

УДК 519.7



МОДЕЛЬ ИНЕРЦИИ ЗРЕНИЯ

М.Ф. Бондаренко¹, С.Ю. Шабанов-Кушнарченко²,
Ю.П. Шабанов-Кушнарченко³

^{1, 2, 3} ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

Исследуется модель инерции зрения и ее динамические реакции на различные виды входных сигналов. Представлены диаграммы, дающие представление о характере изменения яркости и светлоты зрительного ощущения во времени. Обобщен закон Плато. Сформулировано условие, обеспечивающее равенство критических частот для периодических мельканий произвольной формы.

МОДЕЛЬ ИНЕРЦИИ ЗРЕНИЯ, КРИТИЧЕСКАЯ ЧАСТОТА МЕЛЬКАНИЙ, ЗАКОН ПЛАТО

Введение

В статье рассматриваются некоторые аспекты экспериментальной проверки математической модели инерции зрения Аллара — Луизова:

$$S(t) = \frac{k}{a} \int_{-\infty}^t B(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau, \quad (1)$$

вытекающей как частный случай из модели инерции и иррадиации, описанной в работе [1]. Луизов [2, с. 108] проверял эту модель на фактах пороговой видимости прямоугольной вспышки и получил хорошее согласование теории с опытом.

Он рассмотрел входные сигналы вида:

$$B(t) = \begin{cases} B_0, & \text{если } t \leq 0, \\ B_0 + \Delta B, & \text{если } 0 < t \leq \Delta t, \\ B_0, & \text{если } t > \Delta t \end{cases} \quad (2)$$

и получил следующую реакцию модели:

$$S(t) = \begin{cases} kB_0, & \text{если } t \leq 0, \\ kB_0 + k\Delta B(1 - e^{-\frac{t}{a}}), & \text{если } 0 < t \leq \Delta t, \\ kB_0 + k\Delta B(e^{-\frac{\Delta t}{a}} - 1)e^{-\frac{t}{a}}, & \text{если } t > \Delta t. \end{cases} \quad (3)$$

На рис. 1 а и б показан ход изменения во времени входного и выходного сигналов модели.

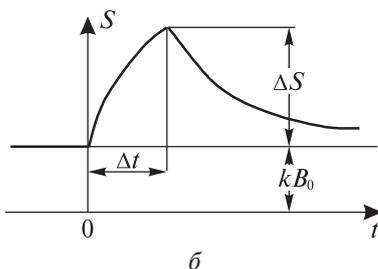
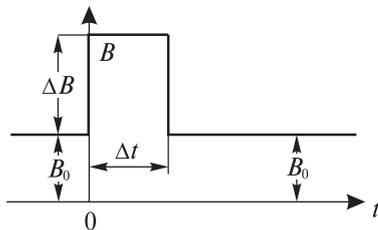


Рис. 1

Основываясь на этих данных, Луизов вывел зависимость, связывающую яркость вспышки ΔB с ее пороговой длительностью Δt_n ,

$$\Delta t_n = a \ln \frac{1}{1 - \frac{\Delta B_n}{\Delta B}}, \quad (4)$$

которая допускает экспериментальную проверку. В формуле (4) ΔB_n означает статический порог различения яркости, a — постоянная инерции зрения.

Луизов также выполнил эксперименты по проверке этой зависимости и получил хорошее согласование теории с опытом [2]. На рис. 2 дано сравнение вычислений по формуле (4) с результатами одного из его опытов. При построении теоретической диаграммы постоянная инерции зрения принята равной $a = 0,0595$ сек.

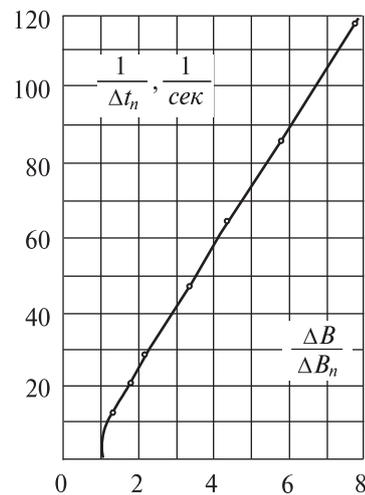


Рис. 2

В этой статье мы продолжим работу в указанном направлении, а именно сравним реакции модели инерции зрения с некоторыми фактами, связанными с критической частотой слияния периодических мельканий [3, 4]. Здесь будет показано, что модель инерции Аллара — Луизова также хорошо согласуется и с этим кругом фактов.

1. Исследование реакций модели инерции на прямоугольные мелькания

Изучим реакцию модели инерции на прямоугольные мелькания с произвольным соотношением длительности светлой и темной фаз. Пример такого рода мельканий изображен на рис. 3 а. Яркость зрительной картины принимает два попеременно сменяющих друг друга уровня B_1 и B_2 .

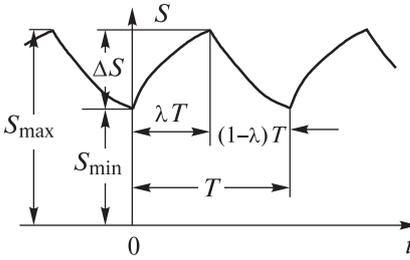
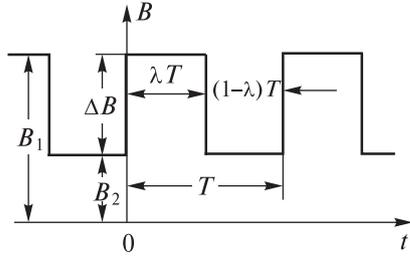


Рис. 3

Математически зависимость яркости B от времени t запишется в виде:

$$B(t) = \begin{cases} B_1, & \text{если } nT < t \leq (n+\lambda)T, \\ B_2, & \text{если } (n+\lambda)T < t \leq (n+1)T. \end{cases} \quad (5)$$

Для определенности будем полагать, что $B_1 > B_2$. Параметр λ (назовем его параметром скважности мельканий) определяет длительность первой фазы колебания яркости, равную λT ; длительность второй фазы равна $(1-\lambda)T$. Величина λ для мельканий различной формы может изменяться в пределах от 0 до 1.

