УДК 621.371.3

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ДВУХ РЕЗОНАНСНЫХ ОДНОРОДНЫХ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СФЕРАХ

КОЗАРЬ А.И.

Рассматривается решение задачи о рассеянии электромагнитных волн на двух малых резонансных магнитодиэлектрических сферах, находящихся на произвольном расстоянии друг от друга. Задача решается с помощью интегральных уравнений электродинамики. Получены выражения для рассеянных полей.

Полагаем, что проницаемости заполнения свободного пространства ε_0, μ_0, радиусы сфер a_1, a_2, а их проницаемости $\varepsilon_1, \mu_1; \varepsilon_2, \mu_2$. Вне сфер $a/\lambda << 1$, но внутри их возможен резонансный случай $a/\lambda_g \sim 1$, где λ, λ_g — длины волн. Поля будем записывать в виде $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})e^{iwt}$, $\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}(\vec{r})e^{iwt}$ [1].

Рассеянное поле по известному внутреннему полю рассеивателей определим через электрический $\vec{\Pi}^э$ и магнитный $\vec{\Pi}^м$ потенциалы Герца:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{расс} &= (\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0)\vec{\Pi}^э - ik\mu_0\left[\nabla, \vec{\Pi}^м\right],\\ \vec{H}_{расс} &= \left(\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0\right)\vec{\Pi}^м + ik\varepsilon_0\left[\nabla, \vec{\Pi}^э\right].\end{aligned} \qquad (1)$$

Для отдельных сфер потенциалы Герца представим в виде [2]

$$\vec{\Pi}^э = \frac{1}{4\pi}\int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right)\vec{E}^0(\vec{r}\,')f\left(|\vec{r} - \vec{r}\,'|\right)dV,$$

$$\vec{\Pi}^м = \frac{1}{4\pi}\int_V \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\vec{H}^0(\vec{r}\,')f\left(|\vec{r} - \vec{r}\,'|\right)dV,$$

где $f(|\vec{r} - \vec{r}\,'|)$ — решение уравнения

$$\Delta f(|\vec{r} - \vec{r}\,'|) + k^2\varepsilon_0\mu_0 f(|\vec{r} - \vec{r}\,'|) = -4\pi\delta(|\vec{r} - \vec{r}\,'|),$$

которое удовлетворяет излучению на бесконечности и имеет вид

$$f(|\vec{r} - \vec{r}\,'|) = \frac{e^{-ik\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}|\vec{r} - \vec{r}\,'|}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}, \qquad (2)$$

а $\vec{E}^0(\vec{r}\,'), \vec{H}^0(\vec{r}\,')$ — внутренние поля рассеивателей; V — объем рассеивателей.

Можно показать, что для внешних точек сферы $(r > r')$ интеграл по ее объему от функции Грина для свободного пространства (2) имеет вид

$$W(\vec{r}) = \int_V \frac{e^{-ik\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}|\vec{r} - \vec{r}\,'|}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}dV = \frac{4\pi}{k_1^3}(\sin k_1 a - k_1 a\cos k_1 a)\frac{e^{-ik_1 r}}{r},$$

где $k_1 = k\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, $k = 2\pi/\lambda$ а r — расстояние от центра до внешних точек сферы.

