УДК 519.21

СТАБИЛИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ С КОНТИНУАЛЬНЫМ МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

ДИКАРЕВ В.А., ЕВГРАФОВ В.Н., ШЕРШЕНЬ В.Н.

Исследуется задача о стабилизации распределений вероятностей марковского процеса с непрерывным временем и континуальным числом состояний в предположении, что его инфинитезимальная матрица поддается возбуждениям. Приводятся методы оценивания точности фокусировки процесса.

1. Введение

В последние десятилетия в ряде производств, связанных с обработкой различных материалов, часто прибегают к воздействию на них различных факторов, которые изменяют их физико-технические характеристики и агрегатные состояния. Такими способами воздействия пользуются в металлургии, на обогатительных комбинатах, а также при обработке различных жидких и газообразных смесей. При этом часто приходится иметь дело с такими воздействиями, которые локализованы на малых промежутках времени и связаны с большими энергетическими затратами. Примером таких воздействий могут служить так называемые «гидравлические удары», с помощью которых обрабатывают различные жидкости и жидкие смеси. Целью указанной обработки является получение такого материала, который достаточно точно удовлетворял бы заданным нормативным требованиям. Описанный метод обработки жидких смесей с помощью сильных возмущений часто применяется для получения фармакологических растворов. Процесс, который при этом происходит, может быть с достаточной степенью точности описан при помощи марковского процесса, фазовое пространство которого является континуальным. Ниже приводится математическое обоснование возможности такого способа воздействия сильных возмущений на обрабатываемую среду, при котором ее характеристики приобретают заданные значения.

2. Постановка задачи

Стабилизацией марковского случайного процесса называется явление, состоящее в следующем: из-за изменения характеристик процесса его предельное распределение может быть достигнуто за конечный промежуток времени. Точнее, за конечный промежуток времени текущее распределение процесса либо локализуется вблизи предельного распределения, либо совпадает с ним. Указанное явление может быть реализовано при наличии быстро изменяющихся во времени факторов, которые, воздействуя на систему, вызывают сильные возмущения основных ее характеристик. Это явление принято называть фокусировкой или σ-фокусировкой [1].

В данной статье рассматривается задача о стабилизации процесса при его локальных возмущениях для случая, когда фазовое пространство является континуальным. Помимо сильных фокусирующих возмущений изучен вклад в фокусировку и малых возмущений. Для определенности будем считать, что фазовым пространством Ω является произвольная ограниченная поверхность в R^3. Считаем, что события образуют σ-алгебру на Ω. Процесс Π рассматривается на временном промежутке $[s_0, t_0)$ и предполагается однородным на любом промежутке $[t', t''] \subset [s_0, t_0)$, не содержащем возмущений.

3. Решение поставленной задачи

Рассмотрим $t_0 = \infty$ (случай $t_0 < \infty$ рассматривается аналогично). Считаем, что множество возмущений $(\delta\Pi)_i$ процесса Π на $[s_0, \infty)$ счетно. Через $[t_i, \tau_i]$ обозначим промежуток времени, на который действуют $(\delta\Pi)_i$. Фазовое пространство процесса Π_i, который порождает возмущение $(\delta\Pi)_i$, обозначим через Ω_i. Считаем, что все Ω_i являются областями, а τ_i — точками фокусировки процессов Π_i на Ω_i, $(\delta\Pi)_i$ $(i = 1,2,\dots)$ предполагаются независимыми.

Далее через $I(\Omega_i)$ обозначим индикаторные функции множеств Ω_i. Положим $\Omega_i \cap \Omega_j = \Omega_{ij}$. Считаем, что на $\Omega(\Omega_i)$ задана функция распределения вероятностей $f(M,t)$ процесса $\Pi(\Pi_i)$, если для любого события B из $\Omega(\Omega_i)$ и любого $t \in [s_0, \infty)$ $P(M \in B) = \int_B f(N,t) d\Omega_N$ (здесь вероятность $P(M \in B)$ вычисляется в момент времени t). Далее будем считать, что функция распределения $f(M,t)$ процесса на Ω является нормальной. Это означает следующее. В каждой точке $M \in \Omega$ при фиксированном t $f(M,t)$ задает плотность нормального распределения с параметрами a_M, σ_M. Предполагается, что a_M, σ_M не изменяются при отсутствии возмущений.

