

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО РАССЕИВАНИЯ ПОЛЯ НА КОНУСЕ С ПРОДОЛЬНЫМИ ЩЕЛЯМИ И ВНУТРЕННЕЙ ВСТАВКОЙ

Введение

В последнее время наблюдается повышенный интерес к изучению импульсного возбуждения структур, имеющих характерные угловые размеры. Структуры с угловыми размерами обладают широкополосными и сверхширокополосными свойствами [1-3], благодаря которым они успешно применяются в современных радиотехнических системах и устройствах, используемых в космической связи, радиолокации, телекоммуникациях, радиоизмерениях, а также для диагностики и лечения раковых заболеваний [4]. Наличие неоднородностей в виде щелей, угловых точек на поверхности рассеивающих структур расширяет круг их практических приложений, но усложняет решение соответствующих модельных начально-краевых задач математической физики. Существующие численно-аналитические методы решения таких задач базируются на применении преобразований Фурье и Лапласа с последующим обращением решения в частотной области. Однако в связи с высокой сложностью процедуры обращения и существенной потерей точности при ее использовании далеко не всегда удается получить достоверное решение. Современные численные методы также малоэффективны, поскольку решение, полученное с их помощью, необходимо сравнивать с аналитическими строгими решениями в частных случаях либо с результатами эксперимента, что далеко не всегда возможно.

Цель данной работы – исследование задачи рассеяния поля нестационарного источника на полубесконечном идеально проводящем конусе с продольными щелями и внутренней вставкой с помощью строгого аналитико-численного метода, основанного на применении интегрального преобразования Мелера-Фока и методов теории функций комплексного переменного [5]. При решении нестационарных (во временной области) электродинамических задач с применением этого метода вышеуказанные недостатки отсутствуют.

Постановка задачи. Функциональные уравнения

Рассмотрим задачу возбуждения конической структуры электрическим радиальным диполем. Полубесконечная идеально проводящая бесконечно тонкая круговая коническая структура Σ состоит из двух коаксиальных конусов ($\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$), один из которых сплошной (Σ_1), а другой конус (Σ_2) – с периодически прорезанными вдоль образующих N щелями (рис. 1). Через $2\gamma_1$ и $2\gamma_2$ обозначены углы раскрыва конусов Σ_1 и Σ_2 соответственно; d_1 – ширина щелей конуса Σ_2 , $l = 2\pi/N$ – период конической структуры.

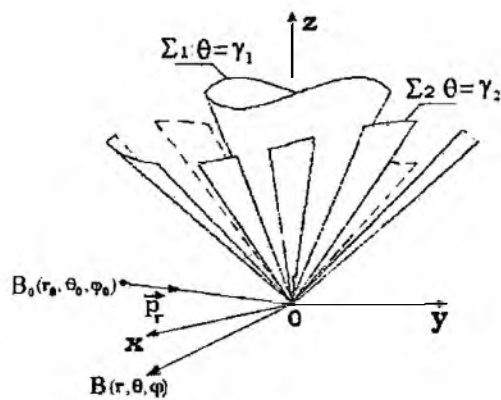


Рис. 1

Во введенной сферической системе координат $(\vec{r}, \theta, \varphi)$ конус Σ_1 определяется уравнением $\theta = \gamma_1$. Коническая структура возбуждается электрическим радиальным диполем с моментом $\vec{P}_r^{(1)}(\vec{r}, t) = M_r^{(1)} \vec{e}_r \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) f(t - t_0)$ и расположенным в точке $B_0(\vec{r}_0)$, где $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ – дельта-функция, а функция $f(t - t_0)$ определяет зависимость поля источника от времени, причем $f(t - t_0) \equiv 0$, $t < t_0$ (источник включается в момент времени $t = t_0$).

Требуется найти электромагнитное поле в присутствии конуса и источника, удовлетворяющее: уравнениям Максвелла, краевому условию на поверхности конической структуры, условию причинности, условию ограниченности энергии (наличие ребер и угловых точек на поверхности Σ).

