

## Нелинейная теория неавтономных многомерных электронно-волновых систем миллиметрового диапазона (усилители и умножители)

Е. Н. Одаренко, А. А. Шматько

Разработана многомерная модель нелинейной гибридной электронно-волновой системы О-типа. Многокаскадный прибор с ленточным электронным потоком рассматривается в режиме усиления мощности и умножения частоты. Теоретический анализ нелинейных процессов проводится на основе самосогласованной многомерной теории для различных значений амплитуды входного сигнала. Исследованы основные закономерности энергообмена в гибридных усилительных системах с резонансными и нерезонансными участками пространства взаимодействия. Проведено численное моделирование процесса умножения частоты в двухкаскадном приборе с нерезонансным модулятором электронного потока и резонансным выходным каскадом с длительным взаимодействием.

The multidimensional model of the nonlinear hybrid O-type beam-wave system has been developed. The multistage device with sheet electron beam is considered as an amplifier and frequency multiplier. The theoretical analysis of nonlinear processes is carried out on the basis of the self-consistent multidimensional theory for different input amplitude values. The main regularities of the beam-wave interaction in the hybrid amplifying systems with resonance and nonresonance sections of the interaction space are investigated. The numerical simulation of the frequency multiplication process in the two-stage device with the nonresonance electron beam modulator and resonance output stage with prolonged interaction is performed.

### Введение

Применение каскадного соединения участков пространства электронно-волнового взаимодействия в приборах вакуумной электроники является одним из способов улучшения их энергетических и частотных характеристик. В приборах с кратковременным взаимодействием (клистронах) многокаскадная конструкция обусловлена принципом работы устройств, в приборах с длительным взаимодействием (ЛВВ) такой подход позволяет, в частности, значительно ослабить влияние паразитной обратной связи [1, 2]. Важным преимуществом таких электронно-волновых систем является возможность применения каскадов с различными типами энергообмена между электронным потоком и высокочастотными полями, т.е. формирование гибридных электронных приборов [3]. Характеристики гибридных приборов сочетают в себе достоинства различных механизмов преобразования энергии заряженных частиц в высокочастотную энергию, например, высокий КПД резонансных систем с кратковременным взаимодействием и диапазонные свойства нерезонансных систем с длительным взаимодействием.

В диапазоне мм- и субмм- длин волн используются резонансные приборы О-типа с длительным взаимодействием малой и средней мощности – ледатроны, оротроны, генераторы дифракционного излучения (ГДИ) и др. [4–6]. Одним из способов реализации усилителей на основе этих устройств также является каскадное соединение нескольких

однотипных приборов [7–9]. Вместе с тем, низкая эффективность взаимодействия в таких электронно-волновых системах обуславливает необходимость разработки методов улучшения их эксплуатационных характеристик на основе построения адекватных физических и математических моделей. Поскольку в мм-диапазоне важно учитывать неоднородность высокочастотного поля в пределах пучка заряженных частиц, модель электронно-волнового взаимодействия должна быть многомерной. В [10, 11] разработаны основы нелинейной многомерной теории резонансных приборов О-типа, которая позволяет учитывать ряд физических явлений, характерных для реальных систем, в том числе неоднородность пространственного распределения индукции фокусирующего поля. Данная теория может применяться также для исследования планарных электронно-волновых систем мм-диапазона [12, 13], отличающихся высокой технологичностью. Резонансные и нерезонансные планарные приборы позволяют довольно просто формировать гибридные многокаскадные схемы, поскольку в них применяются ленточные электронные потоки.

Наряду с усилением в многокаскадных гибридных электронно-волновых системах возможно умножение частоты исходного сигнала, так как процесс энергообмена в общем случае является нелинейным и сопровождается формированием целого спектра гармонических составляющих высокочастотного тока пучка. Основные закономер-

ности умножения частоты в резонансных приборах с длительным взаимодействием рассмотрены в [14, 15] в рамках одномерного приближения. В связи с этим возникает необходимость анализа процессов на основе многомерной модели, что позволяет учесть дополнительные факторы электронно-волнового взаимодействия, оказывающие воздействие на эффективность умножения частоты в многокаскадном приборе.

В данной работе исследуются различные варианты каскадного соединения электронно-волновых систем с длительным взаимодействием. В разделах 1 и 2 представлена многомерная нелинейная теория и результаты моделирования гибридного многокаскадного усилителя. В качестве резонансных участков пространства взаимодействия используются планарные конструкции. В разделе 3 рассмотрены закономерности умножения частоты в двухкаскадной гибридной системе с резонансным выходным участком пространства взаимодействия и нерезонансным группирователем электронного потока.

### 1. Теория многокаскадного гибридного усилителя

Исследуемая усилительная система состоит из нескольких участков пространства электронно-волнового взаимодействия, которые различаются по типу энергообмена между заряженными частицами и высокочастотными полями (резонансный и нерезонансный). Связь между этими участками осуществляется по высокочастотному полю или по электронному потоку. Возможна также комбинированная связь. Теоретическое исследование такой гибридной системы предполагает одновременное использование двух моделей электронно-волнового взаимодействия, соответствующих различным типам энергообмена между электронами и электромагнитными полями. Решение этой довольно сложной задачи можно упростить, если использовать принцип пространственно-временной аналогии, который позволяет нерезонансным волновым системам поставить в соответствие резонансные колебательные системы [16].

Исследование многокаскадной системы проводится на основе нелинейной многомерной теории, позволяющей учитывать физические механизмы, присущие взаимодействию электронного потока с различными координатными компонентами высокочастотных и статических полей. Самогласованность теории предполагает совмест-

ное решение уравнений движения заряженных частиц под действием высокочастотных и статических полей и уравнений возбуждения электромагнитных полей распределенными источниками в пространстве взаимодействия прибора.

Используемая теория позволяет учитывать явления, обусловленные многомерностью пространства взаимодействия в нерезонансных и резонансных системах: трехмерное движение электронов, высокочастотное расщепление пучка, оседание электронов на поверхность электродинамической системы прибора, взаимодействие электронного потока с поперечными компонентами высокочастотных и статических полей, статические и динамические поперечные смещения траекторий электронов, пространственную неоднородность фокусирующих полей и др.

Основные предположения для построения нелинейной теории многомерной электронно-волновой системы с гибридным пространством взаимодействия соответствуют общим принципам самосогласованной постановки задачи об электронно-волновом взаимодействии в резонансных и нерезонансных колебательных системах [1]. В дальнейшем полагаем, что координатная ось  $Oy$  направлена вдоль движения электронного потока, ось  $Oz$  — перпендикулярно плоскости замедляющей системы. Компоненты вектора напряженности электрического поля синхронной с электронным потоком волны представим следующим образом:

$$E_y = C f(y) \Psi_{\parallel}(z) \exp[i(\beta y - \omega t)],$$

$$E_z = i \frac{\Psi_{\perp}(z)}{\Psi_{\parallel}(z)} E_y.$$

Здесь  $C$  — амплитуда;  $f(y)$  — функция, описывающая продольное распределение амплитуды поля;  $\Psi_{\parallel}(z)$  и  $\Psi_{\perp}(z)$  — поперечные амплитудные распределения координатных компонент высокочастотного электрического поля;  $\beta = \omega/v$ ;  $\omega$  — циклическая частота;  $v$  — фазовая скорость замедленной волны, синхронной с электронным потоком;  $t$  — время.

