УДК 519.859

ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ АЛЬТЕРНАТИВ ПРИ ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЙ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ

И. В. Гребенник[1], Т.Е. Романова[2], С.Б. Шеховцов[3]

[1] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, grebennik@onet.com.ua
[2] ИПМаш НАНУ, г. Харьков, Украина, sherom@kharkov.ua
[3] ХНУВД, г. Харьков, Украина, tarom7@yahoo.com

В статье рассматриваются задачи принятия решений в случае интервальной неопределенности, когда исходные данные заданы в интервальном виде. Строятся интервальные математические модели указанных задач. Прелагаются подходы, основанные на модификациях известных детерминированных методов принятия решений и интервальном анализе.

ИНТЕРВАЛЬНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ, МНОГОФАКТОРНЫЕ ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ, ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

Введение

Системы поддержки принятия решений используются при решении многих научных и прикладных задач. Основу математического обеспечения таких систем составляют математические модели задач принятия решений, относящихся к различным классам, и методы их решения [1]. На практике значительную часть решений приходится принимать в условиях неопределенности. В частности, эта проблема актуальна в классе оптимизационных задач упаковки, раскроя и покрытия [2].

Существуют различные методы учета неопределенности в математических моделях задач принятия решений [3–5].

В данном исследовании в качестве средства математического моделирования процесса выбора решений в условиях неопределенности используются методы интервального анализа [6].

Целью настоящей статьи является распространение известных методов решения детерминированных задач принятия решений на случай интервальной неопределенности. Здесь и далее под интервальной неопределенностью понимается случай, когда все исходные данные задачи принятия решений заданы в интервальном виде.

Постановка задачи. Пусть X – множество допустимых решений, каждое из которых оценивается множеством критериев. Полагаем, что значения критериев определены с точностью до некоторых интервалов $[a,b]\subset R^1$. Необходимо найти решение $x^0\in X$, лучшее по всем заданным критериям в условиях интервальной неопределенности оценок альтернатив по заданным критериям.

Пусть $\{\mathbf{k}_1(x),\mathbf{k}_2(x),...,\mathbf{k}_n(x)\}$ – множество интервальных отображений вида $\mathbf{k}_i : X\to \mathbf{E}_i\subset \mathbf{I_sR}$, $i\in J_n=\{1,2,...,n\}$. Здесь $\mathbf{I_sR}=I_sR\cup\overline{I_sR}$ – пространство центрированных интервалов, где

$$I_sR=\{\langle X\rangle=\langle x,\nu_x\rangle \mid$$
$$x=\frac{a+b}{2}\in R^1, \nu_x=\frac{b-a}{2}\in R^1,\ [a,b]\subset R^1\},$$

$$\overline{I_sR}=\{\langle \bar{X}\rangle=\langle x,-\nu_x\rangle \mid \forall\langle X\rangle\in I_sR\},$$

$$\mathbf{E}_i=\{\langle X\rangle\in \mathbf{I_sR} : x\in R^1, |\nu_x|\le\delta_i\},$$

где δ_i – верхняя оценка «неопределенности» задания критерия $k_i(x)$.

1. Интервальная математическая модель задачи принятия решений

Определить

$$x^0=\arg\underset{x\in X}{extr}\{\mathbf{k}_1(x),\mathbf{k}_2(x),...,\mathbf{k}_n(x)\}, \qquad (1)$$

где экстремум интервального отображения понимается в смысле отношения порядка и способа определения максимума и минимума в пространстве $\mathbf{I_sR}$.

Заметим, что в случае, когда для всех $\mathbf{k}_i(x)=\langle k_i(x),\nu_{k_i(x)}\rangle$ выполняется соотношение $\nu_{k_i(x)}=0$, задача (1) представляет собой детерминированную многокритериальную задачу принятия решений.

