УДК 621.372

*В. В. ОВЧАРЕНКО*, канд. техн. наук, *В. И. АНТЮФЕЕВ*, канд. техн. наук,
*Н. П. МАКАРУЩЕНКО*, канд. физ.-мат. наук

# ОДНОМЕРНАЯ ОБОБЩЕННАЯ ВНУТРЕННЯЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Классическая внутренняя задача электродинамики — это задача о нахождении решений уравнения Максвелла в области $\Omega \subset R^3$, ограниченной идеально проводящей оболочкой $S$, с граничным условием $\boldsymbol{E}_\tau = 0$ на $S$[1]. Величина $\boldsymbol{E}_\tau$ — касательная к $S$ составляющая электрического поля $\boldsymbol{E}$. Указанные решения образуют подмножество множества решений более общей граничной задачи $\boldsymbol{\Pi}_\nu = 0$ на $S$, где $\boldsymbol{\Pi}_\nu$ — нормальная к $S$ составляющая вектора Умова — Пойнтинга $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{H}$ — напряженность магнитного поля. Условие $\boldsymbol{\Pi}_\nu|_S = 0$ означает, что энергия электромагнитного поля не выходит за пределы области $\Omega$. Нелинейность граничного условия приводит к существенным отличиям решений рассматриваемой задачи от классических. Исследуем множество решений одномерной внутренней задачи электродинамики с граничным условием $\boldsymbol{\Pi}_\nu|_S = 0$, которая названа авторами обобщенной. Такая постановка задачи имеет смысл: в среде с $\varepsilon = \infty$ или $\mu = \infty$ существование и распространение электромагнитного поля невозможно, поэтому на границе раздела с такой средой приведенное условие должно выполняться.

Рассмотрим область, представляющую собой слой $\Omega = \{x, y, z \in R^3$; $0 \leqslant x \leqslant d$, $-\infty < y, z < \infty\}$. Требуется найти гармонические решения уравнений Максвелла в слое $\Omega$, зависящие от одной пространственной координаты $x$ и удовлетворяющие граничному условию $\Pi_x(0, t) = 0$, $\Pi_x(d, t) = 0$ **(1)**. Для гармонических электромагнитных полей уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{H}} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\boldsymbol{E}} \quad (2); \qquad \operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{E}} = -i\omega\mu_0\mu\dot{\boldsymbol{H}} \quad (3);$$
$$\operatorname{div} \dot{\boldsymbol{E}} = 0 \quad (4); \qquad \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{H}} = 0 \quad (5).$$

Здесь $\dot{\boldsymbol{E}}$, $\dot{\boldsymbol{H}}$ — комплексные векторные амплитуды электрического и магнитного полей $\boldsymbol{E}(x, t)$, $\boldsymbol{H}(x, t)$.

Запишем систему (2), (3) в координатной форме:

$$\begin{aligned} &\dot{E}_1 = 0, \quad -\frac{d\dot{H}_3}{dx} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{E}_2, \quad \frac{d\dot{H}_2}{dx} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{E}_3; \\ &\dot{H}_1 = 0, \quad \frac{d\dot{E}_3}{dx} = i\omega\mu_0\mu\dot{H}_2, \quad \frac{d\dot{E}_2}{dx} = -i\omega\mu_0\mu\dot{H}_3. \end{aligned} \qquad (6)$$

Так как $\dot{E}_1 = \dot{H}_1 = 0$, уравнения (4), (5) удовлетворяются при любых функциях $\dot{E}_2$, $\dot{E}_3$, $\dot{H}_2$, $\dot{H}_3$. Совокупность уравнений (6) распадается на две независимые системы обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\dot{E}_2}{dx} = -i\omega\mu_0\mu\dot{H}_3; \qquad \frac{d\dot{E}_3}{dx} = i\omega\mu_0\mu\dot{H}_2;$$
$$\frac{d\dot{H}_3}{dx} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{E}_2; \qquad \frac{d\dot{H}_2}{dx} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{E}_3.$$

Запишем общее решение:

$$\dot{E}_2(x) = W(-Ae^{ikx} + Be^{-ikx}) \quad (7); \qquad \dot{H}_3(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}; \quad (8)$$
$$\dot{E}_3(x) = W(Ce^{ikx} - De^{-ikx}) \quad (9); \qquad \dot{H}_2(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}. \quad (10)$$

Здесь $k = \omega\sqrt{\mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon}$ (11); $W = (\mu_0\mu)^{1/2}(\varepsilon_0\varepsilon)^{-1/2}$; $A$, $B$, $C$, $D$ — произвольные комплексные числа; $\varepsilon_0$ — электрическая постоянная; $\mu_0$ — магнитная постоянная; $\varepsilon$, $\mu$ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды в области $\Omega$.