Уравнения движения электронов (безотносительно к типу электронно-волнового взаимодействия) с учетом поля пространственного заряда и магнитоэлектрического фокусирующего поля, в общем случае пространственно-неоднородного, представим следующим образом:

$$\frac{d\eta_{\parallel}(\xi)}{d\xi} = -\operatorname{Re}\left[\hat{F}(\xi)\Psi_{\parallel}(Z)\exp(i\alpha) + E_{q\parallel} - 2\Omega_c^2 B_{\perp}(\xi, Z)v_{\chi}\right], \quad (1)$$

$$\frac{d\eta_{\perp}(\xi)}{d\xi} = \operatorname{Re}\left[i\hat{F}(\xi)\Psi_{\perp}(Z)\exp(i\alpha) + E_{q\perp} - 2\Omega_c^2 B_{\parallel}(\xi, Z)v_{\chi}\right], \quad (2)$$

$$E_{q\parallel} = -i\frac{2q^2}{\pi\Phi} \int_0^{2\pi} \exp(i(\theta + \varphi)) d\varphi \exp(-i(\theta + \varphi_0)),$$

$$v_{\chi} = \frac{2}{\Phi} \int_{Z_0}^Z B_{\parallel}(\xi, Z') dZ' - \int_0^{\xi} B_{\perp}(\xi', Z) d\xi',$$

$$\alpha = \theta + \Delta v\xi + \varphi_0, \quad E_{q\perp} = 2\Omega_q^2(Z - Z_b),$$

$$\hat{F}(\xi) = F(\xi)\exp(-i\gamma),$$

где  $\eta_{\parallel}(\xi) = \frac{v_{\parallel}^2}{v_0^2}$ ;  $\eta_{\perp}(\xi) = \frac{v_{\perp}^2}{v_0^2}$ ;  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$  – продольная и поперечная скорости электрона;  $v_0$  – начальная продольная скорость электронов на входе в пространство взаимодействия;  $\theta = \omega t - \Phi\xi - \varphi_0$ ;

$\Phi = \frac{\omega L}{v_0}$  – статический угол пролета электроном

пространства взаимодействия длины  $L$ ;  $\xi = \frac{y}{L}$  и

$Z = \frac{z}{H}$  – нормированные на соответствующий масштаб продольная и поперечная координаты;  $F$  и  $\gamma$  – амплитуда и фаза высокочастотного поля;

$\Delta v = \left(1 - \frac{v_0}{v}\right)\Phi$ ;  $E_{q\parallel}$  и  $E_{q\perp}$  – динамическая продольная и статическая поперечная компоненты поля пространственного заряда;  $\Omega_c = \Phi \frac{\omega_c}{\omega}$ ;

$\Omega_q = \Phi \frac{\omega_q}{\omega}$ ;  $\omega_c = \frac{e}{m}B_0$  – циклотронная частота;  $\omega_q$  – плазменная частота электронного потока;  $q$  – параметр пространственного заряда [17];  $Z_b$  – поперечная координата центра электронного потока;  $e$  и  $m$  – заряд и масса покоя электрона;  $B_0$  – постоянная составляющая индукции фокусирующего поля;  $B_{\parallel}$  и  $B_{\perp}$  – нормированные на  $B_0$  продольная и поперечная компоненты вектора индукции магнитостатического поля.

В резонансном приборе продольная амплитудная огибающая высокочастотного поля  $f(\xi)$  фиксирована и определяется характеристиками электродинамической системы. В этом случае координатную зависимость амплитуды колебаний можно представить в виде  $F(\xi) = Ff(\xi)$ , где  $F$  – медленно меняющаяся амплитуда, которую можно считать фиксированной в масштабе времени пролета электрона через пространство взаимодействия. В нерезонансном приборе распределение высокочастотного поля  $F(\xi)$  формируется самосогласованным образом в процессе электронно-волнового взаимодействия.

Компоненты  $B_{\parallel}$  и  $B_{\perp}$  в общем случае являются функциями координат. Эти функции связаны через условие соленоидальности  $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$  и характеризуют пространственное распределение силовых линий неоднородного фокусирующего поля в пространстве взаимодействия. В частном случае однородного наклонного магнитостатического поля можно использовать следующее представление:

$$B_{\parallel} = \cos \chi, \quad B_{\perp} = \sin \chi, \quad (3)$$

где  $\chi$  – угол наклона относительно продольной координатной оси  $Oy$ .

В случае локализованной неоднородности фокусирующего магнитного поля компоненты  $B_{\parallel}$  и  $B_{\perp}$  можно представить в виде [11]

$$B_{\parallel} = 1 + A_m \exp\left\{-\left[\frac{\xi - \xi_m}{w_m}\right]^2\right\}, \quad (4)$$

$$B_{\perp} = \frac{4A_m}{\Phi w_m^2}(\xi - \xi_m)(Z - Z_m) \exp\left\{-\left[\frac{\xi - \xi_m}{w_m}\right]^2\right\}, \quad (5)$$

где  $A_m$ ,  $\xi_m$ ,  $w_m$  и  $Z_m$  – параметры, характеризующие пространственное распределение магнитостатического поля в продольном и поперечном направлении.

Уравнения движения (1) и (2) решаются при определенных начальных условиях для неизвестных величин. Если на вход исследуемого участка гибридной электронно-волновой системы поступает немодулированный электронный поток, то используются нулевые начальные условия, соответствующие режиму генерации. Предварительная модуляция пучка по скорости или по плотности порождает ненулевые начальные условия, характерные для неавтономных усилительных систем.

Следует отметить, что в рамках модели многокаскадной электронно-волновой системы начальные условия не только задаются заранее, но и определяются в процессе решения самосогласованной системы уравнений для промежуточных участков пространства взаимодействия. Поэтому в рассматриваемой системе не накладываются условия на уровень мощности сигнала, поступающего на вход какого-либо каскада. Такая постановка задачи позволяет значительно расширить круг исследуемых физических явлений, в том числе и нелинейных.

Уравнения возбуждения также необходимо сформулировать для двух видов электронно-волнового взаимодействия – резонансного и нерезонансного. В общем случае возбуждение колебаний в резонансных приборах можно анализировать с помощью уравнения

$$\left[ \frac{d}{d\tau} + 1 - i\Delta\omega - GS(F, \gamma) \exp(i\gamma) \right] \times F \exp(-i\gamma) = a \exp(i\varphi), \quad (6)$$

где  $\tau = \frac{\omega_r}{2Q} t$ ;  $Q$  – нагруженная добротность резонатора;  $\omega_r$  – собственная частота колебаний в резонаторе;  $a$  и  $\varphi$  – амплитуда и фаза внешнего сигнала, который подается непосредственно в резонатор;  $G = \frac{2QL^2 I_0}{\omega_r N U_0}$  – параметр эффективности

взаимодействия [17];  $\omega_r'$  – действительная часть комплексной резонансной частоты выходного каскада;  $I_0$  – постоянная составляющая тока пучка;  $U_0$  – ускоряющее электроны напряжение;

$\Delta\omega = 2Q \frac{\omega - \omega_r'}{\omega_r'}$ ;  $S(F, \gamma)$  – средняя комплексная крутизна колебательной характеристики, которая в рамках двумерной модели пространства взаимодействия представляется следующим образом [11]:

$$S(F, \gamma) = \frac{1}{2\pi F \delta} \int_0^1 f(\xi) \int_{z_1}^{z_2} \Psi(Z) \int_0^{2\pi} \left( 1 - i \frac{2 dZ}{\Phi d\xi} \right) \times \exp(i\alpha d\varphi_0 dZ_0 d\xi), \quad (7)$$

где  $\delta$  – безразмерная толщина электронного потока;  $z_{1,2}$  – пределы интегрирования по толщине пучка в начале пространства взаимодействия.