Опишем изменение функции распределения вероятностей процесса $f(M,t)$ при очередном возмущении $(\delta\Pi)_i$ $(i = 1,2,\dots)$. Начальное распределение $f(M, s_0)$ процесса предполагается заданным.

Для Ω_i формируем множество $\{\Omega_i\}$, которое содержит такие Ω_j, для которых $P(\Omega_{ij}) > 0$. Определим множество $\{\tau_i\}$, элементами которого являются соответствующие моменты фокусировки на $\{\Omega_j\}$. Положим $\beta_i = \max\{v_i, t_i\}$, где v_i наибольший элемент из множества $\{\tau_j\}$, для которого $v_i < \tau_i$.

Чтобы получить функцию распределения процесса Π на Ω в момент времени τ_i, ее необходимо переопределить на Ω_i, заменив $f(M,\beta_i)I(\Omega_i)$ на $f(M,\tau_i)I(\Omega_i)$. Замену следует производить так, чтобы выполнялось:

$$\int_{\Omega_i} f(M,\beta_i)d\Omega_M = \int_{\Omega_i} f(M,\tau_i)d\Omega_M .$$

Перечислим условия, при выполнении которых фокусировка процесса Π будет иметь место.

А. Пусть возмущения $(\delta\Pi)_i$ и $(\delta\Pi)_j$ такие, что $P(\Omega_{ij}) > 0$. Тогда функции $f(M,\tau_i)I(\Omega_{ij})$ и $f(M,\tau_j)I(\Omega_{ij})$ совпадают с точностью до постоянного множителя на Ω_{ij}. Это условие называем *условием согласования*.

Б. Любая точка $M \in \Omega$ с вероятностью 1 содержится в бесконечном множестве областей Ω_i. До любого момента $t < \infty$ происходит лишь конечное число возмущений. Для любой Ω_i найдется хотя бы одна Ω_j, не совпадающая с Ω_i, для которой $P(\Omega_{ij}) \geq p > 0$.

Рассмотрим простейший случай фокусировки на Ω. Пусть задано $f(M,s_0)$ и множество $\{\Omega_i\}$ состоит из Ω_1 и Ω_2; $P(\Omega_{12}) > 0$; τ_{2k-1}, τ_{2k} $(k = 1,2,...)$ — моменты фокусировки на Ω_1, Ω_2 соответственно. Тогда при выполнении равенства $f(M,\tau_1)I(\Omega_{12}) = f(M,\tau_2)I(\Omega_{12})$ фокусировка будет иметь место.

Проверим, что при $t \to \infty$ предельное распределение $f(M,\infty)$ совпадает с неподвижной точкой оператора $A(\Omega_i)$, определенного следующим образом: $A(\Omega_i)f(M) = f(M,\tau_i)I(\Omega_i), M \in \Omega_i$;

$$A(\Omega_i)f(M) = f(M), M \in \Omega \setminus \Omega_i .$$

Неподвижная точка определяется так:

$$A(\Omega_i)f_0(M) = f_0(M), f_0(M) \in F .$$

Здесь F — множество всех распределений процесса.

Допустим, что предельное распределение $f(M,\infty)$ не совпадает с неподвижной точкой оператора $A(\Omega_i)$. Тогда разность $f(M,\infty) - f_0(M)$ принимает на Ω наибольшее и наименьшее значения в некоторых точках A и B соответственно: $f(M,\infty) - f_0(M) > 0$ ..