Отношение порядка в пространстве $\mathbf{I_sR}$ вводится следующим образом [6]:

$$\forall\langle X\rangle=\langle x,\nu_x\rangle\in\mathbf{I_sR},\ \forall\langle Y\rangle=\langle y,\nu_y\rangle\in\mathbf{I_sR}$$

$$(\langle X\rangle<\langle Y\rangle)\Leftrightarrow\big((x<y)\vee(x=y)\wedge(\nu_x<\nu_y)\big), \qquad (2)$$

$$(\langle X\rangle>\langle Y\rangle)\Leftrightarrow\big((x>y)\vee(x=y)\wedge(\nu_x>\nu_y)\big),$$

$$(\langle X\rangle=\langle Y\rangle)\Leftrightarrow\big((x=y)\wedge(\nu_x=\nu_y)\big).$$

На основе (2) минимум из n интервальных чисел $\langle Z_1\rangle,\langle Z_2\rangle,...,\langle Z_n\rangle$ определяется так:

$$\langle Z^*\rangle=\min\{\langle Z_1\rangle,\langle Z_2\rangle,...,\langle Z_n\rangle\}, \qquad (3)$$

где

$$\langle Z^*\rangle=\left\langle z^*,\nu_z^*=\min_{i\in I_n}\nu_{z_i}\right\rangle,\ \text{если}\ z_1=z_2=...=z_n=z^*,$$

$$\langle Z^*\rangle=\left\langle z^*=z_{i_j}=\min_{i\in J_n}z_i,\nu_{z_{i_j}}\right\rangle, i_j\in J_n, j\in J_n,$$

$$\text{если}\ z_{i_j}\ne z_{i_k}, i\in J_k, j\ne k,$$

$$\left\langle Z^* \right\rangle = \left\langle z^* = \min_{i \in J_n} z_i, \nu_z^* = \nu_{z_{ij}} = \min_{k \in J_r} \nu_{z_{ik}} \right\rangle,$$

$$\text{если } z_{i_1} = z_{i_2} = \ldots = z_{i_r} = z^*,$$

$$\{z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots, z_{i_r}\} \subset \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}, \quad 1 \le r < n.$$

Аналогичным образом определяется максимум из n интервалов. Данный подход к определению минимума (максимума) распространяется и на случай бесконечного множества центрированных интервалов.

2. Анализ особенностей интервальной задачи

Задаче принятия решений в условиях интервальной неопределенности вида (1) присущи многие особенности детерминированных задач принятия решений.

Для решения задачи (1) предлагается построение и использование интервальных математических моделей, реализация которых основана на применении известных методов решения многокритериальных задач при $k_i : X \to R^1$, модифицированных для случая интервальных значений частных критериев $\mathbf{k}_i(x)$ в $\mathbf{I_s R}$.

При реализации неконструктивного подхода к выбору решения [7], обязательным является построение области компромиссов $X^c \subset X$. При конструктивном подходе (построение математической модели) эта процедура не обязательна, но часто желательна из вычислительных соображений.

Рассмотрим интервальные математические модели определения области компромиссов X^c на множестве допустимых решений X.

Если множество X дискретно и содержит небольшое число элементов, то для построения области компромиссов X^c используется попарное сравнение альтернатив $x \in X$ по интервальным оценкам.

Для любого решения $x \in X$ зададим отображение $\mathbf{f} : X \to \mathbf{Y}$ такое, что

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{Y} = (\langle Y_1 \rangle, \langle Y_2 \rangle, \ldots, \langle Y_n \rangle), \qquad (4)$$

где $\langle Y_i \rangle = \mathbf{k}_i(x^j) \in \mathbf{I_s R}$, $i \in J_n$. Тогда образом множества X будет множество $\mathbf{Y} \subset \mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$, где $\mathbf{I}_s^n \mathbf{R}$ – n-мерное интервальное пространство [8].