Анализ устойчивости стационарных решений уравнения (6) в рамках исследуемой модели проводится на основе критерия Рауса–Гурвица [18]:

$$G \left[ \frac{\partial S_2}{\partial \gamma} - \frac{\partial S_1}{\partial F} \right] > GS_1 - 1, \\ GF \left[ \frac{\partial S_1}{\partial \gamma} \frac{\partial S_2}{\partial F} - \frac{\partial S_1}{\partial F} \frac{\partial S_2}{\partial \gamma} \right] > (GS_1 - 1) \frac{\partial S_2}{\partial \gamma}, \quad (8)$$

где  $S_1$  и  $S_2$  – действительная и мнимая части средней комплексной крутизны колебательной характеристики.

Уравнение возбуждения для нерезонансной электронно-волновой системы в случае, когда фаза высокочастотного поля  $\gamma$  не содержит параметр относительного рассинхронизма  $\Delta\nu$ , можно записать в виде

$$\left[ \frac{d}{d\xi} + b + i\Delta\nu - R\hat{S}(\xi) \exp(i\gamma) \right] F(\xi) \exp(-i\gamma) = 0, \quad (9)$$

где  $b$  – параметр затухания;  $R$  – параметр эффективности взаимодействия для нерезонансного прибора, имеющий тот же смысл, что и параметр Пирса в ЛБВ;  $\hat{S}(\xi)$  – функция, которую по аналогии с резонансной системой можно назвать комплексной дифференциальной крутизной:

$$\hat{S}(\xi) = \frac{1}{\pi F \delta} \int_0^{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} \left[ \Psi_{||}(Z) - i \frac{2 dZ}{\Phi d\xi} \Psi_{\perp}(Z) \right] \times \exp[i(\theta + \varphi_0)] dZ_0 d\varphi_0. \quad (10)$$

Из выражений (7) и (10) следует, что среднюю комплексную крутизну колебательной характеристики можно получить из  $\hat{S}(\xi)$  посредством интегрирования по продольной координате с комплексной весовой функцией

$$S(F, \gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 f(\xi) \hat{S}(\xi) \exp(i\Delta\nu) d\xi. \quad (11)$$

Следует отметить, что вывод уравнений возбуждения осуществляется в предположении, что колебания в электродинамической системе порождаются полным током электронного пучка, который является суперпозицией вихревой и потенциальной составляющих (поскольку используется закон сохранения заряда). Однако вихревое высокочастотное поле в системе могут порождать только вихревые токи. Следовательно, в общем случае уравнения возбуждения следует записывать только с учетом вихревых компонент тока пучка [19], что

приводит к появлению в уравнениях дополнительных слагаемых, связанному с потенциальными компонентами тока. Однако, если в уравнениях движения ограничиться рассмотрением только статических компонент поля пространственного заряда, то записи уравнений возбуждения относительно полного тока и вихревого тока совпадают.

Запись уравнений возбуждения (6) и (9) позволяет провести пространственно-временную аналогию между резонансными и нерезонансными участками пространства взаимодействия. Условие усиления в нерезонансной системе  $R\hat{S} > b$  соответствует условию самовозбуждения колебаний в резонансной системе  $GS > 1$ . Развитие колебательного процесса в одном случае происходит в пространстве (относительно продольной координаты  $\xi$ ), а в другом – во времени («медленное» время  $\tau$ ). Относительная расстройка частот  $\Delta\omega$  входит в уравнение (6) аналогично тому, как в уравнение (9) входит относительная расстройка скоростей  $\Delta v$ .

Таким образом, анализ физических процессов в гибридной электронно-волновой системе можно проводить с единых позиций для участков пространства взаимодействия с различными типами энергообмена между электронным потоком и высокочастотным полем. Более того, отмеченная аналогия позволяет выявлять новые закономерности процесса электронно-волнового взаимодействия определенного типа на основе анализа закономерностей, присущих другому типу взаимодействия.

Рассмотренная теоретическая модель позволяет наглядно и сравнительно просто проводить численное исследование сложных физических процессов в гибридных приборах, используя для каскадов различных типов одинаковые процедуры расчета интегральных характеристик.

## 2. Анализ результатов

В рамках используемой модели гибридной электронно-волновой системы взаимное расположение участков пространства взаимодействия с различным типом энергообмена может быть произвольным. Рассмотрим сначала случай двухкаскадной системы с нерезонансным модулятором электронного потока и резонансным выходным каскадом. В модуляторе осуществляется предварительное усиление входного сигнала, и на вход резонансного участка пространства взаимодействия поступает электронный поток, модулированный по скорости и плотности. Амплитудные огибающие высоко-

частотного поля на нерезонансном участке пространства взаимодействия усилителя представим в виде [20]

$$\Psi_{\parallel}(z) = \frac{\text{sh} \left[ \left( 2 - \frac{\Delta v}{\Phi} \right) (D - Z) \right]}{\text{sh} \left[ \left( 2 - \frac{\Delta v}{\Phi} \right) D \right]},$$

$$\Psi_{\perp}(z) = \frac{\text{ch} \left[ \left( 2 - \frac{\Delta v}{\Phi} \right) (D - Z) \right]}{\text{sh} \left[ \left( 2 - \frac{\Delta v}{\Phi} \right) D \right]}, \quad (12)$$

где  $D$  – поперечный размер пространства взаимодействия.

Поперечная амплитудная огибающая высокочастотного поля в выходном усилительном каскаде определяется конфигурацией резонансной электродинамической системы. Для открытого резонатора, используемого в приборах оротронного типа, можно использовать гауссовскую форму функции  $f(\xi)$ :

$$f(\xi) = \left( w \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^{-1/2} \exp \left[ - \left( \frac{\xi - 0,5}{w} \right)^2 \right], \quad (13)$$

где  $w$  – радиус «пятна» гауссиана на нижнем зеркале резонатора. Поперечное распределение высокочастотного поля характеризуется экспоненциальным уменьшением амплитуды при удалении от поверхности замедляющей системы.

Основные характеристики резонансного участка пространства взаимодействия (безразмерный пусковой ток  $G_{st}$ , электронный КПД  $\eta$ , электронное смещение частоты  $\Delta\omega$ ) определяются через компоненты средней комплексной крутизны колебательной характеристики  $S(F, \gamma)$ :

$$G_{st} = S_1(0, \gamma)^{-1}, \quad \eta = F^2 S_1(F, \gamma),$$

$$\Delta\omega = -GS_2(F, \gamma). \quad (14)$$

Поскольку в данном случае выходной каскад представляет собой неавтономную колебательную систему с параметрическим внешним воздействием (полагаем, что силовое воздействие отсутствует, т. е.  $a = 0$ ), функция  $S(F, \gamma)$  зависит от параметров не только резонансного участка пространства взаимодействия, но и модулирующего нерезонансного участка.