Таким образом, множество решений уравнений Максвелла представляет собой четырехмерное комплексное векторное пространство $F$ в бесконечномерном пространстве дифференцируемых электромагнитных полей в области $\Omega$, изоморфное четырехмерному комплексному арифметическому пространству $C^4$, т. е. $F \simeq C^4$.

Учет нелинейных граничных условий (1) приводит к появлению сплошной части спектра оператора Максвелла и расщеплению дискретной части на несколько конечномерных подпространств или подмногообразий. Множество решений $F$ распадается на девять подмножеств: $F_{EE}$, $F_{EH}$, $F_{E\Pi}$, $F_{HE}$, $F_{HH}$, $F_{H\Pi}$, $F_{\Pi E}$, $F_{\Pi H}$, $F_{\Pi\Pi}$ (12). В данных обозначениях использовано правило индексации, поясняемое на примере множества $F_{EH} : F_{EH} = \{(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}) \in F \mid \boldsymbol{E}(0, t) = 0, \boldsymbol{H}(d, t) = 0\}$.

Поскольку вектор $\boldsymbol{\Pi}(x, t)$ через комплексные амплитуды $\dot{\boldsymbol{E}}$, $\dot{\boldsymbol{H}}$ выражается как [1]

$$\boldsymbol{\Pi}(x, t) = \frac{1}{4}\{\mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{E}}(x) \times \dot{\boldsymbol{H}}(x)e^{i2\omega t}] + \mathrm{Re}[\dot{\boldsymbol{E}}(x) \times \dot{\boldsymbol{H}}^*(x)]\},$$

то, учитывая (7) — (10), получаем

$$\Pi_x(x, t) = \frac{W}{4}[-|A|^2 - |C|^2 + |B|^2 + |D|^2 - |A^2 + C^2|\cos 2(\omega t + p + kx) + |B^2 + D^2|\cos 2(\omega t + q - kx), \quad (13)$$

где $2p = \arg(A^2 + C^2)$, $2q = \arg(B^2 + D^2)$. Так как $\dot{E}_1 = 0$ и $\dot{H}_1 = 0$, вектор $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ имеет лишь одну компоненту $\Pi_x$, поэтому граничное условие $\Pi_\nu|_S = \Pi_x|_S = 0$ заменим условием $\boldsymbol{\Pi}|_S = 0$. Таким образом, множество $F_{\Pi\Pi}$ определяется условием $\boldsymbol{\Pi}(0, t) = 0$, $\boldsymbol{\Pi}(d, t) = 0$. Отсюда следует, что каждое множество совокупности (12) содержится в $F_{\Pi\Pi}$. Перейдем к описанию ограничений, которые накладывают различные граничные условия на константы $A$, $B$, $C$, $D$, $k$.

Запишем условие $\mathbf{\Pi}(0, t) = 0$, $\mathbf{\Pi}(d, t) = 0$, использовав выражение (13):

$$-|A|^2 - |C|^2 + |B|^2 + |D|^2 - |A^2 + C^2|\cos 2(\omega t + p) + \\ + |B^2 + D^2|\cos 2(\omega t + q) = 0;$$
$$-|A|^2 - |C|^2 + |B|^2 + |D|^2 - |A^2 + C^2|\cos 2(\omega t + p + kd) + \\ + |B^2 + D^2|\cos 2(\omega t + q - kd).$$

Отсюда следуют равенства

$$-|A|^2 - |C|^3 + |B|^2 + |D|^2 = 0; \tag{14}$$
$$-|A^2 + C^2|\cos 2p + |B^2 + D^2|\cos 2q = 0; \tag{15}$$
$$|A^3 + C^2|\sin 2p - |B^2 + D^2|\sin 2q = 0; \tag{16}$$
$$-|A^2 + C^2|\cos 2(p + kd) + |B^2 + D^2|\cos 2(q - kd) = 0; \tag{17}$$
$$|A^2 + C^2|\sin 2(p + kd) - |B^2 + D^2|\sin 2(q - kd) = 0. \tag{18}$$

