УДК 519.24

В. А. ГОРОХОВАТСКИЙ, канд. техн. наук

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОМЕХОЗАЩИЩЕННОСТИ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ НОРМАЛИЗАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Процедура нормализации [1] состоит из двух этапов: измерения параметров преобразования изображений и применения компенсирующего (нормализующего) преобразования. Параметры нормализации определяются отображением $\bar{\Phi}(B)$, которое, в свою очередь, задается функционалами $\Phi_1(B), \ldots, \Phi_r(B)$. Последние являются интегралами вида

$$\Phi_i(B) = \iint_D B(x, y) K_i(x, y) \, dxdy, \; i = \overline{1, r}, \tag{1}$$

где $K_i(x, y)$ — ядро функционала, использующегося при нормализации.

Нормализуемое изображение в условиях действия аддитивной помехи имеет вид

$$B_\xi(x, y, t) = B(x, y) + \xi(x, y, t). \tag{2}$$

Здесь ξ — функция помехи; t — фиксированный момент времени.

Предположим, что помеха представляет собой эргодическую пространственно-временную случайную функцию $\xi\ (x, y, t)$ с матожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной σ^2. Предположение о нулевом матожидании помехи не снижает общности рассуждений, так как отстройка от среднего уровня обычно проводится путем применения нормализатора контрастности [2].

Линейный интегральный функционал (1) от изображения (2) теперь можно представить как сумму:

$$\Phi(B_\xi) = \iint_D B(x, y) K(x, y) dxdy + \iint_D \xi(x, y, t) K(x, y) dxdy,$$

или

$$\Phi(B_\xi) = \Phi(B) + \Phi(\xi), \tag{3}$$

где первое слагаемое определяет истинное значение функционала, а второе зависит от случайной функции ξ. Везде в дальнейшем будем считать, что измерения производятся за интервал времени, в течение которого $\xi(t)$ существенно не изменяется, т. е. длительность времени измерений намного меньше временного радиуса корреляции помехи. На этом основании параметр t исключим из последующего анализа.

Из выражения (3) имеем, что математическое ожидание значения функционала $\Phi\ (B_\xi)$ равно сумме математического ожидания помеховой составляющей $\Phi(\xi)$ и истинного значения функционала без помех $\Phi(B)$. Дисперсия функционала $\Phi(\beta_\xi)$ совпадает с дисперсией помеховой составляющей $\Phi(\xi)$.

Оценим статистические числовые характеристики составляющей $\Phi(\xi)$ в выражении (3). Воспользовавшись свойствами матожидания, имеем

$$M\Phi(\xi) = \iint\limits_D M\xi(x, y) K(x, y)\, dxdy = 0, \tag{4}$$

так как $K(x, y)$ — неслучайная функция.

Дисперсия линейного функционала с нулевым матожиданием вычисляется по формуле [3, с. 81]

$$R(\Phi(\xi)) = P_\xi \tau_0 E_K, \tag{5}$$

где $E_K = \iint\limits_D K^2(x, y)\, dxdy$; τ_0 — пространственный интервал корреляции помехи; P_ξ — средняя мощность помехи в области D.

При выводе формулы (5) предполагается, что интервал корреляции помехи по координатам x, y настолько мал, что на его протяжении весовая функция $K(x, y)$ не изменяется заметным образом, т. е. практически постоянна. Это предположение вполне приемлемо для функционалов, использующихся при нормализации.

В случае квазибелого шума с нормальным распределением амплитуд выражение для дисперсии имеет вид [4, с. 44]

$$R[\Phi(\xi)] = \theta_\xi E_K = \alpha\sigma^2 E_K \tag{6}$$

где θ_ξ — спектральная интенсивность шума; $\alpha = \pi^2/\omega_{\text{гр}}^2$, $\omega_{\text{гр}}$ — граничная частота квазибелого шума, в пределах которой эта интенсивность постоянна и равна θ_ξ.

Из соотношений (5) и (6) видно, что дисперсия помеховой составляющей $\Phi(\xi)$ зависит от следующих величин: дисперсии σ^2 или мощности P_ξ, помехи и значения E_k, которое характеризуется функцией $K(x, y)$. При этом дисперсия функционала $\Phi(\xi)$ растет с увеличением мощности помехи и с ростом размеров области D.