На рис. 1 представлены зависимости средней крутизны амплитудной колебательной характеристики  $S_1(F, \gamma)$  от амплитуды стационарных коле-

баний  $F$  для различных значений мощности входного сигнала  $P_0$ , пространственного рассинхронизма  $\Delta\nu$  и фазы колебаний  $\gamma$ . Пунктирными кривыми обозначены зависимости в случае автономного генератора. Графики на рис. 1, а и б построены для случая мягкого режима возбуждения колебаний ( $\Delta\nu = -\pi$ ) и значений мощности  $P_0$  входного сигнала  $-60$  и  $-34$  дБ соответственно. На рис. 1, в и г графики соответствуют жесткому режиму возбуждения колебаний ( $\Delta\nu = -3\pi$ ) для таких же уровней входной мощности.

Наиболее существенное влияние внешнего сигнала на среднюю крутизну амплитудной колебательной характеристики наблюдается для сравнительно малых значений стационарной амплитуды колебаний  $F$ . В этом случае закономерности группирования электронного потока в значительной мере определяются характеристиками модулятора. С увеличением амплитуды колебаний интенсивность энергообмена в выходном каскаде нарастает и определяющим фактором фазировки элек-

тронов становится высокочастотное поле резонансной колебательной системы, структура которого практически одинакова для автономного и неавтономного режимов. Следует отметить также возможность качественного изменения зависимостей  $S_1(F)$  за счет варьирования фазы колебаний  $\gamma$ , причем этот эффект проявляется сильнее с увеличением мощности входного сигнала  $P_0$  (рис. 1, б, г).

На рис. 2 представлены результаты решения уравнения возбуждения (6) в стационарном случае ( $dI/dt = 0$ ) для жесткого режима возбуждения колебаний. Кривые на рис. 2 характеризуют значения амплитуды и фазы колебаний на резонансном участке пространства взаимодействия для различных значений величины, обратной параметру эффективности взаимодействия,  $G$ . В отличие от автономного генератора, где изменение фазы колебаний  $\gamma$  приводит лишь к смещению интервала интегрирования по начальной фазе, здесь значение  $\gamma$  оказывает существенное влияние на закономерности энергообмена. В частности, для различных на-

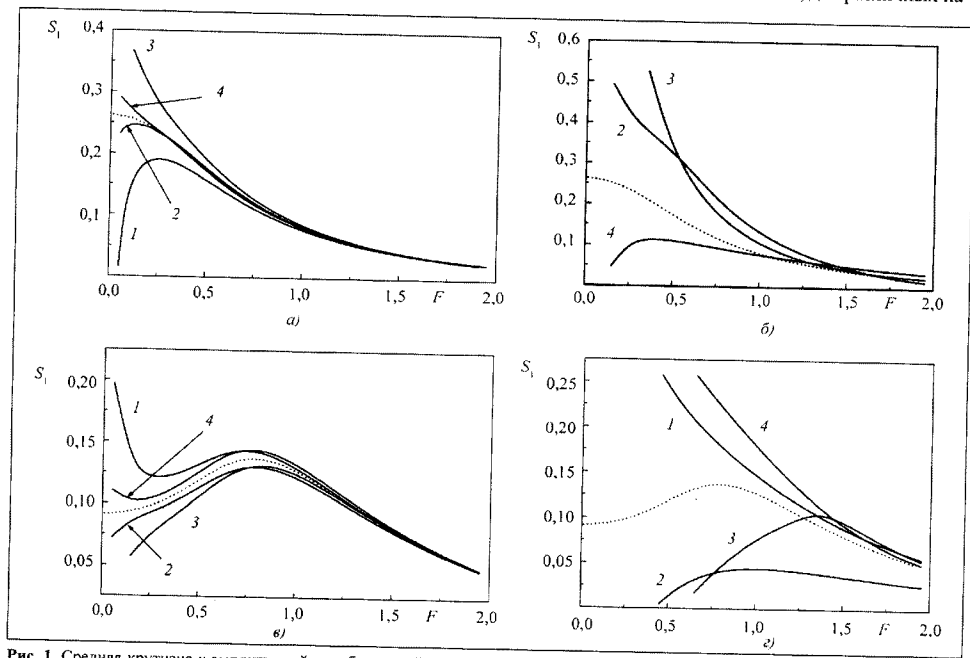


Рис. 1. Средняя крутизна у амплитудной колебательной характеристики для различных значений параметров гибридной системы: 1 - 0; 2 -  $0,5\pi$ ; 3 -  $\pi$ ; 4 -  $1,5\pi$

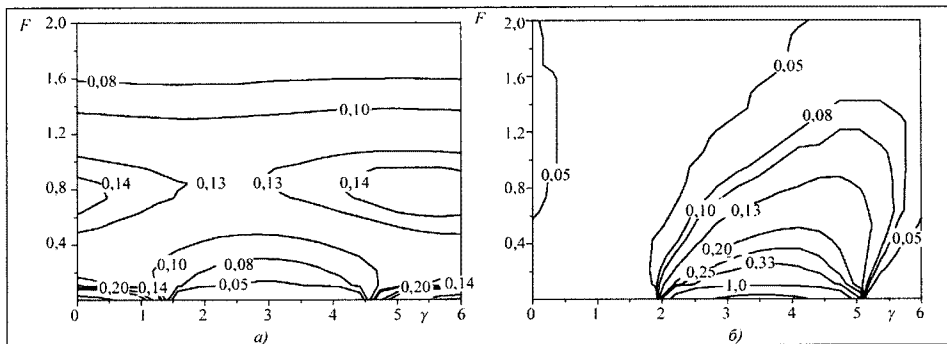


Рис. 2. Стационарные значения амплитуды и фазы колебаний ( $\Delta\nu = -3\pi$ ): а -  $P_0 = -60$  дБ; б -  $P_0 = -25$  дБ

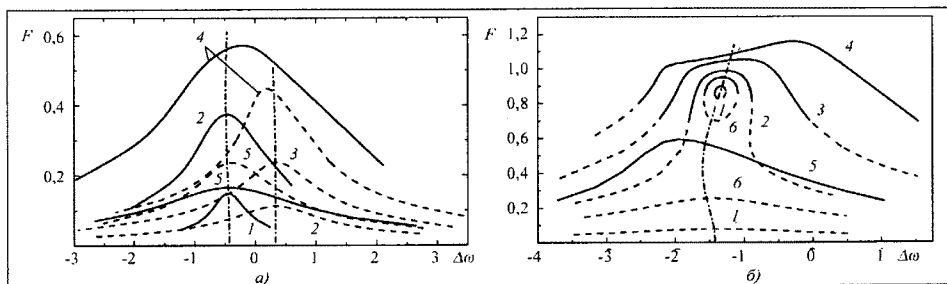


Рис. 3. Резонансные характеристики выходного каскада для различных значений мощности внешнего воздействия: 1 -  $P_0 = -60$  дБ; 2 - (-45); 3 - (-40); 4 - (-35); 5 - (-25); 6 - (-50)

боров независимых параметров электронно-волновой системы можно определить области значений фазы, где выходной сигнал или отсутствует, или наблюдается неоднозначность в определении его амплитуды. Результаты, представленные на рис. 2, являются исходными для расчета резонансных характеристик неавтономной колебательной системы, которые представлены на рис. 3 для различных значений мощности входного сигнала. Графики на рис. 3,а построены для режима усиления, на рис. 3,б - для режима синхронизации. Штриховые кривые на рис. 3,а соответствуют жесткому режиму возбуждения колебаний, сплошные кривые - мягкому. Штрих-пунктиром показаны кривые точного резонанса или скелетные кривые, которые соответствуют автономной колебательной системе [21]. На рис. 3,б сплошными кривыми показаны устойчивые по критерию (8) стационарные значения амплитуды колебаний, штриховыми - неустойчивые.