3. Область компромиссов для конечного множества X

Пусть $X = \{x^1, x^2, \ldots, x^m\}$, а каждому $x^j \in X$ соответствует кортеж $\mathbf{Y}^j = (\langle Y_1 \rangle, \langle Y_2 \rangle, \ldots, \langle Y_n \rangle)$ оценок $\langle Y_i \rangle = \mathbf{k}_i(x^j) \in \mathbf{I_s R}$, $i \in J_n$, $j \in J_m$, по всем критериям из множества $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n\}$. Построим область компромиссов X^c.

С этой целью осуществим попарное сравнение элементов множества X по каждому из критериев $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n$ на основе соотношения (2) следующим образом.

Выберем альтернативы $x^p, x^q \in X$ и сравним $\mathbf{k}_i(x^p)$ и $\mathbf{k}_i(x^q)$ для всех $i \in J_n$. Возможны следующие ситуации: либо x^q доминирует x^p; либо x^p доминирует x^q; либо $x^p, x^q \in X$ несравнимы, то есть существуют такие $i_1, i_2 \in J_n$, что $\mathbf{k}_{i_1}(x^p) \prec \mathbf{k}_{i_1}(x^q)$ и $\mathbf{k}_{i_2}(x^p) \succ \mathbf{k}_{i_2}(x^q)$ или $\mathbf{k}_{i_1}(x^p) \succ \mathbf{k}_{i_1}(x^q)$ и $\mathbf{k}_{i_2}(x^p) \prec \mathbf{k}_{i_2}(x^q)$, и вывод о доминировании элементов $x^p, x^q \in X$ сделать нельзя.

Здесь символ $\succ$ означает предпочтение на множестве Υ значений критериев. В частности, когда $\Upsilon \equiv \mathbf{I_s R}$, то $\mathbf{k}_i(x^p) \succ \mathbf{k}_i(x^q)$ означает $\mathbf{k}_i(x^p) > \mathbf{k}_i(x^q)$, если критерий k_i максимизируется, и $\mathbf{k}_i(x^p) < \mathbf{k}_i(x^q)$ в противном случае. Соотношение $\mathbf{k}_i(x^p) \approx \mathbf{k}_i(x^q)$ означает $\mathbf{k}_i(x^p) = \mathbf{k}_i(x^q)$.

В результате сравнения элементов $x^p, x^q \in X$, $p = 1, 2, \ldots, m-1$, $q = 2, \ldots, m$ по всем критериям $\mathbf{k}_i \in \mathbf{K}$, $i \in J_n$, сформируем область компромиссов $X^c \subset X$ как множество всех недоминируемых альтернатив. Временная сложность приведенного алгоритма имеет оценку $\sigma = \dfrac{n \cdot m \cdot (m-1)}{2}$.

Когда определить область компромиссов на континуальном множестве X достаточно сложно или когда мощность конечного множества X и множества критериев достаточно велика, то целесообразно строить *приближенную* область компромиссов $\tilde{X}^c$ такую, что $X^c \subseteq \tilde{X}^c \subseteq X$.

Построение области $\tilde{X}^c$ основано на решении задач оптимизации $\mathbf{k}_i(x)$ на множестве X. Суть решения задач оптимизации с интервальными функциями цели состоит в уменьшении диаметра (радиуса) интервала – значения функции цели. Указанное свойство может быть учтено в результате решения задач минимизации на основе соотношений (2)–(3). Для перехода к задачам минимизации интервальных функций введем интервальные отображения полезности $\mathbf{p}_i(x)$ частных критериев $\mathbf{k}_i \in \mathbf{K}$, $i \in J_n$, задачи (1) с целью нормализации интервальных критериев, следуя [7].

Интервальное отображение полезности $\mathbf{p}_i(x)$ частного критерия $\mathbf{k}_i(x)$ должно удовлетворять следующим требованиям:

1) $\mathbf{Y}_i = \{\mathbf{p}_i(x) \mid \langle 0, 0 \rangle \le \mathbf{p}_i(x) \le \langle 1, \nu_{p_i} \rangle, x \in X\}$;

2) $\mathbf{p}_i(x)$ инвариантно к размерности частного критерия $\mathbf{k}_i(x)$ и

3) $\mathbf{p}_i(x)$ инвариантно к виду экстремума частного критерия $\mathbf{k}_i(x)$.