Соотношения (15), (16) означают, что $A^2 + C^2 = B^2 + D^2$ **(19)**. Используя (15), (16), из уравнений (17), (18) находим

$$|A^2 + C^2|\cos 2p \sin 2kd = 0, \quad |A^2 + C^2|\sin 2p \sin 2kd = 0$$
$$\text{или } (A^2 + C^2)\sin 2kd = 0.$$

Если $A^2 + C^2 = B^2 + D^2 \neq 0$, имеем дискретный спектр, описываемый равенствами $kd = \pi n/2$, $n \in Z$ **(20)**, где $Z$ — множество целых чисел. Если $A^2 + C^2 = B^2 + D^2 = 0$, получим сплошной спектр: $k$ принимает любые вещественные значения.

Для гармонических полей $\boldsymbol{E} = 0$ тогда и только тогда, когда $\dot{\boldsymbol{E}} = 0$, поэтому, используя условие $\dot{\boldsymbol{E}}(d) = 0$, согласно (7), (8) имеем $B = Ae^{i2kd}$, $D = Ce^{i2kd}$ **(21)**. Подставляя выражения (21) в соотношение (19), для полей из множества $F_{\Pi E}$ находим соотношения (20). Электромагнитные поля из пространства $F_{\Pi H}$ характеризуются равенствами $B = -Ae^{i2kd}$, $D = -Ce^{i2kd}$, подставляя которые в тождество (19) выводим формулы (20).

Дискретные спектры, отвечающие пространствам $F_{EE}$, $F_{EH}$, $F_{E\Pi}$, $F_{HE}$, $F_{HH}$, $F_{H\Pi}$, а также соотношения между постоянными $A$, $B$, $C$, $D$ приведены в таблице. Собственные частоты находим из формулы (11).

Все множества $F_{ij}$, кроме $F_{\Pi\Pi}$, являются двумерными комплексными подпространствами, лежащими в четырехмерном комплексном подпространстве $F$. Множество $F_{\Pi\Pi}$ — некомпактное трехмерное комплексное многообразие, лежащее в $F$. Из таблицы видно, что все дискретные спектры можно записать в виде $kd = 0{,}5\pi m$, где $m$ — четные, нечетные или произвольные числа из множества целых чисел $Z$. Если $m$ четное, имеют место равенства $F_{EE} = F_{E\Pi} = F_{\Pi E}$ **(22)**, $F_{HH} = F_{H\Pi} = F_{\Pi H}$ **(23)**. Если $m$ нечетное, то $F_{EH} = F_{E\Pi} = F_{\Pi H}$ **(24)**, $F_{HE} = F_{H\Pi} = F_{\Pi H}$ **(25)**. Согласно данным таблицы пространства (22), (24) описываются соотношениями

$$\dot{E}_2(x) = -2WAi\sin kx, \qquad \dot{H}_3(x) = 2A\cos kx;$$
$$\dot{E}_3(x) = 2WC\sin kx, \qquad \dot{H}_2(x) = 2Ci\cos kx, \tag{26}$$

но с различными $\kappa$. Решения (22), (24) характеризуются соответственно четным и нечетным числом четвертей волн, укладывающихся на длине $d$. Аналогично пространства (23), (25) описываются формулами

$$\begin{aligned} \dot E_2(x) &= -2WA\cos kx, & \dot H_3(x) &= 2Ai\sin kx; \\ \dot E_3(x) &= 2WC\cos kx, & \dot H_2(x) &= 2Ci\sin kx, \end{aligned} \tag{27}$$

но с различными $k$. Решения (23), (25) также характеризуются четным и нечетным числом четвертей волн, которые укладываются на длине $d$. В силу произвольности констант $A$, $C$ в формулах (26), (27) отрицательные $k$ не рассматриваются.