Используя формулу (1) для условий (5), получим следующее выражение для определения светлоты зрительного ощущения:

$$S(t) = \begin{cases} k B_1 - k \Delta B e^{-\frac{t-nT}{a}} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{1-\lambda}{a}T}}{1 - e^{-\frac{T}{a}}}, & \text{если } nT < t \leq (n+\lambda)T, \\ k B_2 - k \Delta B e^{-\frac{t-nT}{a}} \cdot \frac{e^{\frac{\lambda}{a}} - 1}{1 - e^{-\frac{T}{a}}}, & \text{если } (n+\lambda)T < t \leq (n+1)T. \end{cases} \quad (6)$$

В выражении (6) величина ΔB обозначает амплитуду колебания яркости при мельканиях:

$$\Delta B = B_1 - B_2. \quad (7)$$

На рис. 3 б представлена диаграмма изменения светлоты зрительного ощущения во времени, построенная по формуле (6). Из диаграммы видно, что светлота колеблется между минимальным S_{\min} и максимальным S_{\max} значениями, достигаемыми соответственно в моменты времени nT и $(n+\lambda)T$.

По формуле (6) находим:

$$S_{\min} = k \frac{B_1 (e^{-\frac{1-\lambda}{a}T} - e^{-\frac{T}{a}}) + B_2 (1 - e^{-\frac{1-\lambda}{a}T})}{1 - e^{-\frac{T}{a}}}, \quad (8)$$

$$S_{\max} = k \frac{B_1 (1 - e^{-\frac{\lambda}{a}T}) + B_2 (e^{-\frac{\lambda}{a}T} - e^{-\frac{T}{a}})}{1 - e^{-\frac{T}{a}}}.$$

Величина колебания светлоты равна:

$$\Delta S = S_{\max} - S_{\min} = 2k\Delta B \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda}{2a} \cdot \operatorname{sh} \frac{1-\lambda}{2a}}{\operatorname{sh} \frac{T}{2a}}. \quad (9)$$

Формула (9) показывает, что величина колебания светлоты ΔS зависит от значения параметра λ . Характер этой зависимости показан на диаграмме (рис. 4). Как видно из диаграммы, колебание светлоты достигает максимального значения ΔS_{\max} при $\lambda = \frac{1}{2}$; то есть когда обе фазы мельканий имеют одинаковую длительность, равную половине периода.

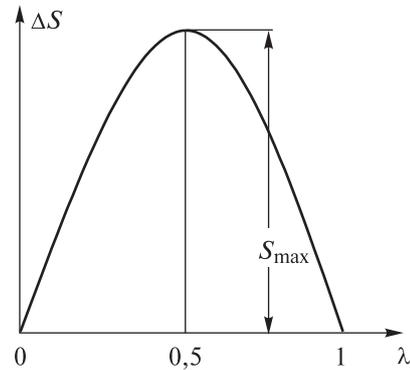


Рис. 4

Согласно формуле (9):

$$\Delta S_{\max} = k\Delta B \frac{T}{4a}. \quad (10)$$

Как видно из формулы (10), величина колебания светлоты ΔS_{\max} зависит от времени периода мельканий T . На диаграмме (рис. 5) показан характер этой зависимости. При неограниченном росте периода мельканий T колебание видимой яркости стремится к значению $\Delta S = k\Delta B$. При уменьшении периода мельканий T до нуля величина ΔS_{\max} также стремится к нулю.

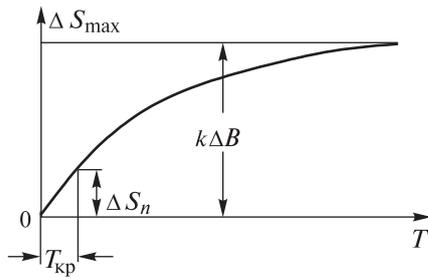


Рис. 5

Из диаграммы на рис. 5 видно, что колебание светлоты зрительного ощущения при уменьшении периода мельканий уменьшается, однако, оно полностью не прекращается при любом, сколь угодно малом периоде мельканий. Может показаться, что практический опыт наблюдения мельканий противоречит этому заключению. Известно, что при некоторой конечной частоте, называемой критической, мелькания совершенно исчезают. Величина критической частоты мельканий зависит от многих факторов и обычно имеет величину порядка 40÷50 Гц. Из этого факта мы не склонны делать вывод о ложности модели инерции зрения.

Дело в том, что о колебании светлоты зрительного ощущения мы узнаем лишь потому, что оно обнаруживается сознанием наблюдателя, выступающего в данном случае в роли измерительного прибора. Именно показания этого прибора мы осознаем как колебание светлоты зрительного ощущения и записываем их в протоколы испытаний. Таким образом, мы приходим к схеме, изображенной на рис. 6.

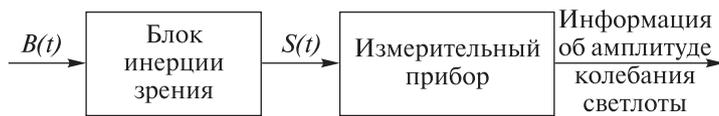


Рис. 6

Однако, пользуясь аналогией с техническими измерительными приборами, мы неизбежно приходим к выводу о том, что никакой реальный измерительный прибор не может иметь неограниченно высокую чувствительность. Точность измерительного прибора всегда ограничена его зоной нечувствительности. Должно обладать зоной нечувствительности и сознание наблюдателя. Следовательно, при достаточно высокой частоте мельканий, когда амплитуда колебания светлоты снизится настолько, что сравняется с зоной нечувствительности сознания, последнее перестанет сигнализировать о мельканиях, и мы не сможем воспринимать мелькания светлоты. Таким образом, из того факта, что мы не обнаруживаем мельканий светлоты зрительного ощущения, еще не следует то, что этих мельканий вовсе нет. Эти мелькания просто могут быть малы и не обнаруживаться сознанием — прибором,

анализирующим эти мелькания. Возможно, что противоречие между теорией и опытом только лишь кажущееся.