Внутреннее поле рассеивателей будем находить, опираясь на интегральные уравнения [2]. Вначале рассмотрим случай, когда $a/\lambda_g << 1$ внутри и $a/\lambda << 1$ вне сферы, а потом результаты вычисления внутреннего поля рассеивателей обобщим и на резонансный случай, когда $a/\lambda_g \sim 1$ внутри сферы. Построим квазистационарные уравнения для определения внутренних полей двух сфер в виде системы из четырех неоднородных уравнений:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{01}(\vec{r}\,',t) &= \left\{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1\right)\right\}\vec{E}_1^0(\vec{r}\,',t) - \\
&- \left\{(\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0)\times\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} - 1\right)W_{21}^э(\vec{r})\vec{E}_2^0(\vec{r}\,',t) - \right.\\
&\left. - ik\mu_0\left[\nabla, \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1\right)W_{21}^м(\vec{r})\vec{H}_2^0(\vec{r}\,',t)\right]\right\},\\
\vec{H}_{01}(\vec{r}\,',t) &= \left\{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1\right)\right\}\vec{H}_1^0(\vec{r}\,',t) - \\
&- \left\{(\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1\right)W_{21}^м(\vec{r})\vec{H}_2^0(\vec{r}\,',t) + \right.\\
&\left. + ik\varepsilon_0\left[\nabla, \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} - 1\right)W_{21}^э(\vec{r})\vec{E}_2^0(\vec{r}\,',t)\right]\right\}, \qquad (3)\\
\vec{E}_{02}(\vec{r}\,',t) &= \left\{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} - 1\right)\right\}\vec{E}_2^0(\vec{r}\,',t) - \\
&- \left\{(\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1\right)W_{12}^э(\vec{r})\vec{E}_1^0(\vec{r}\,',t) - \right.\\
&\left. - ik\mu_0\left[\nabla, \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1\right)W_{12}^м(\vec{r})\vec{H}_1^0(\vec{r}\,',t)\right]\right\},\\
\vec{H}_{02}(\vec{r}\,',t) &= \left\{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1\right)\right\}\vec{H}_2^0(\vec{r}\,',t) - \\
&- \left\{(\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1\right)W_{12}^м(\vec{r})\vec{H}_1^0(\vec{r}\,',t) + \right.\\
&\left. + ik\varepsilon_0\left[\nabla, \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1\right)W_{12}^э(\vec{r})\vec{E}_1^0(\vec{r}\,',t)\right]\right\},
\end{aligned}$$

здесь $\vec{E}_{01}(\vec{r}\,',t), \vec{H}_{01}(\vec{r}\,',t)$ и $\vec{E}_{02}(\vec{r}\,',t), \vec{H}_{02}(\vec{r}\,',t)$ – поля падающей волны в центрах первой и второй сфер, а $\vec{E}_{1}^{0}(\vec{r}\,',t), \vec{H}_{1}^{0}(\vec{r}\,',t)$ и $\vec{E}_{2}^{0}(\vec{r}\,',t), \vec{H}_{2}^{0}(\vec{r}\,',t)$ – внутренние поля сфер.

Величины $W_{21}^{э}(\vec{r}), W_{21}^{м}(\vec{r})$ и $W_{12}^{э}(\vec{r}), W_{12}^{м}(\vec{r})$ имеют вид

$$W_{21}^{э}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{k_1^3}(\sin k_1 a_2 - k_1 a_2 \cos k_1 a_2)\frac{e^{-ik_1 r_{21}}}{r_{21}},$$

$$W_{21}^{м}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{k_1^3}(\sin k_1 a_2 - k_1 a_2 \cos k_1 a_2)\frac{e^{-ik_1 r_{21}}}{r_{21}},$$

$$W_{12}^{э}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{k_1^3}(\sin k_1 a_1 - k_1 a_1 \cos k_1 a_1)\frac{e^{-ik_1 r_{12}}}{r_{12}},$$

$$W_{12}^{м}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{k_1^3}(\sin k_1 a_1 - k_1 a_1 \cos k_1 a_1)\frac{e^{-ik_1 r_{12}}}{r_{12}},$$

где $r_{21} = r_{12} = \sqrt{(x_{20}-x_{10})^2 + (y_{20}-y_{10})^2 + (z_{20}-z_{10})^2}$.

Здесь (x_{10}, y_{10}, z_{10}) и (x_{20}, y_{20}, z_{20}) – координаты центров первой и второй сфер.

Первые слагаемые справа в уравнениях (3) связаны с внутренним полем соответствующей сферы без учета влияния противоположной сферы, а вторые слагаемые определяют влияние на данную сферу другой сферы.

Для определения внутреннего поля сфер имеется система из четырех векторных неоднородных уравнений или же для $x-, y-, z-$ составляющих–двенадцати уравнений с двенадцатью неизвестными.

Для внутреннего поля конкретной сферы решение системы уравнений (3) имеет вид

$$\vec{E}_{c'}^{0}(\vec{r}\,',t) = \frac{1}{\Delta^{эм}}\sum_{c=1}^{2}(\hat{g}_c^{эc'}\vec{E}_{0c}(\vec{r}\,',t) + \hat{\beta}_c^{эc'}\vec{H}_{0c}(\vec{r}\,',t)), \quad (4)$$

$$\vec{H}_{c'}^{0}(\vec{r}\,',t) = \frac{1}{\Delta^{эм}}\sum_{c=1}^{2}(\hat{\beta}_c^{мc'}\vec{H}_{0c}(\vec{r}\,',t) + \hat{g}_c^{мc'}\vec{E}_{0c}(\vec{r}\,',t)),$$