Электродинамическая задача в такой постановке имеет единственное решение [6]. Для решения электродинамической задачи удобно использовать потенциал Дебая $v^{(1)}$, через который выражаются составляющие электромагнитного поля по формулам:

$$E_r = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \cdot (r v^{(1)}), \quad H_r = 0, \quad (1)$$

$$E_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \cdot (r v^{(1)}), \quad H_\theta = \frac{\varepsilon}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial t} \cdot v^{(1)}, \quad (2)$$

$$E_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \cdot (r v^{(1)}), \quad H_\varphi = -\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial t} \cdot v^{(1)}. \quad (3)$$

Введенный в (1)-(3) потенциал Дебая $v^{(1)}$ удовлетворяет: четырехмерному волновому уравнению, краевому условию на поверхности конической структуры, начальному условию, условию ограниченности энергии.

Искомое поле представим в виде

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0(\vec{r}, t) + \vec{H}_1(\vec{r}, t), \quad (4)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}, t) + \vec{E}_1(\vec{r}, t) \quad (5)$$

где $\vec{E}_0(\vec{r}, t), \vec{H}_0(\vec{r}, t)$ – поле источника, $\vec{E}_1(\vec{r}, t), \vec{H}_1(\vec{r}, t)$ – поле, обусловленное присутствием конической структуры (рассеянное поле). В соответствии со структурой поля (4), (5) потенциал $v^{(1)}(\vec{r}, t)$ запишем так:

$$v^{(1)}(\vec{r}, t) = v_0^{(1)}(\vec{r}, t) + v_1^{(1)}(\vec{r}, t),$$

где $v_0^{(1)}(\vec{r}, t)$ – потенциал источника, $v_1^{(1)}(\vec{r}, t)$ – соответствующий рассеянному полю искомый потенциал Дебая, который записываем в виде интеграла Мелера-Фока [7, 8]:

$$v_1^{(1)}(\vec{r}, t) = \frac{a M_r^{(1)}}{4\pi r r_0^2 \varepsilon} \eta \left(t - t_0 - \frac{r + r_0}{a} \right) \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m e^{-im\varphi_0} \int_0^\infty \tau / \pi \tau \frac{\Gamma(1/2 - m + i\tau)}{\Gamma(1/2 - m + i\tau)} \hat{b}_{m,\tau}^{(1),p} \hat{U}_{m,\tau}^{(1)}(\theta, \varphi) \Phi_{\tau,\tau}(t, r) d\tau.$$

$$\Phi_{\tau,\tau}(t, r) = \int_{\frac{r-r_0}{a}}^{t-t_0} s(t-t_0-z) P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(chb(z)) dz, \quad chb(z) = \frac{a^2 z^2 - r^2 - r_0^2}{2rr_0}.$$

$$\hat{U}_{m,\tau}^{(1)} = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\tilde{\beta}_{m,n}^{(1)} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos \theta) + \tilde{\xi}_{m,n}^{(1)} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(-\cos \theta) \right] \cdot e^{i(m-nN)\varphi}, & \gamma_1 < \theta < \gamma_2, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\eta}_{m,n}^{(1)} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(-\cos \theta) e^{i(m+nN)\varphi}, & \gamma_2 < \theta < \pi. \end{cases}$$

где $\Gamma(y)$ – гамма-функция, $P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos \theta)$ – функция Лежандра 1-го рода, $\hat{b}_{m,\tau}^{(1),p}$ – известные коэффициенты. Нахождение неизвестных коэффициентов, входящих в функцию $\hat{U}_{m,\tau}^{(1)}$ в силу соотношений между ними сводится к нахождению коэффициентов $\tilde{\eta}_{m,n}^{(1)}$.