Факт наличия зоны нечувствительности сознания можно привлечь для экспериментальной проверки теоретических выводов из модели инерции зрения. Пороговому колебанию светлоты ΔS_n соответствует критическая длительность периода мельканий $T_{кр}$ (рис. 5), связанная с критической частотой слияния мельканий формулой $n_{кр} = \frac{1}{T_{кр}}$.

Величину ΔS_n будем считать постоянной. К вопросу о том, в какой мере это предположение соответствует фактическому положению дела, мы еще возвратимся.

Найдем выражение для определения критической частоты мельканий $n_{кр}$ в зависимости от величины колебания яркости мельканий для случая, когда $\lambda = \frac{1}{2}$. С этой целью подставим в формулу (10) вместо ΔS_{max} величину $\Delta S_n = k\Delta B_n$, а вместо T — величину $\frac{1}{n_{кр}}$. В результате получим:

$$n_{кр} = \frac{1}{4a \operatorname{Arth} \frac{\Delta B_n}{\Delta B}} \quad (11)$$

На рис. 7 показано изменение критической частоты мельканий $n_{кр}$ в зависимости от колебания яркости ΔB .

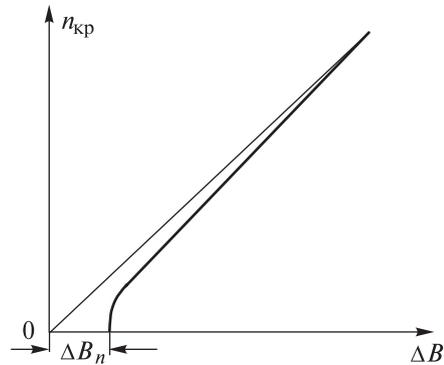


Рис. 7

Как видим, с увеличением колебания яркости критическая частота мельканий растет. Значению $n_{кр} = 0$ соответствует величина колебания яркости ΔB_n . Таким образом, ΔB_n означает пороговое колебание яркости при очень медленных мельканиях. Формула (11) допускает экспериментальную проверку. При достаточно больших по сравнению с ΔB_n значениях ΔB , зависимость (11), как это видно из диаграммы на рис. 7, приобретает практически линейный характер:

$$n_{кр} \approx \frac{1}{4a} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta B_n} \quad (12)$$

Рассмотрим теперь зависимость критической частоты мельканий $n_{кр}$ от параметра λ , то есть со-

отношения длительности отдельных фаз в периоде мельканий. С этой целью определим из соотношения (9) величину λ , предварительно заменив в нем ΔS на $\Delta S_n = k\Delta B_n$ и T на $\frac{1}{n_{кр}}$. В результате получим:

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm an_{кр} \operatorname{Arch} \left(ch \frac{1}{2an_{кр}} - \frac{\Delta B_n}{\Delta B} \cdot sh \frac{1}{2an_{кр}} \right). \quad (13)$$

На рис. 8 в виде диаграммы показан характер зависимости $n_{кр}$ от λ , даваемой формулой (13). Формула (13) допускает экспериментальную проверку. При достаточно больших по сравнению с ΔB_n значениях ΔB зависимость (13) приобретает более простой вид:

$$n_{кр} \approx \frac{\lambda(1-\lambda)}{a} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta B_n}. \quad (14)$$

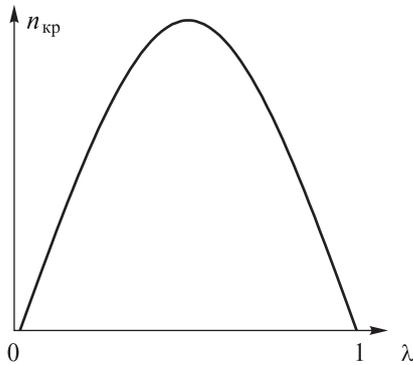


Рис. 8

В последующих разделах этой статьи будет рассмотрен вопрос о частичной экспериментальной проверке формул (11)-(14).

2. Сознание как прибор, анализирующий колебания светлоты

В предыдущем разделе мы получили, исходя из модели инерции зрения Аллара-Луизова, несколько зависимостей для описания критической частоты мельканий, допускающих непосредственную опытную проверку. Теперь мы приступаем к частичной проверке этой зависимости на фактах. Прежде всего, из формул (11)-(14) вытекает, что критическая частота совершенно не должна зависеть от общего уровня яркости мельканий. Критическая частота в то же время зависит от значения колебания яркости ΔB . Однако, обращаясь к опыту, мы видим, что это не так. Пусть, к примеру, яркость экрана периодически изменяется так, что мелькания заметны для испытуемого. Налагая на эти мелькания свет немигающей яркости и постепенно повышая уровень яркости этого света, мы рано или поздно придем к такому положению, когда мелькания не будут обнаруживаться испытуемым, несмотря на то, что величина колебания яркости осталась прежней.

Несовпадение критических частот мельканий при неодинаковой их средней яркости можно продемонстрировать также и с помощью вертушки. Для этого возьмем кружок белой бумаги, раскрашенный черной тушью так, как показано на рис. 9.

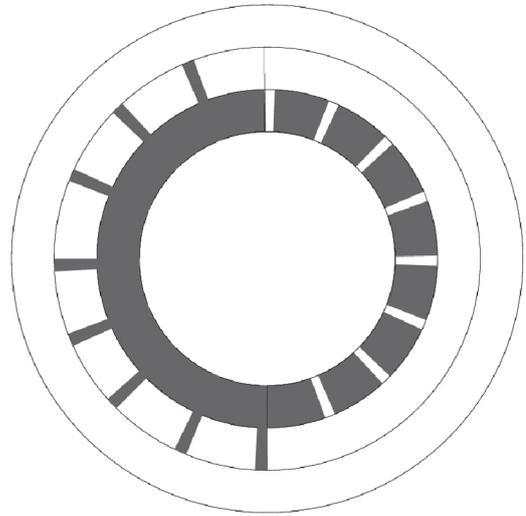


Рис. 9

Дозировка яркости отдельных фаз мельканий осуществлена комбинированием белых и черных коротких дуг, соотношение длин которых определяется на основе закона Талбота. Такие вспомогательные мелькания сольются значительно раньше, чем те, которые нас интересуют, и дадут требуемый уровень яркости отдельных фаз мельканий.