где

$$\hat{g}_c^{эc'} = \begin{bmatrix} g_{xxc}^{эc'} & g_{xyc}^{эc'} & g_{xzc}^{эc'} \\ g_{yxc}^{эc'} & g_{yyc}^{эc'} & g_{yzc}^{эc'} \\ g_{zxc}^{эc'} & g_{zyc}^{эc'} & g_{zzc}^{эc'} \end{bmatrix}; \quad \hat{\beta}_c^{эc'} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{xxc}^{эc'} & \hat{\beta}_{xyc}^{эc'} & \hat{\beta}_{xzc}^{эc'} \\ \hat{\beta}_{yxc}^{эc'} & \hat{\beta}_{yyc}^{эc'} & \hat{\beta}_{yzc}^{эc'} \\ \hat{\beta}_{zxc}^{эc'} & \hat{\beta}_{zyc}^{эc'} & \hat{\beta}_{zzc}^{эc'} \end{bmatrix};$$

$$\hat{\beta}_c^{мc'} = \begin{bmatrix} \beta_{xxc}^{мc'} & \beta_{xyc}^{мc'} & \beta_{xzc}^{мc'} \\ \beta_{yxc}^{мc'} & \beta_{yyc}^{мc'} & \beta_{yzc}^{мc'} \\ \beta_{zxc}^{мc'} & \beta_{zyc}^{мc'} & \beta_{zzc}^{мc'} \end{bmatrix}; \quad \hat{g}_c^{мc'} = \begin{bmatrix} g_{xxc}^{мc'} & g_{xyc}^{мc'} & g_{xzc}^{мc'} \\ g_{yxc}^{мc'} & g_{yyc}^{мc'} & g_{yzc}^{мc'} \\ g_{zxc}^{мc'} & g_{zyc}^{мc'} & g_{zzc}^{мc'} \end{bmatrix},$$

а $\Delta^{эм}$ – детерминант основной матрицы системы уравнений (3). Индекс c' определяет выделенную сферу, а индекс c принимает значение $c = 1,2$.

Полученные решения для внутреннего поля сфер (4) справедливы, когда $a/\lambda << 1$ и $a/\lambda_g << 1$. Но их можно обобщить на резонансный случай $a/\lambda_g \sim 1$, если вместо проницаемостей ε_c и μ_c ввести эффективные проницаемости [3]

$$\varepsilon_{cэф} = \varepsilon_c F(ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}), \quad (5)$$

$$\mu_{cэф} = \varepsilon_c F(ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}),$$

где

$$F(ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}) =$$
$$= \frac{2(\sin ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c} - ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}\cos ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c})}{(k^2a_c^2\varepsilon_c\mu_c - 1)\sin ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c} + ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}\cos ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}}.$$

Если пренебречь взаимодействием между сферами, то обобщенные выражения (4) примут вид (5)

$$\vec{E}_c^0(\vec{r}\,',t) = \frac{3\varepsilon_0 e^{i\theta_{1c}}}{(\varepsilon_{cэф}+2\varepsilon_0)+\theta_{1c}^2\varepsilon_{cэф}+i\theta_{1c}(\varepsilon_{cэф}+2\varepsilon_0)}\vec{E}_{0c}(\vec{r}\,',t),$$

$$\vec{H}_c^0(\vec{r}\,',t) = \frac{3\mu_0 e^{i\theta_{1c}}}{(\mu_{cэф}+2\mu_0)+\theta_{1c}^2\mu_{cэф}+i\theta_{1c}(\mu_{cэф}+2\mu_0)}\vec{H}_{0c}(\vec{r}\,',t),$$

где $\theta_{1c} = ka_c\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

Потенциалы Герца $\vec{\Pi}^{э}$ и $\vec{\Pi}^{м}$ рассеянного системой из двух сфер поля по известному внутреннему полю (4) отдельных рассеивателей представим в виде суперпозиции потенциалов Герца первой и второй сфер (5):

$$\vec{\Pi}^{э}(\vec{r},t) =$$
$$= \sum_{c=1}^{2}\frac{1}{k_1^3}(\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c)\left(\frac{\varepsilon_{cэф}}{\varepsilon_0}-1\right)\vec{E}_c^0(\vec{r}\,',t)\frac{e^{-ik_1 r_c}}{r_c}, \quad (6)$$

$$\vec{\Pi}^{м}(\vec{r},t) =$$
$$= -\sum_{c=1}^{2}\frac{1}{k_1^3}(\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c)\left(\frac{\mu_{cэф}}{\mu_0}-1\right)\vec{H}_c^0(\vec{r}\,',t)\frac{e^{-ik_1 r_c}}{r_c},$$

где $r_c = \sqrt{(x-x_{c0})^2 + (y-y_{c0})^2 + (z-z_{c0})^2}$ – координаты (x, y, z) определяют точку наблюдения поля, рассеянного системой из двух сфер, а координаты (x_{c0}, y_{c0}, z_{c0}) – точку нахождения центра соответствующей сферы.