Функциональные уравнения для нахождения неизвестных коэффициентов $\tilde{\eta}_{m,n}^{(1)}$ получены из условия непрерывности поля в щелях и краевого условия на лентах конуса, удовлетворяющие системе функциональных уравнений $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{y}_{m,n}^{(1)} e^{inN\varphi} = e^{im_0 N \varphi}$ (секторы Σ_2),

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [N(n+\nu)]^{\beta(1)} \frac{|n|}{n} (1 - \tilde{\varepsilon}_{m_0,2}^{(1)}) \tilde{y}_{n,n}^{(1)} e^{inN\varphi} = [N(m_0 + \nu)]^{\beta(1)} \frac{|m_0|}{m_0} (1 - \tilde{\varepsilon}_{m_0,2}^{(1)}) \tilde{C}_{\tau}^{(1),m}(\gamma_1, \gamma_2) e^{im_0 N \varphi} \quad (\text{щели } \Sigma_2),$$

где

$$\tilde{y}_{m,n}^{(1)} = \tilde{\eta}_{m,n}^{(1)} P_{-1/2+i\tau}^{(n+\nu)N}(-\cos \gamma_2).$$

Полученные функциональные уравнения на лантах конуса и на щелях можно интерпретировать как систему уравнений первого рода, которая, как правило, является неустойчивой. Существующие методы решения таких систем, в частности, основаны на привлечении аппарата сингулярных интегральных уравнений. Другой подход к решению такой системы базируется на использовании процедуры аналитической регуляризации, а также метода задачи Римана-Гильберта [9, 10], решение которой известно. Вследствие применения процедуры регуляризации получается система линейных алгебраических уравнений вида $Y = AY + B$, где A – вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве ℓ_2 . Это свойство дает возможность использования метода редукции для решения системы линейных алгебраических уравнений второго рода фредгольмовского типа (СЛАУ-2) [9, 11].

Сплошной идеально проводящий конус

В этом случае потенциал Дебая, соответствующий рассеянному полю, принимает вид

$$U_1^{(1)}(\bar{r}, t) = \frac{1}{r} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} \int_0^{\infty} \tilde{\kappa}_{it}^{(1),m} \frac{P_{\frac{1}{2}+it}^m(\cos \gamma_1)}{P_{\frac{1}{2}+it}^m(-\cos \gamma_1)} P^m(-\cos \theta_0) \times P_{-1/2+it}^m(-\cos \theta) \Phi_{it}(t, r) d\tau, \gamma_1 < \theta < \pi,$$

где $\tilde{\kappa}_{it}^{(1),m} = \frac{(-1)^{m-1} a M_r^{(1)}}{4\pi r_0^2 \epsilon \mu} e^{-im\varphi_0} i h \pi \tau \frac{\Gamma(0.5 - m + i\tau)}{\Gamma(0.5 + m + i\tau)}$.

Если источник расположен на оси конуса ($\theta_0 = \pi$), выражение для $U_1^{(1)}(\bar{r}, t)$ упрощается:

$$U_1^{(1)}(\bar{r}, t) = \int_0^{\infty} \tilde{\kappa}_{it}^{(1),0} \frac{P_{\frac{1}{2}+it}(\cos \gamma_1)}{P_{\frac{1}{2}+it}(-\cos \gamma_1)} P_{\frac{1}{2}+it}(-\cos \theta) \Phi_{it}(t, r) d\tau, \gamma_1 < \theta < \pi.$$

В предположении, что $f(t) = \delta(t)$, имеем

$$U_{1cn,m}^{(1)} = -\frac{a \tilde{p}_1}{4\pi r r_0^2} \int_0^{\infty} \tau i h \pi \tau \frac{P_{\frac{1}{2}+it}(\cos \gamma)}{P_{\frac{1}{2}+it}(-\cos \gamma)} P_{\frac{1}{2}+it}(-\cos \theta) P_{\frac{1}{2}+it}(chb(t)) d\tau,$$