В зависимости от режима возбуждения колебаний наблюдаются различные закономерности

воздействия входных сигналов различной мощности на избирательность резонансной системы. В случае мягкого режима реализуется характерная для неавтономных колебательных систем ситуация, когда увеличение мощности внешнего сигнала приводит к ухудшению частотно-избирательных свойств - максимум резонансной кривой становится более пологим (рис. 3,а). В жестком режиме возбуждения наибольшая избирательность наблюдается для входного сигнала довольно большой мощности, соответствующей максимальной мощности выходного сигнала.

Следует отметить, что увеличение  $P_0$  сопровождается смещением максимума резонансных характеристик от скелетной кривой. Этот эффект обусловлен изменением зависимостей средней крутизны комплексной колебательной характеристики от амплитуды и фазы колебаний за счет внешнего сигнала, поступающего на вход каскада. Фактически происходит изменение реактивности, вносимой электронным потоком в резонансную колебательную систему.

Подобное явление наблюдается в режиме синхронизации (рис. 3,б), причем даже для сравнительно малой мощности внешнего сигнала ( $P_0 = -45$  дБ) нарушается симметрия резонансной характеристики относительно скелетной кривой. Кроме того, увеличение  $P_0$  приводит к расширению полосы синхронизации, причем для  $P_0 = -25$  дБ устойчивыми оказываются колебания для всех значений  $\Delta\omega$  (как и при режиме усиления). Данный эффект обусловлен повышением пускового тока колебательной системы за счет изменения средней крутизны амплитудной колебательной характеристики (см. рис. 1). Следовательно, в этом случае происходит уменьшение отношения рабочего тока к пусковому и переход от режима синхронизации к режиму усиления.

Рассмотрим схему многокаскадного усилителя, в которой выходной участок пространства взаимодействия является нерезонансным. Если в качестве модулятора используется также нерезонансная электронно-волновая система, то исследуемый усилитель представляет собой аналог секционированной ЛБВ и для его анализа достаточно использовать только модель нерезонансного энергообмена между потоком заряженных частиц и высокочастотными полями (уравнения (1), (2), (9)). Если модулятор имеет резонансную электродинамическую систему и входной сигнал подается непосредственно в пространство взаимодействия, то его математическая модель описывается уравнениями (1), (2), (6).

На рис. 4 представлены пространственные распределения текущего значения коэффициента усиления  $K$  на выходном нерезонансном участке пространства взаимодействия для различных значений мощности входного сигнала  $P_0$  и параметра пространственного рассинхронизма  $\Delta v$  в модулирующей резонансной секции прибора. Коэффициент усиления измеряется в децибелах. Сплошные кривые построены для случая, когда параметр  $\Delta v = -\pi$  не изменяется вдоль пространства взаимодействия прибора. Штриховые кривые соответствуют случаю, когда в модуляторе параметр пространственного рассинхронизма составляет  $\Delta v_m = -2\pi$ .

Очевидно, что изменение условий группирования электронного потока в модуляторе сопровождается незначительными искажениями распределения коэффициента усиления в выходном каскаде. Следовательно, в данном случае закономерности энергообмена в выходном нерезонансном каскаде определяются преимущественно параметрами именно этого участка пространства взаимо-

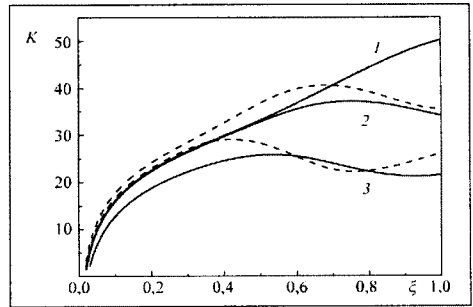


Рис. 4. Зависимости коэффициента усиления от продольной координаты ( $\omega_c/\omega = 0,8$ ,  $\Delta v = -\pi$ ): 1 —  $P_0 = -40$  дБ; 2 — (-25); 3 — (-20)

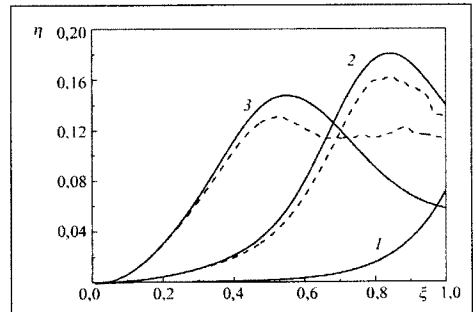


Рис. 5. Зависимости электронного КПД от продольной координаты ( $\Delta v = -2\pi$ ): 1 —  $P_0 = -40$  дБ; 2 — (-25); 3 — (-20)

действия. Следует отметить, что графики на рис. 4 построены для случая жесткой фокусировки ( $\omega_c/\omega = 0,8$ ), когда интенсивность взаимодействия электронного потока с поперечными компонентами высокочастотных полей невелика.

На рис. 5 представлены зависимости текущего значения электронного КПД от продольной координаты в выходном каскаде усилителя для различных значений индукции фокусирующего магнитного поля и мощности входного сигнала. Сплошные кривые соответствуют значению  $\omega_c/\omega = 0,8$ , штриховые —  $\omega_c/\omega = 0,2$ .

В режиме более жесткой фокусировки закономерности влияния величины мощности входного сигнала на характеристики усилителя качественно согласуются с соответствующими результатами нелинейной теории ЛБВ [1, 2]. Уменьшение индукции фокусирующего поля сопровождается возрастанием роли двумерных эффектов таких,

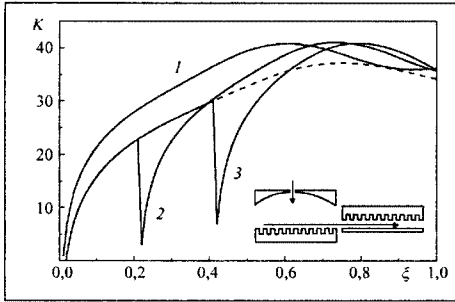


Рис. 6. Зависимости коэффициента усиления от продольной координаты ( $P_0 = -25$  дБ,  $\Delta v = -\pi$ ): 1 –  $\xi = 0$ ; 2 – 0,2; 3 – 0,4

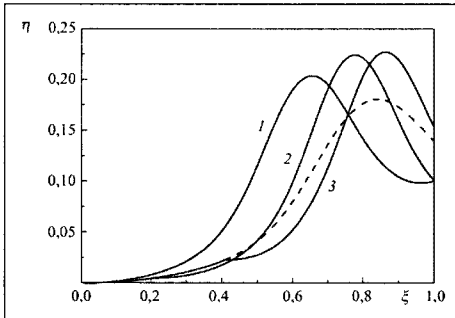


Рис. 7. Зависимости электронного КПД от продольной координаты ( $P_0 = -25$  дБ;  $\Delta v = -2\pi$ ): 1 –  $\xi = 0$ ; 2 – 0,2; 3 – 0,4

как высокочастотное расслоение электронного потока, оседание части пучка на замедляющую систему, взаимодействие электронов с поперечными компонентами высокочастотных полей и др. Эти эффекты учитываются в исследуемой модели. Из графиков видно, что в данном случае воздействие этих факторов на закономерности энергообмена проявляется преимущественно в случае более мощного входного сигнала ( $P_0 = -20$  дБ), где наблюдается существенное изменение зависимости электронного КПД от продольной координаты. В конце пространства взаимодействия эффективность энергообмена заметно увеличивается, т. е. фазовая расфокусировка электронных сгустков в продольном высокочастотном поле компенсируется взаимодействием заряженных частиц с поперечными компонентами полей.