Рассмотрим цепочку попарно— непересекающихся областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$, которые возмущаются последовательно, причем $A \in D_1, B \in Dn$. Сначала возмущается D_1, затем D_2 и наконец D_n. Из изложенного выше следует, что при указанных возмущениях областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$ разность $f(A,\infty) - f(B,\infty) > 0$ будет уменьшаться. Поскольку все области цепочки $D_1, D_2, \ldots, D_n$ возмущаются на временном отрезке конечной длины, разность $f(A,\infty) - f(B,\infty)$ должна равняться нулю. Отсюда следует, что $f(M,\infty) = f_0(M)$.

4. Аппроксимация исследуемого процесса процессом с конечным числом состояний

Из изложенного выше следует, что основным элементом (шагом) стабилизации описанного процесса является реализация σ - фокусировки во всех точках фазового пространства Ω. Известно [1], что σ - фокусировка распределения процесса с континуальным множеством состояний может быть с любой степенью точности аппроксимирована процессом с конечным числом состояний, на котором σ - фокусировка уже реализована. Ниже мы произведем оценку точности σ - фокусировки процесса с конечным множеством состояний.

Рассмотрим марковский процесс, заданный на временном полуинтервале $[a,b)$. Если для любого начального распределения $\{p_i^0\}$, заданного в точке b, распределение вероятностей процесса $p_i(t) \to p_i^*$, $i = 1,2,...,n$, при $t \to b$, то такое явление называется фокусировкой [2]. В [2] показано, что при некоторых условиях, налагаемых на инфинитезимальную матрицу $\Lambda(t)$ процесса (существование столбца, содержащего неинтегрируемые особенности в точке b, и существование придела у нулевого собственного вектора матрицы $\Lambda(t)$), указанная фокусировка имеет место. Если же в этом столбце интервалы сходятся, но принимают по абсолютной величине достаточно большие значения, то финальные вероятности лежат в некоторой σ —окрестности: $\overline{\lim_{t\to b}} p_i(t) \leq p_i^* + \sigma$; $\underline{\lim_{t\to b}} p_i(t) \geq p_i^* - \sigma$,

и такое явление носит название σ — фокусировки [2]. Полученная ниже оценка для параметра σ, характеризующая точность σ — фокусировки, произведена способом, отличным от способа, предложенного в [2].

Построим оценку параметра σ для σ - фокусировки процесса по заданной инфинитезимальной матрице $\Lambda(t)$ неоднородного марковского процесса, выразив ее через элементы инфинитезимальной матрицы, а не стохастической, как в [2]:

$$R_j(s_0,t_0) - r_j(s_0,t_0) \leq \prod_{k=1}^{N} [1 - \delta_j(s_{k-1},s_k)], \quad (1)$$

где $R_j(s_0,t_0) = \sup_i p_{ij}(s_0,t_0)$,

$$r_j(s_0,t_0) = \inf_i p_{ij}(s_0,t_0),$$

$$\delta_j(s_{k-1},s_k) = \inf_{i\neq j} p_{ij}(s_{k-1},s_k),$$

$s_0, s_1, \ldots, s_k, \ldots$ — такая последовательность моментов времени, что $s_k \in [s_0, t_0)$; $s_0 < s_1 < \ldots s_k < \ldots$; $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = t_0$.

По определению, $R_j(s_0, t_0) - r_j(s_0, t_0) = 2\sigma$. Для $i \neq j$ рассмотрим предел произведения (1) при $N \to \infty$, учитывая, что $p_{ij}(t, t+h) = \lambda_{ij}h + o(h)$:

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(1 - p_{ij}\left(t_0 + \frac{t-t_0}{N}(k-1), t_0 + \frac{t-t_0}{N}k\right)\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{t-t_0}{N}\lambda_{ij}\left(\frac{t-t_0}{N}(k-1) + t_0\right)\right) =$$

$$= \exp\left\{\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \ln\left(1 - \frac{t-t_0}{N}\lambda_{ij}\left(\frac{t-t_0}{N}(k-1) + t_0\right)\right)\right\}.$$