Если флуктуации помехи ξ распределены по нормальному закону с нулевым средним, то функционал $\Phi(\xi)$ также будет распределен по нормальному закону, так как интегрирование является линейной операцией, дисперсия $\Phi(\xi)$ может быть вычислена согласно (6). Для параметров нормализации, определяющихся посредством линейных функционалов, вероятность отклонения измеренной величины от истинной не более, чем на Δ, определяется в виде

$$P(\Phi(B) - \Delta \leqslant \Phi(B_\xi) \leqslant \Phi(B) + \Delta) = 2\Phi_L^*\left(\frac{\Delta}{\sigma^*}\right) - 1, \tag{7}$$

где $\sigma^* = \sqrt{R[\Phi(\xi)]}$, а $\Phi_L^*(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt$ — интеграл вероятностей.

На основании этого можно, например, утверждать что теоретически вероятность отклонения параметра от истинного на величину, большую $3\sigma^*$, не превышает 0,003.

Выражение (7) позволяет оценить точность измерения параметров нормализации в зависимости от уровня помех, т. е. указать максимальную дисперсию σ^2 помехи на нормализуемом изображении, при которой с заданной вероятностью измеряемый параметр отклоняется от истинного значения не более, чем на Δ. Ясно, что степень влияния помехи зависит от измеряемого параметра $\Phi(B)$. Относительную погрешность $\Delta_{\text{отн}}$ измерений будем оценивать как

$$\Delta_{\text{отн}} = \frac{\sqrt{R[\Phi(\xi)]}}{\Phi(B)}, \tag{8}$$

где в числителе стоит среднеквадратичное отклонение параметра, а в знаменателе — его истинное значение.

В качестве примера рассмотрим измерение параметра одномерного растяжения

$$\lambda = \frac{\iint\limits_D B(x, y)\,dxdy}{\iint\limits_D B_0(x, y)\,dxdy} = \frac{\iint\limits_D B_0\left(\frac{1}{\lambda}x, y\right)dxdy}{\iint\limits_D B_0(x, y)\,dxdy}. \tag{9}$$

При воздействии помех аналогично (3) имеем

$$\lambda_\xi = \lambda + \frac{1}{d_0}\iint\limits_D \xi(x, y)\,dxdy = \lambda + \eta,$$

где λ_ξ — параметр растяжения, вычисленный в условиях помех; λ — истинное (но неизвестное) значение растяжения, $d_0 = \iint\limits_D B_0(x, y)\,dxdy$. Матожидание η согласно (4) равно нулю. Дисперсия η определяется по формуле (6), если ξ — квазибелый шум с нормальным распределением. Тогда

$$R[\eta] = \frac{1}{d_0^2}E\alpha\sigma^2, \text{ где } E = \iint\limits_D dxdy, \ \alpha - \text{const}.$$

Вероятность того, что λ_ξ отклоняется от λ не более, чем на значение Δ, находится по формуле (7). С вероятностью β можно утверждать, что $|\lambda_\xi - \lambda| \leqslant \Delta$, если выполняется условие

$$\sigma \leqslant \frac{\Delta d_0}{t_\beta\sqrt{E\alpha}}, \tag{10}$$

где t_β — аргумент функции $\overset{*}{\Phi}_L(z)$.

Из (10) видно, помехозащищенность зависит от размеров поля зрения и от изображения эталона, влияние которого отражается значением d_0. Относительная погрешность равна

$$\Delta_{\text{отн}} = \frac{\sigma\sqrt{E\alpha}}{\iint\limits_D B(x, y)\,dxdy}. \tag{11}$$

Приведем численные оценки. Пусть вычисления осуществляются для дискретного поля зрения 50×50, а эталон представляет собой изображение квадрата 20×20 элементов, состоящее из «точек» яркостью «1» на нулевом фоне. Зададим $\beta = 0{,}99$, $\Delta = 0{,}2$, $\alpha = 1$. Находим $t_\beta = 2{,}576$. Тогда с вероятностью β утверждаем, что $|\lambda_\xi - \lambda| < \Delta$, если $\sigma \leqslant \frac{0{,}2 \cdot 400}{2{,}576 \cdot 50} = 0{,}6$.

Для меньшего поля зрения 30×30 элементов имеем оценку $\sigma \leqslant 1{,}1$. Относительная погрешность измерений для $\lambda = 2$, $\sigma = 0{,}5$ равна $\Delta_{\text{отн}} = \frac{1}{32}$, а для $\lambda = 0{,}5$, $\sigma = 0{,}5$ $\Delta_{\text{отн}} = \frac{1}{8}$, что говорит о достаточно высокой точности измерений в широком диапазоне значений параметра λ. На основании полученных значений можно утверждать и то, что для $\sigma = 0{,}5$ при поле 50×50 элементов с вероятностью 0,99 вычисляемое значение растяжения удовлетворяет неравенству $|\lambda_\xi - \lambda| \leqslant 0{,}2$, т. е. по известной дисперсии помехи делать выводы о точности определения параметров.