Дополнительные возможности для управления характеристиками многокаскадной усиленной системы обеспечиваются секционирова-

нием выходного нерезонансного участка пространства взаимодействия. Кроме того, изменение расположения импедансной поверхности в секциях выходного каскада позволяет частично компенсировать высокочастотное расслоение электронного потока и тем самым повысить эффективность взаимодействия. Этот эффект иллюстрируется графиками на рис. 6 и 7, где представлены зависимости коэффициента усиления и электронного КПД от продольной координаты для различных значений длины первой секции  $\xi$  выходного участка пространства взаимодействия. После разрыва импедансная поверхность располагается на противоположной стенке планарной структуры, что позволяет изменить поперечное распределение высокочастотного электрического поля в пределах электронного потока. Штриховые кривые на рис. 6 и 7 соответствуют обычной конструкции выходного каскада (без разрывов). Следует отметить случай  $\xi = 0$ , когда разрыв в выходном каскаде отсутствует, но его замедляющая система располагается на противоположной стороне планарной структуры (рис. 6). Максимальные значения коэффициента усиления и электронного КПД такой системы не превышают соответствующие значения для секционированной нерезонансной системы, но достигаются на меньшей длине пространства взаимодействия. Следовательно, в данном случае оптимальная длина прибора сокращается.

### 3. Умножение частоты в гибридной двухкаскадной электронно-волновой системе

Структура умножителя частоты предусматривает наличие модулятора электронного потока сигналом исходной частоты и выходного каскада, где осуществляется избирательное усиление сигнала с определенным коэффициентом умножения частоты. Тип электронно-волнового взаимодействия в различных каскадах умножителя не играет принципиальной роли – они могут быть как резонансными, так и нерезонансными.

Рассмотрим схему двухкаскадного умножителя частоты (рис. 8). Модулятор представляет собой нерезонансную планарную электронно-волновую систему. Выходной каскад – резонансный (резонатор объемный или открытый).

Сигнал исходной частоты  $\omega$  поступает на модулирующий участок пространства взаимодействия и усиливается на нем. Затем промодулированный электронный поток, богатый гармоническими составляющими, поступает на вход резонансного участка пространства взаимодействия. Здесь осуществляется возбуждение колебаний на

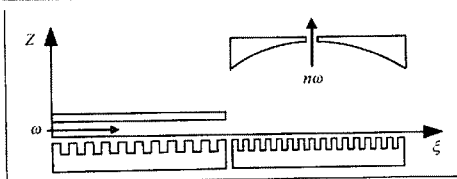


Рис.8. Схема умножителя частоты

одной из гармоник исходной частоты (для выходного каскада эта гармоника является первой).

Предполагается, что в модуляторе взаимодействие осуществляется только на частоте входного сигнала, т. е. поля высших гармоник либо не возбуждаются либо их взаимодействие с электронным потоком достаточно слабое. С одной стороны, это может быть обусловлено уменьшением сопротивления связи на высших гармониках, а с другой, – дисперсионными свойствами электродинамической системы. Однако в пучке присутствуют компоненты высокочастотного тока на всех гармониках основной частоты. Кроме того, модулятор может быть секционированным для исключения паразитных обратных связей.

На уровень мощности сигнала на различных участках пространства взаимодействия системы не накладываются ограничения, т. е. в общем случае реализуется нелинейный режим энергообмена между электронным потоком и высокочастотными полями. Теоретическое исследование гибридного умножителя частоты проводится на основе одновременного применения двух разных подходов с использованием нелинейных теорий для многомерного электронно-волнового взаимодействия в нерезонансных и резонансных системах О-типа.

В модуляторе взаимодействие может осуществляться как на прямой, так и на обратной поверхности волне (режимы ЛБВ и ЛОВ). Математические модели для этих случаев различаются значительно, поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением взаимодействия на прямой волне. Далее для расчета модулятора используется самосогласованная система уравнений нерезонансного каскада (1), (2), (9). Следует отметить, что в случае использования в качестве модулятора резонансного прибора с длительным взаимодействием необходимо учитывать возможность подачи входного сигнала как за счет предварительной модуляции электронного потока, так и непосредственно в пространство взаимодействия. Таким образом, внешнее воздействие на колебательную систему модулятора оказывается параметрическим или силовым.

Выходной резонансный участок пространства взаимодействия находится под действием модулированного электронного потока и представляет собой колебательную систему с параметрическим воздействием. Предположим, что резонатор настроен на частоту  $n$ -й гармоники входного сигнала. Запишем самосогласованную систему уравнений, описывающую нелинейное электронно-волновое взаимодействие на частоте  $n\omega$  в резонансной системе О-типа. Уравнения возбуждения для выходного каскада можно представить следующим образом:

$$\frac{dF}{dt} + F(1 - GS_1(F, \gamma)) = 0, \quad \frac{d\gamma}{dt} + \Delta\omega + GS_2(F, \gamma) = 0. \quad (15)$$

Уравнения движения электрона в резонансной электронно-волновой системе умножителя частоты запишем в виде (1, 2)

$$\frac{d\eta_{\parallel}(\xi)}{d\xi} = -[Ff(\xi)\Psi(Z)\cos(n\alpha + \gamma) + E_{\text{eff}} - 2\Omega_{\perp}^2 B_{\perp}(\xi, Z)V_X], \quad (16)$$

$$\frac{d\eta_{\perp}(\xi)}{d\xi} = -[Ff(\xi)\Psi(Z)\sin(n\alpha + \gamma) - E_{\perp} + 2\Omega_{\perp}^2 B_{\parallel}(\xi, Z)V_X], \quad (17)$$

где  $E_{\text{eff}} = -\frac{2q^2}{\pi\Phi} \int_0^{2\pi} \exp(in(\theta + \varphi)) d\varphi \exp(-in(\theta + \varphi_0))$ .

Средняя комплексная крутизна колебательной характеристики в данном случае представляется в виде (7)

$$S(F, \gamma) = \frac{1}{2\pi F \delta} \int_0^1 f(\xi) \int_{z_1}^{z_2} \Psi(Z) \int_0^{2\pi} \left(1 - i \frac{2}{\Phi} \frac{dZ}{d\xi}\right) \times \exp[i(n\alpha + \gamma)] d\varphi_0 dZ d\xi. \quad (18)$$

Самосогласованная система уравнений должна быть дополнена начальными условиями, характеризующими режим работы соответствующего участка пространства взаимодействия. Кроме того, для нерезонансного каскада необходимо задать амплитуду входного сигнала (или мощность). Из теории ЛБВ известно, что воздействие этого параметра на характеристики энергообмена непосредственно связано с длиной пространства взаимодействия [2]. Это необходимо учитывать при формулировке начальных условий для модулирующего участка умножителя частоты.