Кружку, изображенному на рис. 9, соответствуют диаграммы мелькающей яркости, представленные на рис. 10. Символы $B_б$ и $B_ч$ обозначают яркости белого и черного полей.

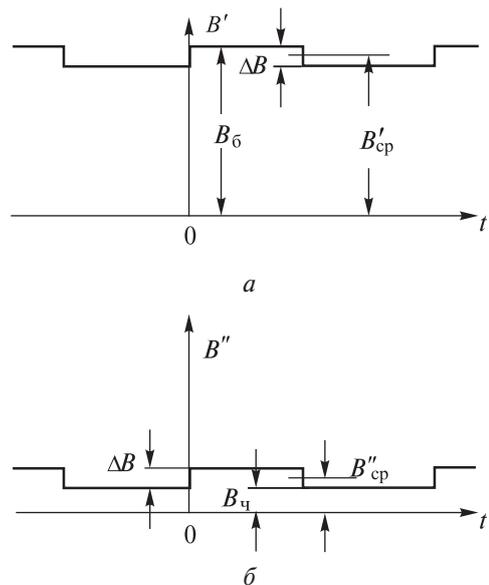


Рис. 10

Как видно из диаграмм, мелькания отличаются лишь средним значением яркости. На первой диаграмме (рис. 10 а) $B'_{cp} = B_ч + 0,95(B_б - B_ч)$, на вто-

рой диаграмме (рис. 10 б) $B_{\text{ср}}'' = B_{\text{ч}} + 0,05(B_{\text{б}} - B_{\text{ч}})$. Амплитуда колебаний в обоих случаях одна и та же и равна $\Delta B = 0,1(B_{\text{б}} - B_{\text{ч}})$.

Опыт показывает, что хотя критические частоты таких мельканий и близки, но в точности они не совпадают. Мелькания на черном фоне сливаются при более высокой частоте, чем мелькания на белом фоне. Очевидно, что такого рода отклонения в функционировании зрения человека от реакций модели носят целесообразный характер. Ведь ясно, что при более низком уровне освещения и амплитуда мельканий будет, как правило, пропорционально меньше. Поэтому повышение чувствительности органа зрения к мельканиям при уменьшении средней яркости выглядит вполне целесообразным. Не считаться с такого рода отклонениями нельзя.

Можно ли согласовать такого рода факты с моделью Аллара — Луизова? Нам представляется это возможным. Снова вспомним, что сознание наблюдателя, воспринимающее мелькания светлоты, выполняет, по существу, функции измерительного прибора. Попытаемся хотя бы эскизно представить, как функционирует этот прибор. С этой целью проведем аналогию сознания, работающего в режиме анализа мельканий, с каким-либо техническим измерительным прибором, например, электронным осциллографом.

Представим, что создана действующая модель Аллара-Луизова, воспринимающая световые мелькания $B(t)$, на выходе которой возникают колебания напряжения $S(t)$, являющиеся аналогом колебания светлоты. Представим далее, что мы располагаем электронным осциллографом, и нам дано задание определить амплитуду колебания светлоты. Очевидно, что прежде, чем производить определение амплитуды, целесообразно отстроиться с помощью вертикального смещения луча от постоянной составляющей мельканий. Далее, если амплитуда колебания яркости окажется чрезмерно большой, то мы уменьшим усиление, а если малой, увеличим.

Итак, еще до того, как будет осуществлено измерение величины колебания светлоты, представляется целесообразным выполнить следующие две операции: 1) отфильтровать постоянную составляющую мельканий; 2) установить подходящее усиление. Трудно представить, чтобы такой совершенный прибор, как человеческое сознание, не располагал возможностями такого рода. Поскольку в случае сознания о ручном выполнении этих операций говорить не приходится, необходимо полагать, что они выполняются автоматически.

Как уже говорилось, амплитуда мельканий в естественных условиях наблюдения, как правило, будет тем большей, чем больше общий уровень освещенности. В связи с этим естественно допустить,

что величина коэффициента усиления мельканий регулируется в зависимости от общего уровня яркости зрительной картины. Итак мы приходим к следующей модели сознания, работающего в режиме анализа мельканий (рис. 11).

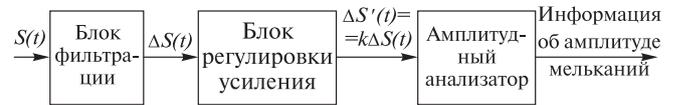


Рис. 11

Мелькания светлоты $S(t)$ поступают на блок, отфильтровывающий постоянную составляющую мельканий. Оставшееся колебание светлоты $\Delta S(t)$ поступает на блок регулировки усиления. На этот же блок поступает информация об общем уровне яркости зрительной картины $B_{\text{ср}}$. Коэффициент усиления блока является функцией $B_{\text{ср}}$, то есть $k = k(B_{\text{ср}})$. Если принять такую модель работы сознания, анализирующего мелькания, то нетрудно прийти к заключению о том, что фактическая зависимость критической частоты от уровня яркости мельканий вполне может быть следствием работы блока регулировки усиления. В то же время этот факт может не иметь никакого отношения к вопросу об истинности или ложности модели инерции зрения.

Если эксперимент подтвердит справедливость такого взгляда на роль сознания в анализе мельканий, то никаких изменений в модель инерции зрения вносить не придется. Нужно будет лишь иметь в виду, что коэффициент усиления k , фигурирующий в модели, может принимать различные значения в зависимости от общего уровня яркости зрительной картины. При таком понимании дела становится ясным, что опыты с определением критических частот, выполненные при различном общем уровне яркости зрительной картины, нельзя сравнивать между собой, если при этом не вносить поправку на изменение коэффициента усиления.

