_L = \epsilon_T = 2$, $\beta = 0$, $d_1/L = 0.5$; а – $\alpha = 0.1$; б – $\alpha = 0.4$). В последних существует $N - 1$ мелкомасштабных осцилляций модуля КО (КП), минимальное значение которого равно нулю. Их положение легко определяется из (7) по условию полного прохождения поля ($R = 0$):

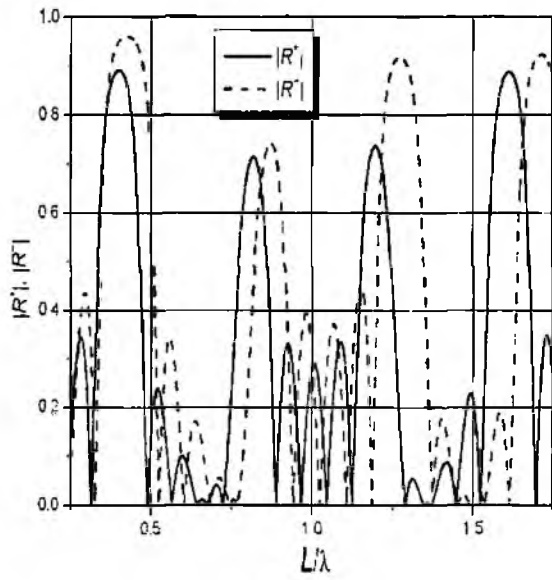
$$t_{21} = 0, P_N(X) = 0.$$

Эти два условия взаимно независимы. Первое из них зависит только от параметров изолированного базового элемента. Второе определяет резонансное прохождение волн с учетом числа элементов и характера их связи. Поскольку решение его – корни полиномов Могина, то существует $N - 1$ дискретный набор параметров структуры $\{s_\nu = \{\lambda_\nu, L_\nu, \dots\}_{\nu=1}^{N-1}\}$, обеспечивающих полное прохождение поля для недиссипативных систем. Он удовлетворяет трансцендентным уравнениям (10), каждое из которых относится к соответствующему значению корня X_ν [11, 12]: $X_\nu = \cos(\nu\pi/N) = [t_{11}(s_\nu) + t_{22}(s_\nu)]/2$, $\nu = 1, 2, 3, \dots, N - 1$.

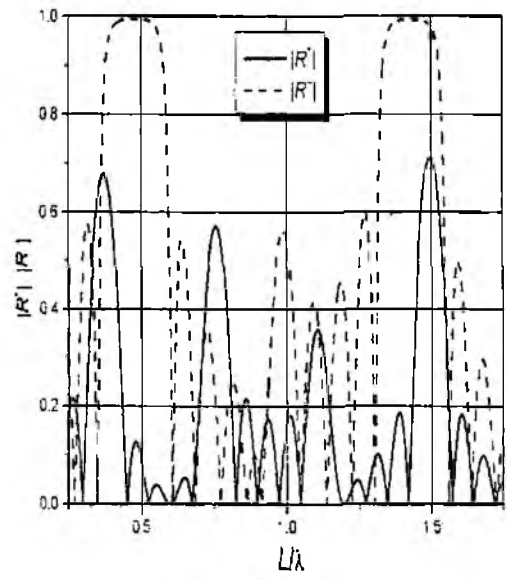
Эллиптичность электрического поля на входе и выходе структуры выражается форму-

$$\text{лампы [2]} \quad \Theta_E^{refl} = 20 \lg \frac{|E_{\max}|}{|E_{\min}|} = 20 \lg \left| \frac{R^- + R^+}{R^- - R^+} \right|, \quad \Theta_E^{trans} = 20 \lg \frac{|E_{\max}|}{|E_{\min}|} = 20 \lg \left| \frac{\sqrt{Y_2^{e-}} |\tau^+| + \sqrt{Y_2^{e+}} |\tau^-|}{\sqrt{Y_2^{e-}} |\tau^+| - \sqrt{Y_2^{e+}} |\tau^-|} \right|,$$

где τ^\pm , R^\pm определяются выражениями (7).