Последнее требование означает, что независимо от вида экстремума (минимум или максимум) частного критерия $\mathbf{k}_i(x)$, его наилучшему значению на множестве X должен соответствовать максимальный ($\mathbf{p}_i(x) = \langle 1, \nu_{p_i} \rangle$), а наихудшему – минимальный ($\mathbf{p}_i(x) = \langle 0, 0 \rangle$) результат отображения $\mathbf{p}_i(x)$. Здесь ν_{p_i} определяется как радиус интервала, задающего максимальную полезность решения $x \in X$, соответствующий δ_i.

Указанным требованиям отвечает интервальное отображение $\mathbf{p}_i(x)$ вида:

$$\mathbf{p}_i(x) = \left(\frac{\mathbf{k}_i(x) - \mathbf{k}_i^-}{\mathbf{k}_i^+ - \mathbf{k}_i^-} \right)^{\alpha_i}, \quad (5)$$

где $\mathbf{k}_i(x)$ – значение частного критерия, $\mathbf{k}_i^+, \mathbf{k}_i^-$ – соответственно наилучшее и наихудшее значение частного критерия $\mathbf{k}_i(x)$ на области допустимых решений $x \in X$, при этом

$$\mathbf{k}_i^+ = \begin{cases} \max\limits_{x \in X} \mathbf{k}_i(x), \text{ если } \mathbf{k}_i(x) \to \max, \\ \min\limits_{x \in X} \mathbf{k}_i(x), \text{ если } \mathbf{k}_i(x) \to \min; \end{cases}$$

$$\mathbf{k}_i^- = \begin{cases} \min\limits_{x \in X} \mathbf{k}_i(x), \text{ если } \mathbf{k}_i(x) \to \max, \\ \max\limits_{x \in X} \mathbf{k}_i(x), \text{ если } \mathbf{k}_i(x) \to \min; \end{cases}$$

$\alpha_i \in R^1$ определяет характер нелинейности функции полезности $p_i(x)$ в детерминированном случае [7].

Рассмотрим интервальное отображение $\hat{\mathbf{p}}_i(x)$ потери полезности частного критерия $\mathbf{k}_i \in \mathbf{K}$ как $\hat{\mathbf{p}}_i(x) = \langle 1, \nu_{p_i} \rangle - \bar{\mathbf{p}}_i(x)$, $\bar{\mathbf{p}}_i(x)$ – отображение, сопряженное отображению $\mathbf{p}_i(x)$ [6]. Очевидно, что независимо от вида экстремума частного критерия $\mathbf{k}_i(x)$, наилучшему результату отображения $\hat{\mathbf{p}}_i(x)$ соответствует минимальное значение $\langle 0,0 \rangle$, а наихудшему – $\langle 1, \nu_{p_i} \rangle$. В дальнейшем, ориентируясь на решение задач минимизации интервальных отображений, будем осуществлять выбор наилучшего решения из множества X с помощью интервальных оценок потери полезности $\hat{\mathbf{p}}_i(x)$.

4. Приближенная область компромиссов

Рассмотрим один из возможных способов построения приближенной области компромиссов, который состоит в следующем.

Прежде всего построим приближенную область компромиссов для двух критериев $\mathbf{k}_i(x), i = 1,2$. В этом случае согласно [7] на множестве допустимых решений X последовательно решаются две однокритериальные оптимизационные задачи:

$$x_i^0 = \arg\min_{x \in X} \hat{\mathbf{p}}_i(x). \quad (6)$$

Для каждого решения x_i^0, $i = 1,2$, определяются $\hat{\mathbf{p}}_i(x)$. Обозначим $\hat{\mathbf{p}}_1(x_1^0) = \hat{\mathbf{p}}_1^+$, $\hat{\mathbf{p}}_2(x_2^0) = \hat{\mathbf{p}}_2^+$, $\hat{\mathbf{p}}_1(x_2^0) = \hat{\mathbf{p}}_1^-$, $\hat{\mathbf{p}}_2(x_1^0) = \hat{\mathbf{p}}_2^-$.