Поскольку $\ln(1-x) = -x + \bar{o}(x)$, то мы можем преобразовать последнее выражение к виду

$$\exp\left\{-\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{t-t_0}{N}\lambda_{ij}\left(t_0 + \frac{t-t_0}{N}(k+1)\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\int_{t_0}^{t} \lambda_{ij}(\tau)d\tau\right\}$$

Если теперь рассмотреть аналогичный предел для δ_j: $\lim\limits_{N\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{N} \left(1 - \delta_j\left(t_0 + \frac{t-t_0}{N}(k-1), t_0 + \frac{t-t_0}{N}k\right)\right)$,

то в каждой из рассматриваемых точек величина δ_j будет заменяться на соответствующее значение $p_{i_m j}(t_{k-1}, t_k)$, такое что

$$p_{i_m j}(t_{k-1}, t_k) = \min_{i\neq j} p_{ij}(t_{k-1}, t_k).$$

Следовательно, имеет место оценка

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \delta_j\left(t_0 + \frac{t-t_0}{N}(k-1), t_0 + \frac{t-t_0}{N}k\right)\right) \leq$$

$$\leq \exp\left\{-\int_{t_0}^{t} \min_{i\neq j} \lambda_{ij}(\tau)d\tau\right\}$$

Поскольку $p_j(s,t) \leq R_j(s,t)$ и $p_j(s,t) \geq r_j(s,t)$, то в зависимости от начального распределения вероятность нахождения процесса в состоянии j будет лежать между $r_j(s,t)$ и $R_j(s,t)$:

$$r_j(s,t) \leq \inf_{p_i(s)} p_j(s,t) \leq p_j(s,t) \leq \sup_{p_i(s)} p_j(s,t) \leq R_j(s,t),$$

где инфинум и супремум берутся по всем возможным распределениям в момент времени s. Тогда

$$\sup_{p_i(s)} p_j(s,t) - \inf_{p_i(s)} p_j(s,t) \leq \exp\left\{-\int_{s}^{t} \min_{i\neq j} \lambda_{ij}(\tau)d\tau\right\}. \quad (2)$$

Таким образом, из изложенного следует, что если $\int_{s}^{t} \min\limits_{i\neq j} \lambda_{ij}(\tau)d\tau > -\ln\sigma$, то будет иметь место σ-фокусировка. В частности, если расходится интеграл $\int_{s}^{t} \min\limits_{i\neq j} \lambda_{ij}(\tau)d\tau = \infty$, то в предельной точке t будет наблюдаться точная фокусировка.

Заметим, что максимальное расстояние между траекториями, соответствующими различным начальным распределениям, уменьшается с течением времени.

Литература: 1. *Дикарев В.А.* Фокусировка распределений марковских процессов // Доповіді Національної академії наук України. 1999. №11.С.100-103. **2.** *Дикарев В.А.* Точки фокусировки и теоремы о существовании предельных вероятностей. Харьков, 1995. 9с. Рус.— Деп. в ГНТБ Украины 28.02.95, №526 — Ук95. **3.** *Дикарев В.А.* Стабилизация вероятностей состояний марковского процесса при локальных возмущениях его фрагментов // Радиоэлектроника и информатика. 1999. №3. С. 134-136.

Поступила в редколлегию 10.10.2003

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Руденко О.Г.

Дикарев Вадим Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: функциональный анализ, стохастический анализ и его приложения. Адрес: Украина, 61164, Харьков, пр. Ленина, 66, кв. 21, тел. (0572) 33-57-03 (дом.), (057) 702-14-36 (раб.).

Евграфов Вячеслав Николаевич, аспирант кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей. Адрес: Украина, 62040, Дергачи, ул. Суворова, 7, тел.: (263) 3-33-61 (дом.).

Шершень Владислав Николаевич, аспирант кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: программирование, стохастический анализ и его приложения. Адрес: Украина, 61000, Харьков, ул. Целиноградская, 36.