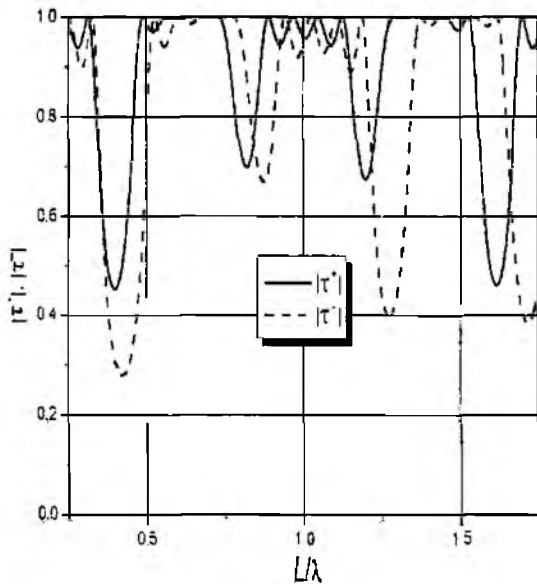


а

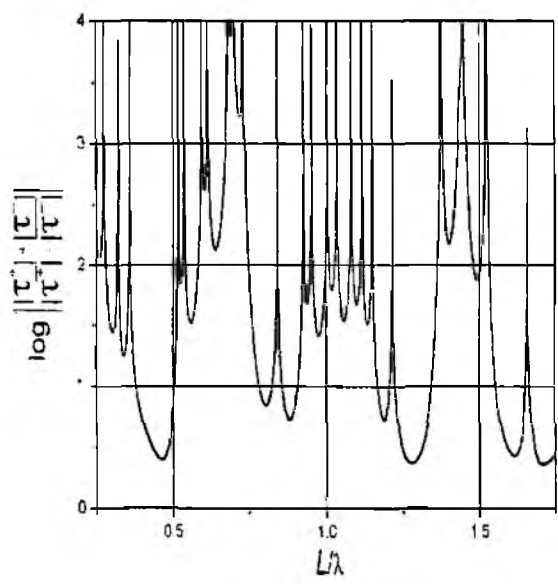


б

Рис. 3



а



б

Рис. 4

Определим угол поворота плоскости поляризации. Электрический вектор падающей волны совпадает с осью x . Таким образом, угол поворота плоскости поляризации будет определять наклон большой оси эллипса к оси x . На входе и выходе структуры $\psi^{refl} = \frac{1}{2} [\arg(R^+) - \arg(R^-)]$, $\psi^{trans} = \frac{1}{2} [\arg(\tau^+) - \arg(\tau^-)]$.

На рис. 4. б (частотная зависимость модуля коэффициентов прохождения ПКП и ЛКП волн – а и эллиптичности прошедшей волны – б ограниченной периодической последовательности $N = 5$ гиротропных слоев: $\epsilon_1 = \mu_1 = 1$, $\epsilon_L = \epsilon_T = 2$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0$, $d_1/L = 0.5$.) показана зависимость эллиптичности прошедшей волны от длины слоя. Как видно из рисунка, при определенных длинах гиротропного слоя прошедшая структура волна имеет чистую линейную поляризацию.

Выводы

Представленные результаты позволяют углубить понимание физических явлений при распространении электромагнитных волн в слоистых гиротропных структурах, детализировать их аналитическое исследование и являются основой для разработки прикладных методов проектирования линзовых антенн, поглощающих и отражающих покрытий, микрополосковых, щелевых линий, устройств оптоэлектроники и т.п.

Список литературы: 1. Федоров Ф.И. Теория гиротропии. Минск: Наука и техника, 1975. 370 с. 2. Гуревич А.Г. Ферриты на сверхвысоких частотах. М.: Физ.-мат. лит, 1960. 407 с. 3. Микаэлян А.П. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. М.: Физматгиз, 1960. 407 с. 4. Силин В.П., Рухадзе А.А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М.: Госатомиздат, 1961. 267 с. 5. Басс Ф.Г., Булгаков А.А., Тетервов А.П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками. М.: Наука, 1989. 288 с. 6. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1989. 543 с. 7. Терентьев Ю.М., Вытовтов К.А. Матрица преобразования N -слойной периодической среды с анизотропными слоями // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 40, Вып. 3 С. 279-281. 8. Бооров В.В., Сурков В.И. Матрица передачи анизотропного слоя // Радиотехника и электроника. 1995. Т. 45, Вып. 6. С. 864-869. 9. Кизель В.А., Бурков В.И. Гиротропия кристаллов. М.: Наука, 1980. 304 с. 10. Багацкая О.В., Малюскин А.В., Шульга С.Н. Расчет коэффициентов отражения и прохождения плоской электромагнитной волны для неоднородного гиротропного слоя методом конечных разностей // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45, Вып. 6 С. 662-669. 11. Казанский В.Б., Подлозный В.В. Исследование периодических ограниченных структур с использованием полиномов Могина // Доповіді НАН України. 1998, № 3. С. 86-91. 12. Казанский В.Б., Подлозный В.В., Хардииков В.В. Исследование характеристик рассеяния последовательности однотипных элементов с использованием теоремы Кели-Гамильтона // Электромагнитные волны и электронные системы. 1999. Т. 4, № 3. С. 19-27. 13. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с. 14. Levin H. Unidirectional Wave Motion // North-Holland Series in Apl. Mathem. and Mech. North-Holland publishing Company. Amsterdam, N.-Y, Oxford. 1978. V. 23. 499 p.

*Харьковский национальный
университет радиоэлектроники*

Поступила в редколлегию 11.09.2008.