Итак, для каждого натурального $m$ имеем два собственных линейных подпространства, описываемых соотношениями (26), (27), и одно собственное многообразие $M$, характеризуемое общими формулами (7) — (10), при условиях $|A|^2+|C|^2=|B|^2+|D|^2$, $A^2+C^2=B^2+D^2$, $B\neq\pm A$, $D\neq\pm C$. Решения из линейных подпространств удовлетворяют граничному условию $\Pi|_S=0$ ввиду обращения в нуль поля $\boldsymbol{E}$ или $\boldsymbol{H}$, а для многообразия $M$ характерна коллинеарность векторов $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$.

| $F_{ij}$ | $B, D$ | | $kd$ |
|---|---|---|---|
| $F_{EE}$ | $B=A,\ D=C$ | | $\pi n$ |
| $F_{EH}$ | $B=A,\ D=C$ | | $0{,}5\pi+\pi n$ |
| $F_{E\Pi}$ | $B=A,\ D=C$ | | $0{,}5\pi n$ |
| $F_{HE}$ | $B=-A,\ D=-C$ | | $0{,}5\pi+\pi n$ |
| $F_{HH}$ | $B=-A,\ D=-C$ | | $\pi n$ |
| $F_{H\Pi}$ | $B=-A,\ D=-C$ | | $0{,}5\pi n$ |
| $F_{\Pi E}$ | $B=(-1)^n A,\ D=(-1)^n C$ | | $0{,}5\pi n$ |
| $F_{\Pi H}$ | $B=(-1)^{n+1}A,\ D=(-1)^{n+1}C$ | | $0{,}5\pi n$ |
| $F_{\Pi\Pi}$ | $\lvert A\rvert^2+\lvert C\rvert^2=\lvert B\rvert^2+\lvert D\rvert^2$ | $A^2+C^2=B^2+D^2\neq 0$ | $0{,}5\pi n$ |
| | | $A^2+C^2=B^2+D^2=0$ | Любое |

Решения из линейных подпространств — это хорошо известные многократно отражающиеся от параллельных стенок эллиптически поляризованные волны с ортогональными векторами $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$. В то же время решения из многообразия $M$ обладают новыми свойствами, а именно, на границе области у них векторы $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ коллинеарны, а при отходе от границ угол между $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ не равен нулю и изменяется во времени. Например, если $B=C=0$, $A=D=H_0$ и $m=1$, имеем

$$\begin{aligned} \dot E_2(x) &= -WH_0e^{i\pi x/2d}, & \dot H_2(x) &= \dot H_2 e^{-i\pi x/2d}; \\ \dot E_3(x) &= -WH_0e^{-i\pi x/2d}, & \dot H_3(x) &= H_0e^{i\pi x/2d}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\dot E_2(0) = -H_0W,\ \dot H_2(0) = H_0, && \dot E_2(d) = -H_0Wi, && \dot H_2(d) = -H_0 i; \\ &\dot E_3(0) = -H_0W,\ \dot H_3(0) = H_0, && \dot E_3(d) = H_0Wi, && \dot H_3(d) = H_0 i; \\ &\dot E_2(d/2) = -H_0We^{i\pi/4}, && \dot H_2(d/2) = H_0e^{-i\pi/4}; && \\ &\dot E_3(d/2) = -H_0We^{-i\pi/4}, && \dot H_3(d/2) = H_0e^{i\pi/4}. && \end{aligned}$$

Следовательно,

$$E_2(d/2,\ t) = -H_0W\cos(\omega t + \pi/4), \quad H_2(d/2,\ t) = H_0\cos(\omega t - \pi/4);$$

$$E_3\left(\frac{d}{2},t\right) = -H_0W\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right), \quad H_3\left(\frac{d}{2},t\right) = H_0\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Эти формулы описывают круговую поляризацию векторов $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ с противоположным направлением их вращения.

Особого внимания заслуживает подмногообразие $M_0 \subset M$, определяемое равенствами $A^2 + C^2 = 0$, $B^2 + D^2 = 0$ (28). При этих условиях из формулы (13) следует, что функции подмногообразия $M_0$ обладают свойством $\boldsymbol{\Pi} = 0, \forall x \in \Omega$, т.е. описывают электромагнитные поля с неподвижной энергией. Выясним их свойства. Из равенства (28) получаем $C = \pm iA$, $D = \pm iB$ (29). Следовательно, $M_0$ распадается на четыре подпространства. Рассмотрим случай $C = iA$, $D = iB$. Заметим, что из (29) и (14) следуют равенства $|A| = |B| = |C| = |D|$ для четырех вариантов полей с неподвижной энергией. В первом варианте $A = ae^{i\alpha}$, $B = ae^{i\beta}$, $C = ae^{i(\alpha+\pi/2)}$, $D = ae^{i(\beta+\pi/2)}$ и согласно (7) — (10)

$$E_2(x,t) = 2Wa\sin\left(\omega t + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(kx + \frac{\alpha-\beta}{2}\right);$$