3. Модель инерции и закон Плато

Продолжим проверку зависимостей для описания критической частоты слияния мельканий. Пусть имеются два периодических прямоугольных мелькания $B'(t)$ и $B''(t)$, у которых амплитуды колебания яркости одинаковы

$$\Delta B' = \Delta B'' = \Delta B, \quad (15)$$

а параметры скважности λ' и λ'' связаны соотношением:

$$\lambda' = 1 - \lambda'' = \lambda. \quad (16)$$

Как следует из формулы (9), колебания светлоты этих мельканий $\Delta S'$ и $\Delta S''$ должны быть равны между собой:

$$\Delta S' = \Delta S'' = \Delta S. \quad (17)$$

Отсюда следует, что для таких мельканий должны быть равными также и их критические частоты:

$$n'_{кр} = n''_{кр} \cdot \tag{18}$$

Формула (13) и диаграмма на рис. 8 иллюстрируют это положение.

Известен экспериментальный факт, который носит название закона Плато, имеющий к этому выводу весьма близкое отношение [5]. Плато рассматривал пары мельканий, для которых соблюдаются не только условия (15) и (16), но дополнительно к этому равны между собой яркости отдельных фаз мелькания:

$$\begin{aligned} B'_1 = B''_1 = B_1, \\ B'_2 = B''_2 = B_2. \end{aligned} \tag{19}$$

Пример такой пары мельканий показан на диаграммах а и б рис. 12.

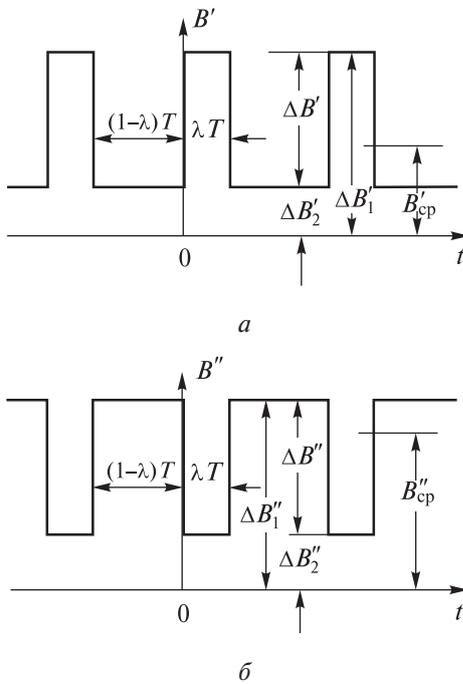


Рис. 12

Пары мельканий такого вида легко получаются на вертушке с помощью так называемых «дополнительных дисков». Пример пары дополнительных дисков представлен на рис. 13. Для перехода от одного диска к другому нужно всего лишь поменять местами яркости секторов. Плато обнаружил, что критические частоты, измеренные по двум дополнительным дискам, равны между собой.

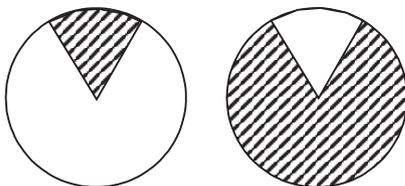


Рис. 13

Можно было бы считать, что закон Плато подтверждает только, что полученный из модели вывод о равенстве критических частот, если бы не одно обстоятельство. Дело в том, что средний уровень яркости на дополнительных дисках в момент слияния мельканий резко различен: $B'_{cp} \neq B''_{cp}$. Поэтому нет никаких оснований общий уровень яркости этих двух зрительных картин полагать одинаковым. Следовательно, в соответствии с тем, что было сказано в предыдущем разделе, результаты опытов на дополнительных дисках не могут быть сравниваемы друг с другом, пока мы не введем поправку в коэффициенты усиления модели инерции k' и k'' , учитывающие различия в общем уровне яркости обеих зрительных картин. Мы не знаем точно, какова зависимость коэффициента усиления от уровня яркости зрительной картины, однако, наличие этой связи несомненно.

Если же мы хотя бы качественно учтем эту связь, то немедленно приходим к выводу: из модели инерции зрения вытекает, что критические частоты, измеренные по дополнительным дискам, не должны быть равны между собой. Подобного рода соображения привели Луизова к выводу о том, что модель инерции (1) противоречит закону Плато [2, с. 47]. Тем не менее, мы не склонны отказываться от принятой модели инерции зрения при объяснении закономерностей, связанных с понятием критической частоты мельканий.

Прежде всего, попытаемся ответить на вопрос, что произойдет, если выполнить условия (15) и (16), а вместо условия (19) потребовать равенство средних яркостей в момент слияния мельканий, то есть:

$$B'_{cp} = B''_{cp} \cdot \tag{20}$$

Теперь средние яркости зрительных картин одинаковы и следовательно, согласно модели, коэффициенты усиления в обоих случаях должны быть равными. Вместе с тем, должны быть, согласно модели, одинаковыми и критические частоты. Однако такой вывод представляется невероятным. Если критические частоты, согласно закону Плато, оказываются равными при различных средних уровнях яркости, то при одинаковых средних уровнях яркости мелькания с одинаковыми колебаниями яркости должны сливаться при заведомо различных частотах.

Несмотря на такое негативное априорное заключение, мы все же выполнили опыты по проверке этого следствия из модели. Опыты выполнялись на вертушке. Кружок вертушки имел два поля. Поля вертушки раскрашивались таким образом, чтобы выполнялись условия (15), (16) и (20). Параметр скважности λ в опытах изменялся в широких пределах от 1/32 до 31/32. Заданный закон изменения яркости во времени на полях сравнения фор-

мировался на основе использования обобщенного закона Галбота с помощью быстрой смены черных и белых полей, длительность которых находится в заданном соотношении. Пример раскраски полей вертушки показан на рис. 14.