Образ $\tilde{\mathbf{Y}}^c$ приближенной области компромиссов $\tilde{X}^c$ в пространстве $\mathbf{Y}$ задается следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{Y}}^c = \{(\mathbf{k}_1(x), \mathbf{k}_2(x)) = \\ = (\langle k_1(x), \nu_{k_1}(x) \rangle, \langle k_2(x), \nu_{k_2}(x) \rangle) \in \mathbf{Y} \mid . \\ \hat{\mathbf{p}}_i^+ \le \hat{\mathbf{p}}_i(x) \le \hat{\mathbf{p}}_i^-, i = 1,2\}.$$

Пусть $i > 2$ и множество X конечно. Осуществим сравнение альтернатив в множестве X по каждой паре критериев из множества $\mathbf{K} = \{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, ..., \mathbf{k}_n\}$. Для этого сформируем множество пар критериев $\Pi = \{\Pi_{ij}\}$, $\Pi_{ij} = (\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j)$, $i \in J_n$, $j \in J_n$. Множество Π содержит $n(n-1)/2$ элементов.

Выберем элемент $\Pi_{ij} \in \Pi$ и реализуем приведенный выше способ определения приближенной области компромиссов для элементов множества X по критериям $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j$. В результате получим множество $\tilde{X}_{ij}^c \subset X$. Выполним эту процедуру для всех $i, j = 1, ..., n, i < j$.

Приближенную область компромиссов $\tilde{X}^c$ можно представить в виде $\tilde{X}^c = \bigcup\limits_{i,j=1,...,n,i<j} \tilde{X}_{ij}^c$.

Если X – непрерывное множество, то приближенную область компромиссов $\tilde{X}^c$ можно представить в виде $\tilde{X}^c = \prod\limits_{i,j=1,...,n,i<j} \tilde{X}_{ij}^c$.

5. Формирование интервальных оценок альтернатив

Рассмотрим теперь способы формирования интервальных многофакторных оценок альтернатив на основе отображений обобщенной полезности альтернатив. Выделим следующие ситуации [7].

1. Пусть известны точные значения a_i коэффициентов относительной важности интервальных критериев $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, ..., \mathbf{k}_n$, а, следовательно, их отображений локальной потери полезности $\hat{\mathbf{p}}_i(x)$. Здесь

$$a_i \in R^1,\ 0 \le a_i \le 1,\ i \in J_n,\ \sum_{i=1}^n a_i = 1. \quad (7)$$

Тогда в соответствии с детерминированным случаем сформируем аддитивную обобщенную интервальную оценку потери полезности вида:

$$\hat{\mathbf{P}}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_i(x), \quad (8)$$

а решение задачи примет вид:

$$x^0 = \arg\min_{x \in X} \hat{\mathbf{P}}(x). \quad (9)$$

В пространстве $\mathbf{I_sR}$ определены отображения сопряжения, операции сложения и умножения на число $\lambda \in R^1$ [6]:

$$\langle \bar{X} \rangle = \langle x, -\nu_x \rangle,\ \langle X \rangle + \langle Y \rangle = \langle x + y, \nu_x + \nu_y \rangle,$$

$$\lambda \langle X \rangle = \langle \lambda x, |\lambda| \nu_x \rangle,$$

где $\langle X \rangle = \langle x, \nu_x \rangle \in \mathbf{I_sR}$, $\langle Y \rangle = \langle y, \nu_y \rangle \in \mathbf{I_sR}$.