а одна из составляющих электрического поля записывается так:

$$E_{\theta,1}^{(1)} = -\frac{a \tilde{p}_1}{2\pi r r_0} \int_0^{\infty} \tau (i\tau + 0.5)(\tau^2 + 0.25) i h \pi \tau \frac{P_{\frac{1}{2}-it}(\cos \gamma)}{P_{\frac{1}{2}+it}(-\cos \gamma)} P^{-1}(-\cos \theta) \times \times \frac{r_0^2 - a^2 t^2 - r^2}{[a^2 t^2 - (r + r_0)^2][a^2 t^2 - (r - r_0)^2]} \left\{ P_{\frac{1}{2}+it}(chb(t)) - chb(t) P_{\frac{1}{2}-it}(chb(t)) \right\} d\tau. \quad (6)$$

Проведен анализ зависимостей действительной и мнимой частей одной из составляющих E_{θ} электрического поля от временного параметра при фиксированных расстояниях от источника до вершины конуса r_0 , расстоянии от вершины конуса до точки наблюдения r , угла полураскрыва конуса γ , угла нутации точки наблюдения θ при условии, что $\theta > 2\gamma$ и $t > \frac{r+r_0}{a}$, где a – скорость распространения сигнала в среде.

В соответствии с формулой (6) для E_{θ} проведен расчет вышеуказанной зависимости при условии, что $\gamma = 22.5$, $\theta = 60$, $r = 1$, $r_0 = 0.5$, $a = 1$.

На рис. 2 дана зависимость $\text{Re } E_{\theta}$ отраженного от вершины конуса импульса от параметра

$$\xi = \frac{at}{r+r_0} \quad (\xi > 1).$$

При $\xi > 1.1$ поле практически равно нулю. Это согласуется с принципом причинности и соответствует тому, что отраженный импульс полностью прошел точку наблюдения.

На рис. 3 приведена зависимость $\text{Re } E_\theta$ отраженного от вершины конуса импульса от r . Поскольку сингулярной точкой поверхности конуса является его вершина, электромагнитное поле вблизи вершины при возбуждении конуса электрическим диполем имеет особенность. Из рис. 3 видно возрастание $\text{Re } E_\theta$ при приближении к вершине, т.е. при $r \rightarrow 0$, что согласуется с поведением поля вблизи вершины.