Начальные условия для резонансного участка прибора заранее неизвестны. Они определяются в процессе решения задачи об электронно-волновом

взаимодействии на нерезонансном участке. Если входная мощность достаточно низкая для того, чтобы воспользоваться приближением слабого сигнала при анализе модуляции электронного потока, то можно получить начальные условия для выходного каскада в аналитическом виде. В данной работе основное внимание уделяется нелинейному режиму работы модулятора, поэтому расчеты проводились численно.

Следует отметить, что в рассматриваемой модели учитывается возможность обеспечения различных значений относительного рассинхронизма скоростей электронов и замедленной волны на разных участках пространства взаимодействия. При этом параметры замедляющей системы выходного каскада изменяются при расчетах в соответствии с изменением коэффициента умножения частоты  $n$ .

Одним из определяющих факторов снижения эффективности взаимодействия на более высоких частотах является уменьшение сопротивления связи. Повышение частоты сопровождается увеличением декремента затухания в экспоненциальной зависимости амплитуды высокочастотного поля от поперечной координаты. Как следствие, интенсивность поля в пределах электронного потока снижается, и эффективность взаимодействия падает. Одним из способов компенсации этого нежелательного эффекта является уменьшение прицельного расстояния (расстояния между замедляющей системой и ленточным электронным потоком на входе в пространство взаимодействия). Однако практическая реализация этого способа – довольно сложная задача. В данной работе при увеличении коэффициента умножения параметры электронно-оптической системы прибора не изменяются, т.е. расстояние между плоскостью замедляющей системы и электронным потоком фиксировано. Такой подход позволяет учесть, с одной стороны, снижение сопротивления связи при увеличении коэффициента умножения, а с другой, – ряд эффектов, обусловленных многомерностью пространства взаимодействия. В первую очередь это высокочастотное расслоение электронного потока и динамические поперечные смещения электронов под действием высокочастотного поля.

Рассмотрим результаты численного моделирования процесса умножения частоты в двухкаскадной гибридной схеме. Расчеты проводились для значения нормированной циклотронной частоты  $\omega_c/\omega = 0,8$ , соответствующего режиму жесткой фокусировки потока заряженных частиц. В этом случае из рассмотрения исключается процесс оседания электронов на поверхность замедляющей системы, что позволяет проанализировать закономерности

воздействия высокочастотного расслоения пучка на эффективность умножения частоты.

На рис. 9 представлены результаты расчетов средней крутизны амплитудной колебательной характеристики  $S_1(F, \gamma)$  для различных значений мощности входного сигнала и коэффициента умножения частоты  $n$ .

Поскольку колебательная система выходного каскада является неавтономной, то в данном случае комплексная крутизна колебательной характеристики является функцией не только амплитуды колебаний, но и фазы. Расчеты для каждого значения  $n$  проводились при фиксированном значении фазы колебаний  $\gamma$ , соответствующем максимальной выходной мощности. В случае  $n=1$  оптимальные значения фазы одинаковы для различных значений мощности входного сигнала и примерно равны  $\pi$ . Аналогичный результат известен из теории ЛБВ, возбуждаемой предельно модулированным электронным потоком [2]. Такое значение  $\gamma$  (отсчитываемое от фазы входного сигнала) соответствует возбуждению противофазного поля, отбирающего энергию у потока заряженных частиц. Увеличение коэффициента умножения для  $P_0 = -25$  дБ сопровождается изменением оптимального значения  $\gamma$  (рис. 9,а). По оси абсцисс здесь отложен коэффициент умножения  $n$ , по оси ординат – фаза выходного сигнала. Изменение оптимального значения фазы выходного сигнала для различных значений  $n$  свидетельствует о том, что для данного уровня входной мощности процесс энергообмена в модуляторе является нелинейным и для теоретического анализа нельзя ограничиваться приближением слабого сигнала. Для  $P_0 = -60$  дБ в случае  $n > 1$  все фазы являются равнозначными, поскольку уровень модуляции пучка на входе резонансного участка пространства взаимодействия довольно низкий. Следовательно, закономерности энергообмена здесь практически такие же, как в автогенераторе.

Из графиков рис. 9 видно, что увеличение коэффициента умножения частоты  $n$  приводит к снижению средней крутизны амплитудной колебательной характеристики практически во всем рассмотренном диапазоне значений амплитуды возбуждаемых колебаний  $F$ . В первую очередь это явление обусловлено уменьшением сопротивления связи электронного потока с ростом частоты колебаний на резонансном участке пространства взаимодействия.

На рис. 10 представлены резонансные характеристики для различных уровней мощности вход-

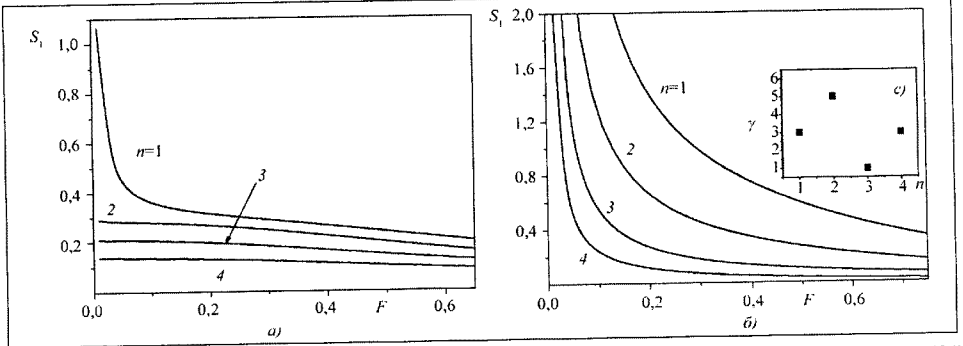


Рис. 9. Средняя крутизна амплитудной колебательной характеристики для различных значений мощности входного сигнала и коэффициента умножения частоты ( $\Delta\nu = -\pi$ ): а -  $P_0 = -60$  дБ; б -  $(-25)$

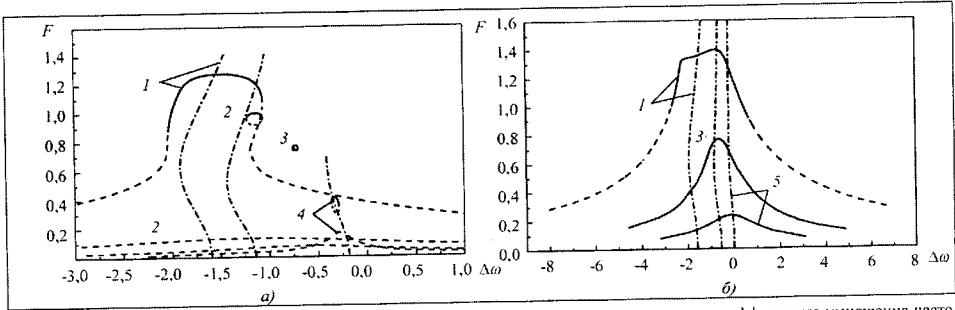


Рис. 10. Резонансные характеристики для различных значений мощности входного сигнала и коэффициента умножения частоты: ( $\omega_0/\omega = 0,8$ ;  $\Delta\nu = -\pi$ ): а -  $P_0 = -40$  дБ; б -  $(-20)$

ного сигнала и фиксированного значения рабочего тока пучка. Штриховые кривые соответствуют неустойчивым значениям амплитуды колебаний, сплошные – устойчивым. Штрих-пунктиром обозначены кривые точного резонанса, соответствующие автономному режиму работы выходного каскада умножителя. Номера на кривых соответствуют коэффициенту умножения частоты.