Заметим, что в модели (8) значения a_i являются действительными числами, а значения отображений локальной потери полезности $\hat{\mathbf{p}}_i(x)$ – элементами интервального пространства $\mathbf{I_sR}$. В соответствии с аддитивной моделью (8) и операциями сложения и умножения на действительное число, введенными в пространстве $\mathbf{I_sR}$, для каждой альтернативы $x \in X$ сформируем интервальные многофакторные оценки $\tilde{\mathbf{P}}(x, A)$, по которым найдем решение x^0.

Полученное решение x^0 соответствует минимальной в смысле соотношения (3) интервальной обобщенной оценке потери полезности альтернатив $x \in X$.

2. Пусть теперь значения коэффициентов относительной важности интервальных критериев $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, ..., \mathbf{k}_n$ известны с точностью до интервалов вида

$$\alpha_i = [\alpha_{i_{\min}}, \alpha_{i_{m0E}}],\ i \in J_n. \qquad (10)$$

Каждому интервалу вида (10) поставим в соответствие центрированный интервал $\langle A_i \rangle = \langle a_i, \nu_{a_i} \rangle \in \mathbf{I_s R}$, $i \in J_n$, [6] следующим образом:

$$\langle A_i \rangle \Leftrightarrow [a_i - \nu_{a_i}, a_i - \nu_{a_i}] = [\alpha_{i_{\min}}, \alpha_{i_{m0E}}],$$

где $a_i = \frac{1}{2}(\alpha_{i_{\min}} + \alpha_{i_{m0E}})$; $\nu_{a_i} = \frac{1}{2}(\alpha_{i_{m0E}} - \alpha_{i_{\min}})$.

С целью выполнения для интервальных коэффициентов относительной важности критериев $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, ..., \mathbf{k}_n$ условий, аналогичных (7), осуществим нормализацию коэффициентов $\langle A_i \rangle$ по формуле $\langle A_i^{\text{н}} \rangle = \sigma^{\text{н}} \cdot \langle A_i \rangle$, $i \in J_n$, где $\sigma^{\text{н}} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \langle A_i \rangle}$.

Воспользуемся формулами интервального умножения, введенными в пространстве $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$ [6].

Пусть $\langle X \rangle, \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$. Интервальное произведение $\langle Y \rangle * \langle X \rangle$ задается следующим образом:

$$\begin{cases} \langle Y \rangle \cdot \langle X \rangle, \text{если } \langle Y \rangle, \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s1} \\ \overline{\langle Y \rangle} \cdot \langle X \rangle, \text{если } \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s2}, \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s1} \\ \langle y + s|v_y|, 0 \rangle \cdot \langle X \rangle, \text{если } \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s3}, \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s1} \end{cases},$$

$$s = \begin{cases} 1, \text{если } v_x \cdot v_y \geq 0 \\ -1, \text{если } v_x \cdot v_y < 0 \end{cases},$$

где $\mathbf{I}_{si}$, $i = 1,2,3$ – множество точек $\langle X \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, которые удовлетворяют соответствующим условиям:

$$x - |v_x| > 0;\ x + |v_x| < 0;\ \begin{cases} x - |v_x| \leq 0, \text{если } x \geq 0 \\ x + |v_x| \geq 0, \text{если } x \leq 0, \end{cases}$$

где $\langle A \rangle \cdot \langle B \rangle = \langle ab + \nu_a \nu_b, a\nu_b + b\nu_a \rangle$ – операция гиперболического умножения A и B.