Учитывая (5), (6), находим рассеянное на двух сферах поле (1):

$$\vec{E}_{расс}(\vec{r},t) = \sum_{c=1}^{2}\frac{1}{k_1^3}(\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \times$$
$$\times\left\{\left(\frac{\varepsilon_{cэф}}{\varepsilon_0}-1\right)\hat{L}_c\vec{E}_c^0(\vec{r}\,') - ik\mu_0\left(\frac{\mu_{cэф}}{\mu_0}-1\right)(-1)\hat{P}_c\vec{H}_c^0(\vec{r}\,')\right\}e^{i(wt-k_1 r_c)}, \quad (7)$$

$$\vec{H}_{pacc}(\vec{r},t)=\sum_{c=1}^{2}\frac{1}{k_1^3}(\sin k_1a_c-k_1a_c\cos k_1a_c)\times$$

$$\times\left\{\left(\frac{\mu_{c\text{эф}}}{\mu_0}-1\right)(-1)\hat{L}_c\vec{H}_c^0(\vec{r}')+ik\varepsilon_0\left(\frac{\varepsilon_{c\text{эф}}}{\varepsilon_0}-1\right)\hat{P}_c\vec{E}_c^0(\vec{r}')\right\}e^{i(wt-k_1r_c)},$$

где $\hat{L}_c$ и $\hat{P}_c$ – функциональные матрицы вида

$$\hat{L}_c=\begin{bmatrix}\Psi_{xxc} & \Psi_{xyc} & \Psi_{xzc}\\ \Psi_{yxc} & \Psi_{yyc} & \Psi_{yzc}\\ \Psi_{zxc} & \Psi_{zyc} & \Psi_{zzc}\end{bmatrix};\quad \hat{P}_c=\begin{bmatrix}0 & \Psi_{zc} & \Psi_{yc}^0\\ \Psi_{zc}^0 & 0 & \Psi_{xc}\\ \Psi_{yc} & \Psi_{xc}^0 & 0\end{bmatrix}. \quad (8)$$

Величины, входящие в функциональные матрицы (8), имеют вид

$$\Psi_{xxc}=\frac{1}{r_c}k^2\varepsilon_0\mu_0+\frac{\left|3(x-x_{c0})^2-r_c^2\right|}{r_c^5}-$$

$$-k_1^2\frac{(x-x_{c0})^2}{r_c^3}+ik_1\frac{\left|3(x-x_{c0})^2-r_c^2\right|}{r_c^4},$$

$$\Psi_{yyc}=\frac{1}{r_c}k^2\varepsilon_0\mu_0+\frac{\left|3(y-y_{c0})^2-r_c^2\right|}{r_c^5}-$$

$$-k_1^2\frac{(y-y_{c0})^2}{r_c^3}+ik_1\frac{\left|3(y-y_{c0})^2-r_c^2\right|}{r_c^4},$$

$$\Psi_{zzc}=\frac{1}{r_c}k^2\varepsilon_0\mu_0+\frac{\left|3(z-z_{c0})^2-r_c^2\right|}{r_c^5}-$$

$$-k_1^2\frac{(z-z_{c0})^2}{r_c^3}+ik_1\frac{\left|3(z-z_{c0})^2-r_c^2\right|}{r_c^4},$$

$$\Psi_{xyc}=\Psi_{yxc}=\frac{3(x-x_{c0})(y-y_{c0})}{r_c^5}-$$

$$-k_1^2\frac{(x-x_{c0})(y-y_{c0})}{r_c^3}+ik_1\frac{3(x-x_{c0})(y-y_{c0})}{r_c^4},$$

$$\Psi_{xzc}=\Psi_{zxc}=\frac{3(x-x_{c0})(z-z_{c0})}{r_c^5}-$$

$$-k_1^2\frac{(x-x_{c0})(z-z_{c0})}{r_c^3}+ik_1\frac{3(x-x_{c0})(z-z_{c0})}{r_c^4},$$