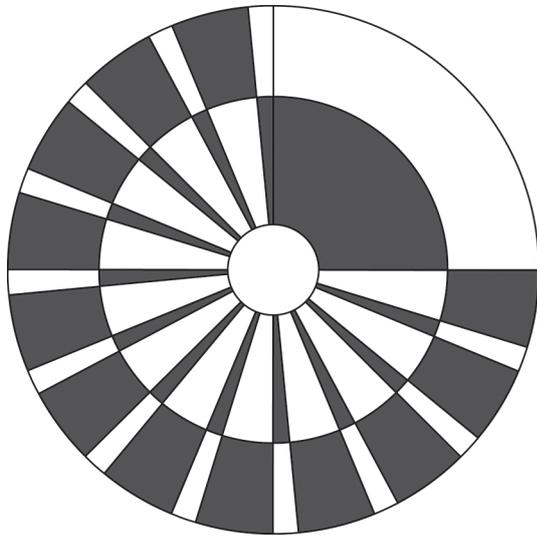


Рис. 14

Такому кружку соответствуют диаграммы изменения яркостей B' и B'' внешнего и внутреннего полей, изображенные на рис. 15. В рассматриваемом примере принято:

$$B'_1 = B_6; B'_2 = \frac{1}{3}B_6 + \frac{2}{3}B_4; B'_3 = \frac{2}{3}B_6 + \frac{1}{3}B_4;$$

$$B''_2 = B_4; B''_{cp} = B'_{cp} = \frac{1}{2}B_6 + \frac{1}{2}B_4.$$

Символами B_6 и B_4 обозначены яркости белого и черного полей.

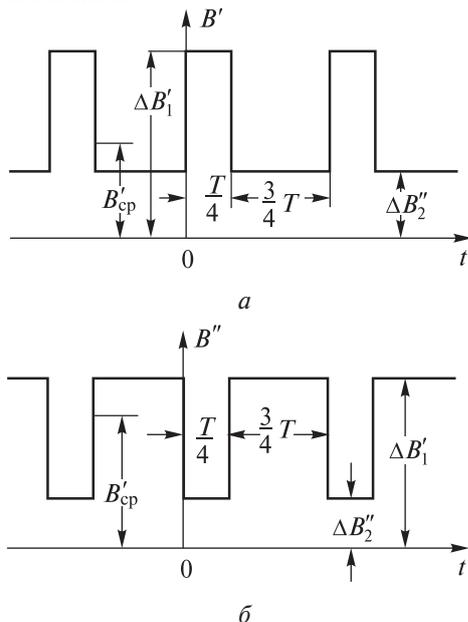


Рис. 15

Дискретность раскраски кружка не может существенно повлиять на результаты опыта. При разбивке окружности на 16 частей, как это дела-

лось при раскраске, вспомогательные быстрые мелькания будут сливаться уже при 2÷3 оборотах вертушки в секунду. Слияние же основных мельканий наступает при скорости вращения диска порядка 20÷50 об/сек. Проведенные опыты дали поразительный результат: критические частоты на обоих полях вертушки во всех опытах оказались строго одинаковыми. Вопреки ожиданиям, теоретический вывод из модели полностью подтвердился на опыте.

Однако, если это так, то отсюда логически вытекает невозможность строгого соблюдения закона Плато в его первоначальной формулировке. Критические частоты двух дополнительных дисков при $\lambda \neq 1/2$, строго говоря, должны отличаться между собой. И действительно, обращаясь к работе Айвса [4], мы находим у него вывод о том, что критические частоты для дополнительных дисков чрезвычайно близки друг другу. Не точно равны, но лишь чрезвычайно близки между собой! Различия критических частот для дополнительных дисков легко обнаружить, обращаясь непосредственно к экспериментам Айвса. Эти различия тем больше, чем больше параметр скважности мельканий отличается от значения 1/2. Так, в одном из опытов Айвса при $\lambda' = 0,1$; $\lambda'' = 0,9$ имеем: $n'_{кр} = 43$ об/сек; $n''_{кр} = 42$ об/сек. Как видим, критические частоты чрезвычайно близки, но, строго говоря, они различны, и это различие обнаруживается в эксперименте.

Различие критических частот дополнительных дисков можно легко продемонстрировать с помощью следующего опыта. Возьмем кружок с двумя соприкасающимися кольцами, раскраска которых соответствует дополнительным дискам при $\lambda' = 7/8$ (внешнее кольцо), $\lambda'' = 1/8$ (внутреннее кольцо). Схема такого кружка изображена на рис. 16.

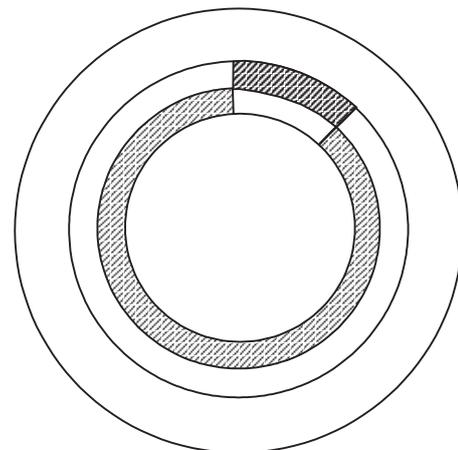


Рис. 16

Плавно меняя скорость вращения диска, можно легко подобрать такое ее значение, когда на внешнем кольце мелькания уже не замечаются, на внутреннем же кольце они еще отчетливо видны.

Итак, мы приходим к следующему выводу: первоначальная формулировка закона Плато неверна. Строго говоря, критические частоты дополнительных дисков не совпадают. В то же время имеется точное совпадение критических частот прямоугольных мельканий при формулировке закона Плато в виде условий (15), (16) и (20).

Попробуем теперь обобщить закон Плато. Рассмотрим две периодические функции яркости $B'(t)$ и $B''(t)$, средние значения B_{cp} которых совпадают, и выполняется условие:

$$B'(t) - B_{cp} = B_{cp} - B''(t) \quad (21)$$

Пары функций $B'(t)$ и $B''(t)$, удовлетворяющие этим условиям, назовем взаимно симметричными. Примером взаимно симметричных функций могут служить функции $B'(t)$ и $B''(t)$, изображенные на рис. 17. Прямоугольные мелькания, удовлетворяющие условиям (15), (16) и (20), являются частным случаем взаимно симметричных функций.

Исходя из модели инерции зрения (1), нетрудно показать, что мелькания яркости в виде взаимно симметричных функций должны иметь одинаковые критические частоты. Этот вывод проверялся нами в опытах с вертушкой. На полях вертушки с помощью соответствующей раскраски формировались взаимно симметричные функции яркости произвольной формы. Во всех без исключения случаях наблюдалось совершенно точное совпадение критических частот мельканий полей вертушки.