Воспользовавшись формулой интервального деления [6], имеем

$$\langle A_i^{\text{н}} \rangle = \frac{\langle A_i \rangle}{\langle B \rangle} = \frac{1}{b^2 - \nu_b^2} \cdot \langle A_i \rangle * \langle B \rangle,\quad |b| \neq |v_b|,$$

$$\langle B \rangle = \langle b, \nu_b \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle A_i \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{n} \nu_{a_i} \right\rangle. \qquad (11)$$

Поскольку $a - |v_a| > 0$, то согласно таблице умножения интервальных чисел, формула (11) примет следующий вид:

$$\langle A_i^{\text{н}} \rangle = \frac{1}{b^2 - \nu_b^2} \cdot \langle a_i b + \nu_{a_i} \nu_b, b\nu_{a_i} + a_i \nu_b \rangle.$$

Следовательно,

$$\langle A_i^{\text{н}} \rangle = \langle a_i^{\text{н}}, \nu_i^{\text{н}} \rangle, \qquad (12)$$

где

$$a_i^{\text{н}} = \frac{1}{\Delta_i} \left(a_i \sum_{i=1}^{n} a_i + \nu_{a_i} \sum_{i=1}^{n} \nu_{a_i} \right),$$

$$\nu_i^{\text{н}} = \frac{1}{\Delta_i} \left(\nu_{a_i} \sum_{i=1}^{n} a_i + a_i \sum_{i=1}^{n} \nu_{a_i} \right),\ \Delta_i = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \nu_{a_i} \right)^2}.$$

Учитывая (12), определим

$$\sum_{i=1}^{n} \langle A_i^{=} \rangle = \langle a^{=}, \nu_a^{=} \rangle = \frac{1}{b^2 - \nu_b^2} \langle b^2 + \nu_b^2, 2b\nu_b \rangle =$$

$$= \frac{1}{\Delta_i} \left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \nu_{a_i} \right)^2, 2 \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} \nu_{a_i} \right\rangle,$$

$$\langle 0, 0 \rangle \leq \langle A_i^{\text{н}} \rangle \leq \langle a^{\text{н}}, \nu_a^{\text{н}} \rangle,\ i \in J_n. \qquad (13)$$

Замечание. Если положить все ν_{a_i} равными нулю, то условие (13) будет эквивалентно выражению (7).

С учетом нормализованных интервальных коэффициентов относительной важности интервальных критериев соотношения, аналогичные (8), (9), примут вид:

$$\hat{\mathbf{P}}(x, A^{\text{н}}) = \sum_{i=1}^{n} \langle A_i^{\text{н}} \rangle * \hat{\mathbf{p}}_i(x),$$

$$x^0 = \arg\min_{x \in X} \hat{\mathbf{P}}(x, A^{\text{н}}),$$

где $A^{\text{н}} = (\langle A_1^{\text{н}} \rangle, \langle A_2^{\text{н}} \rangle, ..., \langle A_n^{\text{н}} \rangle) \in \mathbf{I_s^n R}$.

3. Количественные значения весовых коэффициентов относительной важности критериев неизвестны, но интервальные критерии упорядочены по важности, например, следующим образом:

$$\mathbf{k}_1 \succ \mathbf{k}_2 \succ ... \succ \mathbf{k}_n.$$

Такое задание предпочтений частных критериев означает, что $\langle A_1 \rangle > \langle A_2 \rangle > ... > \langle A_n \rangle$.

В этой ситуации используется принцип последовательной оптимизации, в соответствии с которым из двух решений $u \in X$, $v \in X$ первое предпочтительно, то есть $u \succ v$, если [9]

$$\hat{\mathbf{p}}_1(u) < \hat{\mathbf{p}}_1(v) \text{ или}$$

$$(\hat{\mathbf{p}}_1(u) = \hat{\mathbf{p}}_1(v)) \wedge (\hat{\mathbf{p}}_2(u) < \hat{\mathbf{p}}_2(v)) \text{ или}$$

$$(\hat{\mathbf{p}}_1(u) = \hat{\mathbf{p}}_1(v)) \wedge (\hat{\mathbf{p}}_2(u) = \hat{\mathbf{p}}_2(v)) \wedge (\hat{\mathbf{p}}_3(u) < \hat{\mathbf{p}}_3(v))$$

и так далее.