Увеличение мощности входного сигнала приводит к существенному изменению вида резонансных характеристик. Для сравнительно небольшой входной мощности ( $P_0 = -40$  дБ) ширина полосы синхронизации для  $n > 1$  значительно меньше, чем на частоте входного сигнала, т.е. происходит повышение частотной избирательности колебательной системы. Кроме того, режим умножения частоты характеризуется наличием замкнутых участков резонансных характеристик. Таким образом, в данном случае усиление как на частоте входного сигнала,

так и на его гармониках происходит при синхронизации резонансной колебательной системы. Увеличение коэффициента умножения частоты сопровождается снижением амплитуды выходного сигнала, смещением полосы синхронизации к собственной частоте резонансной электродинамической системы выходного каскада.

В случае более мощного входного сигнала ( $P_0 = -20$  дБ) резонансные характеристики становятся однозначными, причем в случае умножения частоты ( $n > 1$ ) колебания для любых значений параметра  $\Delta\omega$  оказываются устойчивыми. Данный эффект аналогичен полученному ранее для режима усиления (рис. 3,б) и является вполне закономерным, поскольку увеличение коэффициента умножения частоты также приводит к повышению пускового тока резонансного каскада и соответствующему уменьшению отношения рабочего тока к пусковому.

Из графиков рис. 10 также следует, что увеличение коэффициента умножения частоты сопровождается смещением максимума резонансных характеристик к нулевой расстройке ( $\Delta\omega=0$ ) и соответствующим изменением кривых точного резонанса. В частности, для значения  $n=5$  на рис. 10,б получаем почти симметричную относительно оси нулевой расстройки резонансную характеристику. Скелетная кривая в данном случае практически вырождается в линию, совпадающую с осью  $\Delta\omega=0$ , что является признаком изохронности колебаний в исследуемой системе [22].

### Заключение

Итак, представлена нелинейная многомерная теория электронно-волновой системы О-типа мм-диапазона с нерезонансными и резонансными участками пространства взаимодействия. Использование принципа пространственно-временной аналогии волновых и колебательных систем позволяет проводить анализ физических процессов с единых позиций для различных типов взаимодействия в гибридном приборе. Разработанная модель позволяет учитывать нелинейный характер энергообмена электронов с высокочастотным полем на всех участках пространства взаимодействия. Исследованы закономерности усиления сигналов различного уровня мощности в многокаскадных системах различной конфигурации. Проведен анализ процесса умножения частоты в гибридном приборе с выходным резонансным участком пространства взаимодействия. Полученные результаты позволяют определить основные закономерности воздействия различных физических факторов на процесс многомерного электронно-волнового взаимодействия и разработать механизмы повышения эффективности приборов и устройств мм-диапазона.

*Авторы посвящают эту работу 70-летию выдающегося ученого А.А. Кураева и желают ему крепкого здоровья и творческих успехов!*

### Литература

1. *Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. – М.: Сов. радио, 1973.
2. *Физионов Г. Ф., Бадлевский Ю. Н.* Нелинейное взаимодействие электронных потоков и радиоволн в ЛВВ. – М.: Сов. радио, 1971.
3. *Гайдук В. И., Палатов К. И., Петров Д. М.* Физические основы электроники сверхвысоких частот. – М.: Сов. радио, 1971.

4. *Mizuno, K., Ono, S., and Shibata, Y.* Two Different Mode Interaction in an Electron Tube with a Fabry-Perot Resonator – the Ledatron. – IEEE Trans. Electron Devices, 1973, vol. ED-20, no. 8, pp. 749–752.
5. *Русин Ф. С., Богомолов Г. Д.* Оротрон – электронный прибор с открытым резонатором и отражающей решеткой. – Изв. вузов. Радиофизика, 1968, т. 11, № 5, с. 756–770.
6. *Шестопалов В. П.* Дифракционная электроника. – Харьков: Вища школа, Изд-во при Харьк. ун-те, 1976.
7. *Ваверис Д. М., Третьяков О. А.* Теория резонансных усилителей с распределенным взаимодействием // РИ АН УССР. – Киев: Наукова думка, 1989.
8. *Цейтлин М. Б., Мясин Е. А., Мазур Т. А.* Теория двухкаскадного релятивистского резонансного усилителя с распределенным взаимодействием. – Радиотехника и электроника, 1996, 41, № 2, с. 223–227.
9. *Евдокимов В. В., Мясин Е. А.* Численное моделирование двухкаскадного оротронного усилителя восьмимиллиметрового диапазона. – Радиотехника и электроника, 2005, 50, № 10, с. 1299–1303.
10. *Беляевский Б. А., Цейтлин М. Б.* Анализ работы оротрона на основе двумерной теории. – Радиотехника и электроника, 1980, 25, № 5, с. 1108–1112.
11. *Одаренко Е. Н., Шматко А. А.* Нелинейная теория СВЧ-генераторов О-типа с неоднородным магнитоэстатическим полем (двухмерная модель). – Радиотехника и электроника, 1994, 39, № 4, с. 835–842.
12. *Marshall, E. M., Phillips, P. M., and Walsh, J. E.* Planar Orotron Experiments in the Millimeter Wavelength Band. – IEEE Trans. on Plasma Science, 1988, vol. 16, no. 2, pp. 199–205.
13. *Joe, J., Louis, L. J., Scharer, J. E., et al.* Experimental and Theoretical Investigations of a Rectangular Grating Structure for Low-Voltage Traveling Wave Tube Amplifiers. – Phys. Plasmas, 1997, 4(7), pp. 2707–2715.
14. *Русин Ф. С., Синенко Л. А., Костромин В. П.* Оротрон – преобразователь частоты. – Радиотехника и электроника, 1977, 22, № 8, с. 1670–1672.
15. *Булачков С. А., Ваверис Д. М., Третьяков О. А.* Теория резонансных умножителей частоты с распределенным взаимодействием О-типа. – Радиотехника (межведомств. научно-техн. сборник). – Харьковский ун-т, 1987, вып. 81, с. 100–107.
16. *Уткин Г. М.* Автоколебательные системы и волновые усилители. – М.: Сов. радио, 1978.
17. *Ваверис Д. М., Третьяков О. А., Шматко А. А.* Влияние поля пространственного заряда на выходные характеристики генераторов с распределенным взаимодействием О-типа. – Радиотехника и электроника, 1984, 29, № 8, с. 1571–1579.
18. *Заезный А. М., Кушир В. Ф., Ферман Б. А.* Теория нелинейных электрических цепей. – М.: Связь, 1968.
19. *Батура М. П., Кураев А. А., Синицын А. К.* Моделирование и оптимизация мощных электронных приборов СВЧ. – Минск: БГУИР, 2006.
20. *Шевчик В. Н., Трубецков Д. И.* Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. – М.: Сов. радио, 1970.
21. *Минакова И. И.* Неавтономные режимы автоколебательных систем. – М.: МГУ, 1987.
22. *Мишулин В. В., Медведев В. И., Мустьел Е. Р., Парыгин В. И.* Основы теории колебаний. – М.: Наука, 1988.

Поступила 12 июля 2007 г.

Одаренко Евгений Николаевич – см. с. 22.

Шматко Александр Александрович – см. с. 22.