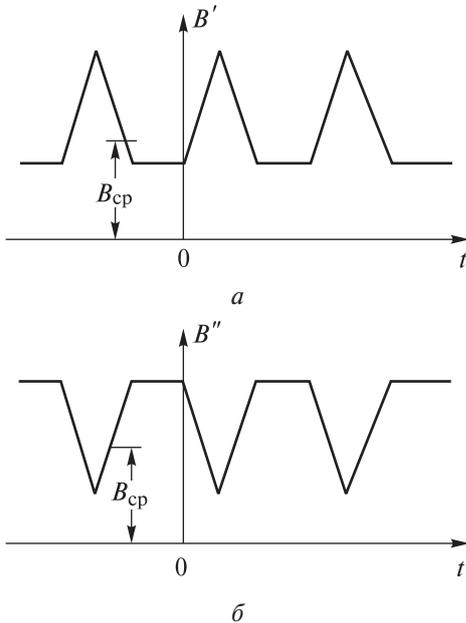


Рис. 17

Найденную закономерность можно рассматривать как обобщение закона Плато.

4. Условие равенства критических частот для мельканий произвольной формы

Выше было установлено, что мелькания яркости в виде взаимно симметричных функций имеют

одинаковые критические частоты. В настоящем разделе, исходя из модели инерции зрения, мы получим несколько более общее условие равенства критических частот. Рассмотрим пару периодических мельканий произвольной формы $B'(t)$ и $B''(t)$, средние значения яркости которых одинаковы. Поставим перед собой задачу установить условие, обеспечивающее равенство критических частот этих мельканий. Вначале изучим этот вопрос на примере прямоугольных мельканий. Рассмотрим пару прямоугольных мельканий, имеющих одинаковую среднюю яркость. Пусть величины колебания яркости и параметры скважности для этих мельканий соответственно равны $\Delta B'$, $\Delta B''$, и λ' , λ'' . Формула (14) дает нам следующее условие равенства критических частот для этих мельканий:

$$\lambda'(1-\lambda')\Delta B' = \lambda''(1-\lambda'')\Delta B'' \quad (22)$$

Если модель инерции зрения (1) верна, то при соблюдении условия (22) критические частоты мельканий должны совпадать. Оговоримся, однако, что, поскольку формула (14) приближенная, совпадение частот будет достаточно точным лишь в случае, когда колебания яркостей $\Delta B'$ и $\Delta B''$ во много раз превосходят пороговое значение ΔB_n . Заметим, что условие (22) весьма хорошо согласуется с частным случаем эмпирической формулы Портера — Айвса для прямоугольных мельканий, получаемым при условии равенства критических частот.

С целью проверки справедливости формулы (22) были проведены специальные опыты на диске Максвелла. Прямоугольные мелькания различной амплитуды и скважности, удовлетворяющие условию (22), формировались с помощью специальной раскраски на полях сравнения вертушки. Средние яркости мельканий принимались одинаковыми. На рис. 18 показан пример раскраски кружка при $\lambda' = 1/2$, $\lambda'' = 1/4$, $\Delta B' = 3/4 \cdot \Delta B''$.

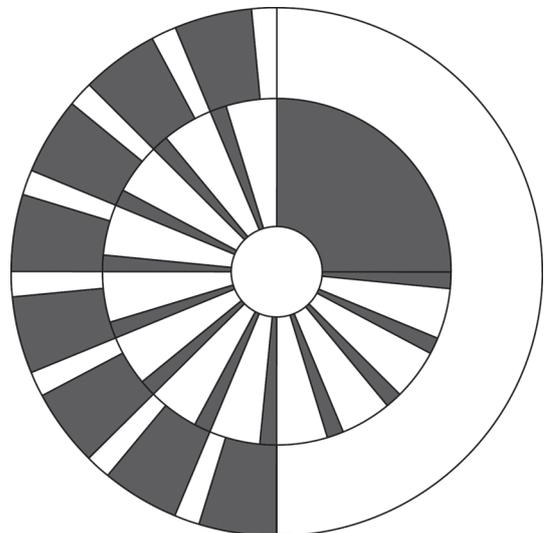


Рис. 18

Соответствующие этой раскраске диаграммы изменения яркостей полей сравнения даны на рис. 19. Эксперименты проводились при самых различных значениях параметров λ' и λ'' , варьирувавшихся в пределах от 1/16 до 15/16. Во всех без исключения случаях наблюдалось довольно точное совпадение критических частот (отличие не более 1 – 2 гц).

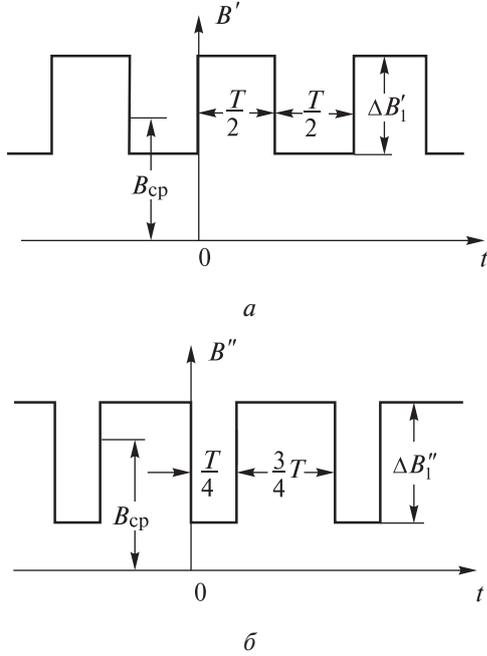


Рис. 19

Перейдем теперь к выводу условия равенства критических частот мельканий произвольной формы. Пусть имеется пара периодических мельканий произвольной формы $B'(t)$ и $B''(t)$. Согласно формуле (59) из статьи [1] светлоты зрительных ощущений этих мельканий выразятся в виде:

$$S'(t) = \frac{k}{a} \cdot \frac{e^{-\frac{t}{a}}}{1 - e^{-\frac{T}{a}}} \cdot \int_{t-T}^t B'(\tau) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau, \quad (23)$$

$$S''(t) = \frac{k}{a} \cdot \frac{e^{-\frac{t}{a}}}{1 - e^{-\frac{T}{a}}} \cdot \int_{t-T}^t B''(\tau) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau.$$