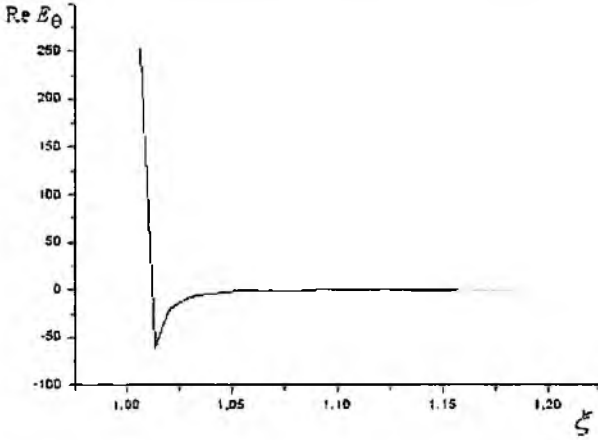


Рис. 2

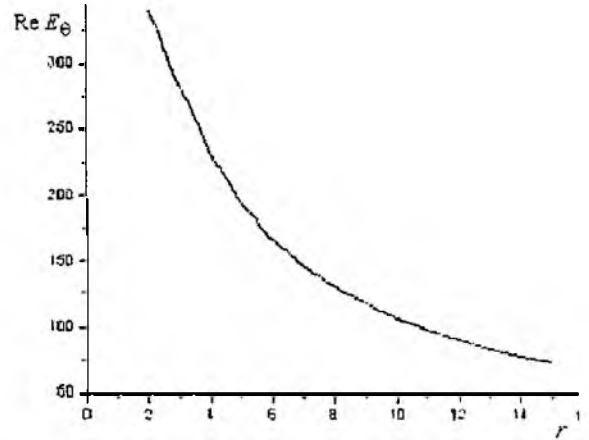


Рис. 3

Идеально проводящий конус с продольными щелями

В этом случае функция $\hat{U}_{m,\tau}^{(1)}(\theta, \varphi)$ имеет вид $\hat{U}_{m,\tau}^{(1)}(\theta, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{m,n+m_0}^{(1)} \frac{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\pm \cos \theta)}{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\pm \cos \gamma)} e^{i(m+n)\varphi}$,

где $x_{m,n+m_0}^{(1)}$ – неизвестные коэффициенты, $\frac{m}{N} = m_0 + \nu$, m_0 – ближайшее целое к $\frac{m}{N}$, $-1/2 \leq \nu \leq 1/2$. Знак «+» соответствует области $0 < \theta < \gamma$, а «-» – области $\gamma < \theta < \pi$.

При осесимметричном возбуждении ($\theta_0 = \pi$, $m = 0$) имеем

$$v_1^{(1)}(\bar{r}, t) = \frac{aM_r^{(1)}}{4\pi r r_0^2 \varepsilon_0} \int_0^\pi \tau h \pi \tau \bar{b}_{0,\tau}^{(1),p} \hat{U}_{0,\tau}^{(1)}(\theta, \varphi) \Phi_\tau(t, \bar{r}) d\tau, \quad t - t_0 > \frac{r + r_0}{a}.$$

При $N = 1$ (в случае конуса с одной продольной щелью) получаем

$$U_{0,\tau}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^{(1)} \frac{P_{-1/2+i\tau}^n(\pm \cos \theta)}{P_{-1/2+i\tau}^n(\pm \cos \gamma)} e^{in\varphi},$$

$$\bar{b}_{0,\tau}^{(1),p} = \hat{U}_{0,\tau}^{(1)}(\theta, \theta_0) \Big|_{\theta_0=\pi} = P_{-1/2+i\tau}^p(\cos \gamma), \quad \gamma < \theta_0, \quad p = 3, \quad \frac{M_r^{(1)}}{\varepsilon} = \bar{p}_1.$$

Тогда

$$v_1^{(1)}(\bar{r}, t) = \frac{a\bar{p}_1}{4\pi r r_0^2} \int_0^\pi \tau h \pi \tau P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma) \hat{U}_{0,\tau}^{(1)}(\theta, \varphi) \Phi_\tau(t, \bar{r}) d\tau, \quad E_{\theta,1}^{(1)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r v_1^{(1)}),$$

$$E_{\theta,1}^{(1)} = \frac{a\bar{p}_1}{4\pi r r_0^2} \int_0^\pi \tau h \pi \tau P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma) \frac{d}{d\theta} \hat{U}_{0,\tau}^{(1)}(\theta, \varphi) \frac{d}{dr} \Phi_\tau(t, r) d\tau.$$

При $\gamma < \theta < \pi$, $f(t) = \delta(t)$, $t_0 = 0$ получаем

$$E_{\theta,1}^{(1)} = \frac{a\bar{p}_1}{4\pi r r_0^2} \int_0^\pi \tau h \pi \tau P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma) \frac{d}{d\theta} \hat{U}_{0,\tau}^{(1)}(\theta, \varphi) \frac{d}{dr} P_{-1/2+i\tau}(chb(t)) d\tau.$$

На основании найденного решения системы линейных алгебраических уравнений второго рода фредгольмовского типа изучено распределение составляющей электрического поля E_0 в зависимости от временного параметра и ширины щели (рис. 4-7)