Получим теперь оценки для параметров, основанных на вычислении нелинейных функционалов, и обсудим трудности, возникающие при этом. Пусть параметр нормализации определяется как нелинейный функционал

$$\tilde{\Phi}(B_\xi) = f[\Phi_1(B_\xi), \Phi_2(B_\xi), \ldots, \Phi_r(B_\xi)], \tag{12}$$

где $\Phi_j(B_\xi)$, $j = \overline{1, r}$ — линейные функционалы; f — некоторая нелинейная функция.

Заметим, что дисперсии линейных функционалов Φ_j в данном случае можно считать известными, так как они находятся непосредственно по формулам (5), (6).

Если бы был известен r-мерный закон распределения совокупности функционалов $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r$, то закон распределения и числовые характеристики функции (12) могли бы быть вычислены по известным формулам [5]. Например, для часто встречающегося при нормализации нелинейного функционала, представляющего собой частное двух линейных функционалов $\eta = \Phi_1 \times (B_\xi)/\Phi_2(B_\xi)$, где функционалы Φ_1 и Φ_2 распределены по нормальному закону, математический вид распределения можно найти в работе [5, с. 125].

При известном распределении погрешность вычисления параметра нормализации $\eta = \tilde{\Phi}(\beta_\xi)$ определяется согласно выражению

$$P(|\eta - \eta_0| \leqslant \Delta) = \int_{\eta_0-\Delta}^{\eta_0+\Delta} p(\eta)\, d\eta. \tag{13}$$

Здесь $p(\eta)$ — плотность распределения нелинейного функционала $\tilde{\Phi}$, а η_0 — его истинное значение. В отличие от линейного случая, непосредственное вычисление значений вероятности (13) для нелинейного функционала (12) вызывает затруднения, связанные с тем, что плотность зависит от параметров распределения линейных функционалов, входящих в соотношение (12). Кроме того функцию $p(\eta)$ не всегда удается построить.

Если предположить, что дисперсии линейных функционалов ограничены, то функцию f можно заменить ее линейной частью, т. е. воспользоваться методом линеаризации, хорошо зарекомендовавшим себя в технических приложениях. Ограничения, накладываемые на дисперсии функционалов Φ_j, $j=\overline{1, r}$, применительно к нормализации изложены в работе [2]. С использованием линеаризации числовые характеристики функционала $\tilde{\Phi}$ можно найти по формулам [6]

$$M\tilde{\Phi}(B) = f[M\Phi_1(B),\ M\Phi_2(B),\ \ldots,\ M\Phi_2(B)],$$

$$R\tilde{\Phi}(B) = \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\partial t}{\partial \Phi_i}\right)_M R\Phi_i + 2\sum_{i<j}\left(\frac{\partial f}{\partial \Phi_i}\right)_M \left(\frac{\partial f}{\partial \Phi_j}\right)_M C_{ij},$$

где C_ij — корреляционный момент функционалов Φ_i, Φ_i, а символ M означает, что в выражение для частной производной вместо аргументов Φ_i подставлены их математические ожидания $M\Phi_i$. После линерализации функционал $\tilde{\Phi}$ имеет нормальное распределение, поэтому для определения вероятности (13) можно воспользоваться выражением (7). Эксперименты, проведенные на ЭВМ для оценки погрешностей при нахождении параметров нормализации, подтверждают, что в случае аддитивных помех погрешность распределена по закону, близкому к нормальному.

В некоторых случаях, например, при достаточно больших размерах поля зрения D и при значениях линейных функционалов, не равных нулю, можно воспользоваться интегральными свойствами нормализаторов, чтобы представить отдельные нелинейные функционалы $\tilde{\Phi}=f(\Phi_1, \ldots, \Phi_r)$ как функции меньшего, чем r, числа линейных функционалов, в частности, как функции одной переменной. Тогда появляется возможность получить более простые аналитические выражения для плотности распределения параметров нормализации и их числовых характеристик.