Амплитуды колебаний светлоты $\Delta S'$ и $\Delta S''$ определяются формулами:

$$\Delta S' = \frac{k}{a} \cdot \frac{e^{-\frac{t}{a}}}{1 - e^{-\frac{T}{a}}} \left[\max \int_{t-T}^t B'(\tau) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau - \min \int_{t-T}^t B'(\tau) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau \right],$$

$$\Delta S'' = \frac{k}{a} \cdot \frac{e^{-\frac{t}{a}}}{1 - e^{-\frac{T}{a}}} \left[\max \int_{t-T}^t B''(\tau) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau - \min \int_{t-T}^t B''(\tau) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau \right]. \quad (24)$$

Приравнивая колебания светлоты $\Delta S'$ и $\Delta S''$, получаем следующее условие, обеспечивающее равенство критических частот мельканий:

$$\max \int_{t-T}^t B'(\tau) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau - \min \int_{t-T}^t B'(\tau) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau =$$

$$= \max \int_{t-T}^t B''(\tau) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau - \min \int_{t-T}^t B''(\tau) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau. \quad (25)$$

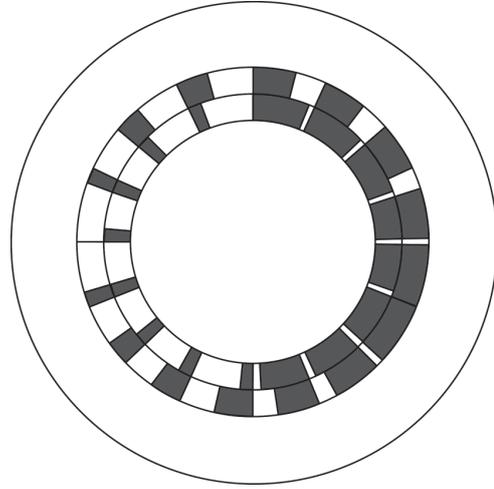


Рис. 20

Использование этой формулы в случае пары прямоугольных ($\lambda=1/2$) и синусоидальных мельканий приводит к следующему условию, обеспечивающему равенство критических частот:

$$\Delta B_{\text{пр}} = \frac{2}{\pi} \Delta B_{\text{син}}, \quad (26)$$

где $\Delta B_{\text{син}}$ и $\Delta B_{\text{пр}}$ – амплитуды соответственно синусоидальных и прямоугольных мельканий яркости. При выводе формулы (26) принято допущение, что амплитуда мельканий во много раз превосходит ее пороговое значение. Справедливость формулы (26) проверялась в эксперименте с помощью диска Максвелла. Пример раскраски кружка дан на рис. 20. Соответствующие диаграммы колебания яркости мельканий представлены на рис. 21.

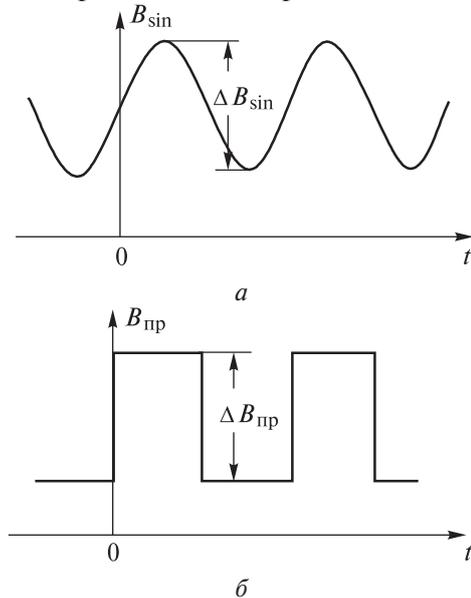


Рис. 21

Подобные условия были выведены также для различных, образованных треугольными, пилообразными, трапецевидными и другими видами мельканий. Эти условия проверялись в эксперименте. Во всех случаях получено довольно точное совпадение критических частот мельканий (отличие в критических частотах не превышало 5 гц).

Выводы

На основе математической модели инерции зрения Аллара-Луизова исследованы реакции на прямоугольные периодические мелькания яркости и выведены формулы для определения критической частоты слияния мельканий.

С помощью модели установлено, что в своей первоначальной формулировке закон Плато строго не выполняется на опыте. Предложена видоизмененная формулировка закона Плато. Выполнены эксперименты, демонстрирующие точное выполнение в опыте видоизмененной формулировки закона Плато. Предложено обобщение закона Плато на случай произвольных периодических мельканий. Поставлены опыты, подтверждающие точное выполнение обобщенно закона Плато в психофизическом эксперименте.

Выведено условие равенства критических частот для прямоугольных мельканий различной скважности. Выполнены эксперименты, демонстрирующие довольно точное совпадение критических частот, полученных в эксперименте и с помощью расчета. Исходя из модели, выведено условие равенства критических частот для мельканий произвольной формы. Опытная проверка этого условия, выполненная для различных пар прямоугольных, синусоидальных, треугольных и других видов мельканий, подтвердила довольно точное согласование эксперимента и теории.

Список литературы: 1. Бондаренко М.Ф., Шабанов-Кушнаренко С.Ю., Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Модель сглаживания в зрении // Бионика интеллекта: науч.-техн. журнал. — 2007. — № 1. — С. 3–14. 2. Луизов А.В. Инерция зрения. — М.: Оборонгиз, 1961. 3. Porter T.C. Contributions to the study of «flicker» // Proc. Roy. Soc., 1902, v. 70. 4. Jves H.E. A theory of intermittent vision // JOSA, 1922, № 6. 5. Plateau M. Sur une loi de la persistance des impression dans l'oeil // Bullet de l'Academie Royale de Belgique, serie 2, 1878, № 46.

Поступила в редколлегию 17.01.2008