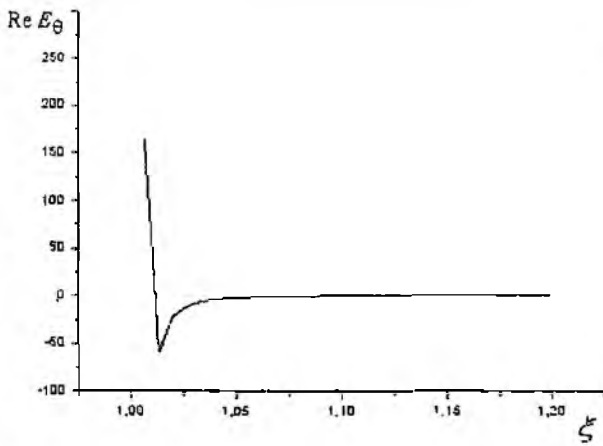


Рис. 4

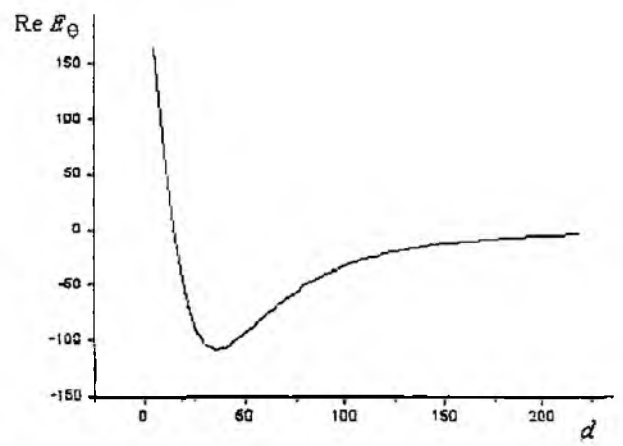


Рис. 5

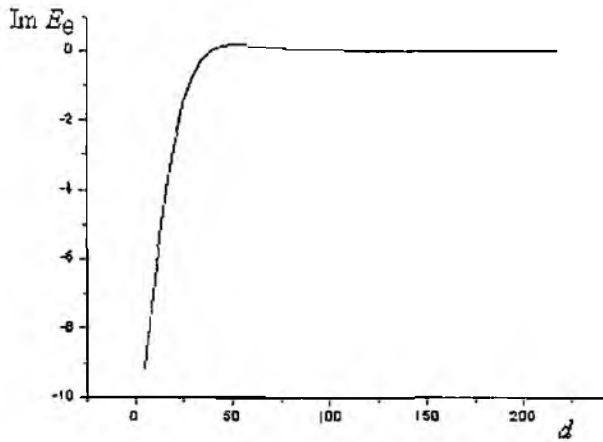


Рис. 6

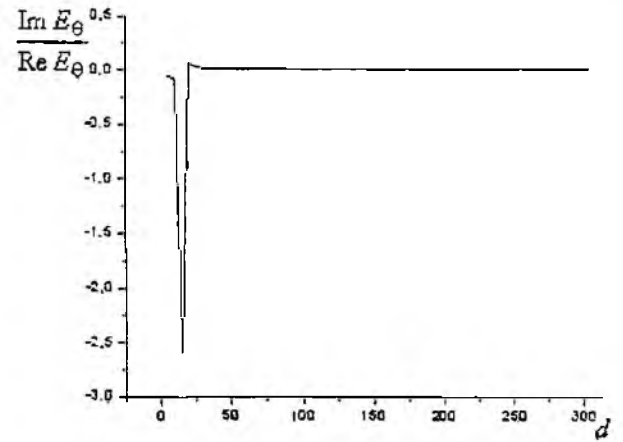


Рис. 7

На рис. 4–7 приведены зависимости при следующих значениях параметров: $t > 1.5$, $\gamma = 22.5^\circ$, $\theta = 60^\circ$, $r = 1$, $r_0 = 0.5$, $a = 1$.