$$H_3(x,t) = 2a\cos\left(\omega t + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(kx + \frac{\alpha-\beta}{2}\right);$$

$$E_3(x,t) = 2Wa\cos\left(\omega t + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(kx + \frac{\alpha-\beta}{2}\right);$$

$$H_2(x,t) = 2a\sin\left(\omega t + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(kx + \frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Из этих выражений следует, что при любом фиксированном $x \in \Omega$ векторы $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ синхронно вращаются по окружностям против часовой стрелки, оставаясь коллинеарными и направленными в противоположные стороны для $x \in ]\,(2n\pi + \beta - \alpha)/2k,\ \{(2n+1)\pi + \beta - \alpha\}/2k$ и в одну сторону при $x \in ]\{(2n+1)\pi + \beta - \alpha\}/2k,\ \{(n+1)2\pi + \beta - \alpha\}/2k[$. Когда изменяется $x$, радиусы окружностей изменяются, однако плотность энергии $\forall x \in \Omega$ одна и та же:

$$w = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2}(\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{E}) + \frac{\mu_0\mu}{2}(\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{H}) = 2\mu_0\mu a^2.$$

Подпространство решений, выделяемое условиями $C = -iA$, $D = -iB$, отличается от рассмотренного противоположным направлением вращения векторов $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$.

При $C = -iA$, $D = iB$ решение определяется выражениями

$$E_2(x,t) = 2Wa\sin\left(\omega t + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(kx + \frac{\alpha-\beta}{2}\right);$$

$$E_3(x,t) = 2Wa\sin\left(\omega t + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(kx + \frac{\alpha-\beta}{2}\right);$$

$$H_2(x,t) = 2a\cos\left(\omega t + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(kx + \frac{\alpha-\beta}{2}\right);$$

$$H_3(x,t) = 2a\cos\left(\omega t + \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(kx + \frac{\alpha-\beta}{2}\right),$$

описывающими стоячие волны с линейной поляризацией, плоскость поляризации которых с увеличением $x$ поворачивается по направлению часовой стрелки, а коллинеарные векторы $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Решение из подпространства, выделяемого условиями $C = iA$, $D = -iB$, характеризуется обратным по отношению к рассмотренному случаю направлением вращения плоскости поляризации.

Решение обобщенной внутренней задачи показало, что нелинейность граничного условия приводит к появлению наряду с дискретной сплошной части спектра оператора Максвелла. Множество решений задачи представляет собой трехмерное комплексное многообразие $F_{\text{пп}}$, в котором выделяется восемь двумерных комплексных подпространств. Каждой собственной частоте дискретной части спектра соответствуют два из этих подпространств, собственным решениям из которых отвечают многократно отражающиеся от параллельных стенок области эллиптически поляризованные плоские волны с ортогональным направлением векторов $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$. Каждой собственной частоте сплошной части спектра отвечают четыре двумерных комплексных подпространства решений с неподвижной энергией. Решения из указанных подпространств характеризуются коллинеарностью векторов $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ в каждый момент времени. Дополнение в $F_{\text{пп}}$ к описанным выше подпространствам соответствует решениям с коллинеарными на границе области векторами $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ и отвечает дискретной части спектра.

**Список литературы:** 1. *Никольский В. В.* Теория электромагнитного поля.— М.: Высш. шк., 1964.— 384 с. 2. *Никольский В. В.* Вариационные методы для внутренних задач электродинамики.— М.: Наука, 1967.— 460 с.

*Поступила в редколлегию 15.07.86*

УДК 621.396

*Л. П. ЯЦУК*, канд. физ.-мат. наук, *Ю. М. ПЕНКИН*

# РАССЕЯНИЕ ВОЛНЫ $H_{10}$ УЗКОЙ ЩЕЛЬЮ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ В ПРИСУТСТВИИ Г-ОБРАЗНОГО ПАССИВНОГО ВИБРАТОРА

В антенной практике все шире применяются вибраторно-щелевые элементы фазированных антенных решеток. Это обусловлено совмещением в одном раскрыве вибраторных и щелевых решеток, работающих на разных частотах, и необходимостью модификации щелевых излучателей. В любом случае для расчета вибраторно-щелевых систем необходимо учитывать электромагнитное взаимодействие их элементов.

Взаимная связь щелей и вибраторов, играющих на частоте излучения щели роль пассивных рассеивателей, еще недостаточно изучена. Особенно интересно исследование энергетических параметров