Возьмем в качестве иллюстрации нормализатор неравномерного растяжения, согласно которому растяжение λ определяется как

$$\lambda = \left[\frac{\iint\limits_D B(x,\ y)\, x^2 dx dy}{\iint\limits_D B(x,\ y)\, dx dy}\right]^{1/2}. \qquad (14)$$

При воздействии помехи знаменатель выражения (14) имеет вид

$$\Phi(B_\xi) = \iint\limits_D B(x,\ y)\, dx dy + \iint\limits_D \xi(x,\ y)\, dx dy.$$

Математическое ожидание ξ равно нулю, следовательно, интеграл $\iint\limits_D \xi(x, y)dxdy$ также близок к нулю, и его значением по отношению к первому слагаемому можно пренебречь. В таком случае параметр растяжения λ определяется как нелинейная функция (корень) от одного линейного функционала, так как $\iint\limits_D Bdxdy = \mathrm{const}$. Следовательно,

$$\lambda = f(\Phi(B_\xi)) = \sqrt{\frac{1}{d}\Phi(B_\xi)} = \sqrt{\frac{1}{d}[\Phi(B) + \Phi(\xi)]},$$

где $\Phi(B)$ — линейный функционал, стоящий в числителе (14).

Оценим возможность применения упрощения для функционала центра тяжести дискретного изображения размером $n \times n$ элементов в условиях нормально распределенной аддитивной помехи. Центр тяжести вычисляется как

$$\tilde{\Phi}(B_\xi) = \frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} B_{ij}i + \sum\limits_{i,j=1}^{n} \xi_{ij}i}{\sum\limits_{i,j=1}^{n} B_{ij} + \sum\limits_{i,j=1}^{n} \xi_{ij}} = \frac{\Phi_1(B) + \Phi_1(\xi)}{\Phi_2(B) + \Phi_2(\xi)}. \tag{15}$$

Умножим числитель и знаменатель (15) на $1/n^2$. $\tilde{m} = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i,j=1}^{n}\xi_{ij}$ — это среднее значение ξ_{ij}, вычисленное по реализациям. Как известно [6, с. 320], дисперсия $\tilde{m}$ равна $\sigma^2_{\tilde{m}} = \sigma^2/n^2$, где σ^2 — дисперсия шума ξ_{ij}. Значение $\tilde{m}$ распределено по нормальному закону с нулевым матожиданием и для любого наперед заданного Δ можно указать такое n^2, что с заданной вероятностью β $\tilde{m}$ будет меньше Δ. Это значение n находим из условия $n^2 \geqslant t^2_\beta\sigma/\Delta$, где t_β — аргумент функции $\overset{*}{\Phi}_L(z)$. Выберем соответствующее n, в результате чего вторым слагаемым в знаменателе (15) можно пренебречь, а $\tilde{\Phi}(B)$ становится линейным функционалом.

Заметим, что пренебречь значением функционала $\Phi_1(\xi)$ для полученного n нельзя, так как дисперсия каждого слагаемого в $\Phi_1(\xi)$ больше, чем дисперсия соответствующего слагаемого в $\Phi_2(\xi)$. Кроме того, дисперсия среднего $R\left[\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} i\xi_{ij}\right]$ возрастает с ростом n.

Оценим теперь численные значения n. Пусть $\beta = 0{,}99$, $t_\beta = 2{,}576$, тогда для $\sigma = 0{,}1$ и $\Delta = 0{,}01$ имеем $n^2 \geqslant 67$, т. е. достаточно взять изображение размером 9×9 элементов, чтобы можно было пренебречь влиянием помехи в знаменателе (15). Для $\sigma = 1$ получаем $n^2 \geqslant 670$, что говорит об увеличении необходимого поля зрения 30×30 элементов. Полученные численные значения n вполне приемлемы для технических применений.

В результате проведенного анализа получены соотношения, характеризующие погрешность определения параметров нормализации при действии аддитивной помехи. Эта погрешность зависит от вида используемых функционалов, размеров поля зрения и интенсивности помех. Приведенные численные примеры говорят о достаточно высоком уровне помехозащищенности конкретных нормализаторов.

Список литературы: 1. *Путятин Е. П.* Теоретические предпосылки нормализации изображений. *Сообщение 1.* — Пробл. бионики, 1973, вып. 10, с. 82—89. 2. *Путятин Е. П., Прокопенко В. В., Абрамов О. М.* Вопросы помехозащищенности нормализаторов плоских полутоновых изображений. — Пробл. бионики, 1975, вып. 15, с. 114—119. 3. *Харкевич А. А.* Борьба с помехами.— М.: Наука, 1965. — 276 с. 4. *Красильников Н. Н.* Статистическая теория передачи изображений.— М.: Связь, 1976.— 184 с. 5. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. — М.: Сов. радио, 1974. — 550 с. 6. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1969. — 576 с.

Поступила в редколлегию 07.02.85.