$\exists t \in J_{n-1}$ такое, что
$(\hat{\mathbf{p}}_j(u) = \hat{\mathbf{p}}_j(v), j \in J_t) \wedge (\hat{\mathbf{p}}_{t+1}(u) < \hat{\mathbf{p}}_{t+1}(v))$.

Выбор решения сводится к решению последовательности однокритериальных задач [7]:

$$X_i^0 = Arg \min_{x \in X_{i-1}^0} \hat{\mathbf{p}}_i(x),$$

здесь $i \in J_n$, $X_0^0 \equiv X$.

4. Информация о предпочтениях относительно критериев $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, ..., \mathbf{k}_n$, а, следовательно, и о коэффициентах a_i, $i \in J_n$, отсутствует.

В этом случае следует использовать модель вида:

$$x^0 = \arg\min_{x \in X} \max_{i=1,2,\ldots,n} \hat{\mathbf{p}}_i(x) .$$

Выводы

В настоящей работе предложен способ формирования интервальных многофакторных оценок альтернатив для принятия решений в геометрическом проектировании. Предложенный подход является комбинацией известных методов многокритериального принятия решений и методов интервального анализа.

Список литературы: 1. *Кини Р.Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. - М.: Радио и связь, 1981. 2. *Dyckhoff, G. Scheithauer, and J. Terno.* Cutting and packing. In M. Dell'Amico, F. Maffioli, and S. Martello, editors, Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization, chapter 22, pages 393-412. John Wiley & Sons, Chichester, 1997. 3. *Подиновский В.В.* Задача оценивания коэффициентов важности как симметрически лексикографическая задача оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – № 3. – С. 150–162. 4. *Овезгельдыев А.О., Петров К.Э.* Оценка и ранжирование альтернатив в условиях интервальной неопределенности // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 5. – С. 148–153. 5. *Гребенник И.В., Романова Т.Е., Шеховцов С.Б.* Оценка и ранжирование альтернатив при интервально заданных исходных данных в геометрическом проектировании // Системи обробки інформації.–2007.– Вип. 2(60).–С. 109–112. 6. *Стоян Ю.Г.* Метрическое пространство центрированных интервалов// Докл. НАН Украины. Сер. А. – 1996. – № 7. – С. 23–25. 7. *Овезгельдыев А.О., Петров Э.Г., Петров К.Э.* Синтез и идентификация моделей многофакторного оценивания и оптимизации. – Киев: Наук. думка, 2002.–164 с. 8. *Романова Т.Е.* Интервальное пространство $\mathbf{I}_\mathbf{s}^\mathbf{n}\mathbf{R}$. Интервальные уравнения // Докл. НАН Украины. Сер.А. – 2000.– № 9.– С. 36–41. 9. *Подиновский В.В., Гаврилов В.М.* Оптимизация по последовательно применяемым критериям.– М.: Сов. радио, 1975. – 192 с.

Поступила в редколлегию 11.09.2008

УДК 519.859

Інтервальне оцінювання альтернатив при прийнятті рішень у геометричному проектуванні/ І.В. Гребеннік, Т.Є Романова, С.Б. Шеховцов // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал – 2008. – № 2 (69). – С. 56-60.

У статті будуються інтервальні математичні моделі задач прийняття рішень в умовах інтервальної невизначеності. Для роз'вязання задач, вихідні дані яких задані в інтервальному вигляді, пропонуються модифіковані методи на базі детермінованих методів прийняття рішень та інтервального аналізу.

Бібліогр. 9 найм.

UDC 519.859

Interval estimation of alternatives in decision making for geometric design / I.V. Grebennik, T.E. Romanova, S.B. Shekhovtsov// Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2008. – № 2 (69). – P. 56-60.

In the article interval mathematical models of decision making problems under interval uncertainty are built. For solving problems with interval initial data modified methods based on determined decision making methods and interval analysis are proposed.

Ref.: 9.