$$\Psi_{yzc}=\Psi_{zyc}=\frac{3(y-y_{c0})(z-z_{c0})}{r_c^5}-$$

$$-k_1^2\frac{(y-y_{c0})(z-z_{c0})}{r_c^3}+ik_1\frac{3(y-y_{c0})(z-z_{c0})}{r_c^4},$$

$$\Psi_{xc}=\frac{(x-x_{c0})}{r_c^3}+ik_1\frac{(x-x_{c0})}{r_c^2},\quad \Psi_{yc}^0=-\Psi_{yc},$$

$$\Psi_{xc}^0=-\Psi_{xc},\quad \Psi_{zc}=\frac{(z-z_{c0})}{r_c^3}+ik_1\frac{(z-z_{c0})}{r_c^2},$$

$$\Psi_{yc}=\frac{(y-y_{c0})}{r_c^3}+ik_1\frac{(y-y_{c0})}{r_c^2},\quad \Psi_{zc}^0=-\Psi_{zc}.$$

Поле в произвольной точке пространства, лежащей вне сфер, определим в виде

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0(\vec{r},t)+\vec{E}_{pacc}(\vec{r},t),$$

где $\vec{E}_0(\vec{r},t)$ – невозмущенное поле падающей волны.

Из детерминанта системы уравнений (3) определяются резонансные условия для случая, когда $a/\lambda_g\sim 1$ внутри сфер.

При условии, что в выражениях (4), (7) индекс c принимает значение $c=1$, соотношения (7) будут определять поле рассеянное, резонансной магнитодиэлектрической сферой в свободном пространстве, и для случая, когда $\theta_{1c}<<1$, иметь вид

$$\vec{E}_{pacc}(\vec{r},t)=\frac{3}{k_1^3}(\sin k_1a-k_1a\cos k_1a)\times$$

$$\times\left\{\frac{\varepsilon_{\text{эф}}-\varepsilon_0}{\varepsilon_{\text{эф}}+2\varepsilon_0}\hat{L}\vec{E}_0(\vec{r}')-ik\mu_0\frac{\mu_{\text{эф}}-\mu_0}{\mu_{\text{эф}}+2\mu_0}(-1)\hat{P}\vec{H}_0(\vec{r}')\right\}e^{i(wt-k_1r)}, \quad (9)$$

$$\vec{H}_{pacc}(\vec{r},t)=\frac{3}{k_1^3}(\sin k_1a-k_1a\cos k_1a)\times$$

$$\times\left\{\frac{\mu_{\text{эф}}-\mu_0}{\mu_{\text{эф}}+2\mu_0}(-1)\hat{L}\vec{H}_0(\vec{r}')+ik\varepsilon_0\frac{\varepsilon_{\text{эф}}-\varepsilon_0}{\varepsilon_{\text{эф}}+2\varepsilon_0}\hat{P}\vec{E}_0(\vec{r}')\right\}e^{i(wt-k_1r)},$$

где $\hat{L}$ и $\hat{P}$ – функциональные матрицы (8), величина

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

определяет точку наблюдения (x,y,z) вне сферы рассеянного поля по отношению к центру рассеивающей сферы (x_0,y_0,z_0), а $\vec{E}_0(\vec{r}'),\vec{H}_0(\vec{r}')$ – поле падающей волны в центре сферы [3].

Из (9) для одиночной сферы можно получить условия для электрического и магнитного резонансов в виде (5) [1,2]:

$$F(ka\sqrt{\varepsilon\mu})=-\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon},\quad F(ka\sqrt{\varepsilon\mu})=-\frac{2\mu_0}{\mu}.$$

Литература: 1. *Козарь А.И., Хижняк Н.А.* Отражение электромагнитных волн от резонансной диэлектрической сферы в волноводе // Укр.физ.журн. 1970. Т.15. С.847-849. 2. *Хижняк Н.А.* Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев.: Наук. думка. 1986. 279с. 3. *Левин Л.* Современная теория волноводов. М.: Изд.-во иностр. лит., 1954. 216с.

Поступила в редколлегию 29.05.2002

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Кулагин Н.А.

Козарь Анатолий Иванович, канд. физ.-мат. наук, профессор кафедры физики ХНУРЭ. Научные интересы: радиофизика. Адрес: Украина, 61103, Харьков, ул. 23 Августа, 39, кв. 51, тел. 33-61-43 дом., 40-93-45 раб.