На рис. 4 представлена зависимость $\text{Re } E_0$ отраженного от вершины конуса импульса от параметра ξ при $d = 5^\circ$ в плоскости $\varphi = 0$, которая проходит через ось конуса и середину щели. Из рис. 4 можно заключить, что наличие щели до 3° несущественно влияет на распределение по сравнению с распределением поля в случае сплошного конуса.

На рис. 5 дана зависимость $\text{Re } E_0$ отраженного от вершины конуса импульса от ширины щели. Видна тенденция изменения $\text{Re } E_0$, заключающаяся в том, что при расширении щели в пределах от 5° до 30° наблюдается выраженный минимум, после чего $\text{Re } E_0$, оставаясь отрицательным, возрастает, и при $d = 330^\circ$ является малым. Это объясняется тем, что с увеличением ширины щели поверхность конуса сужается, и в предельном случае, когда $d \rightarrow 360^\circ$ конус вообще исчезает, а вместе с ним исчезает и рассеянное поле.

На рис. 6 дано распределение $\text{Im } E_0$ отраженного от вершины конуса импульса в зависимости от ширины щели. При увеличении щели $|\text{Im } E_0|$ убывает, и при $d > 330^\circ$ его величина пренебрежимо мала.

На рис. 7 приведена кривая отношений $\frac{\text{Im } E_0}{\text{Re } E_0}$ в зависимости от ширины щели d_2 , которая определяет фазу составляющей E_0 электрического поля.

Заключение

Проведено исследование в строгой постановке задачи возбуждения импульсным источником сложной идеально проводящей конической поверхности с продольными периодически прорезанными вдоль образующих щелями и внутренним сплошным конусом. На основании потенциалов Дебая и интегрального преобразования Мелера–Фока показано, что электродинамическая начально-краевая задача для незамкнутого конуса эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений второго рода фредгольмовского типа относительно коэффициентов Фурье разложения составляющих поля по азимутальной пространственной координате. Найдено аналитическое решение задачи осесимметричного возбуждения дельтаобразным импульсом одиночного сплошного конуса и изучено распределение поля в зависимости от временного параметра. Проведен численный анализ решения задачи для конуса с продольной щелью, а также распределения рассеянного поля в случае незамкнутого конуса. Полученные результаты могут быть использованы при разработке и проектировании современных радиолокационных комплексов, использующих структуры, обладающие широкополосными и сверхширокополосными свойствами. Использованный при решении электродинамической задачи строгий аналитико-численный метод может быть также применен при исследовании начально-краевых задач с клиноподобной геометрией.

Список литературы: 1. Астанин Л.Ю., Костылев А.А. Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений. М.: Радио и связь, 1989. 191с. 2. Айзенберг Г.З., Белоусов С.П., Журбенко Э.М. и др. Коротковолновые антенны. М.: Радио и связь, 1985. 536с. 3. Mertel Th.W., Smith G.S. On the dispersive properties of the conical spiral antenna and its use for pulsed radiation // IEEE Trans. on Antennas and Propagation, vol. 51, №7, 2003. p. 1426-1433. 4. Подосенов С.А., Потатов А.А., Соколов А.А. Импульсная электродинамика широкополосных радиосистем и поля связанных структур. М: Радиотехника, 2003. 720с. 5. Doroshenko V.A., Kravchenko V.F., Pustovoi V.I. Meler-Fock transformations in problems of wave diffraction on unclosed structures in the time region // Doklady Physics. 2005, No. 11. P. 560-564. 6. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. М.: Высш. шк., 1991. 224 с. 7. Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф. Рассеяние поля электрического диполя на конической структуре с продольными щелями // Радиотехника и электроника. 2000. Т.45, N7. С.792-798. 8. Диткин В.А., Пруонилов А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М: Наука, 1974. 543 с. 9. Шестопалов В.П. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. 400 с. 10. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с. 11. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.

Харьковский национальный
университет радиозлектроники

Поступила в редакцию 10.01.2008