

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет _____ Комп'ютерних наук _____
(повна назва)

Кафедра _____ Штучного інтелекту _____
(повна назва)

АТЕСТАЦІЙНА РОБОТА Пояснювальна записка

рівень вищої освіти _____ другий (магістерський) _____

_____ Оцінювання фрактальних характеристик руху Леві _____
_____ (тема)

Виконав:
студент 2 курсу, групи _____ СШМ-19-1 _____
_____ Белоусова К.В. _____
(прізвище, ініціали)

Спеціальність 122 Комп'ютерні науки _____
_____ (код і повна назва спеціальності)

Тип програми _____ освітньо-професійна _____
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системи штучного інтелекту _____
_____ (повна назва спеціалізації)

Керівник _____ доц. Шергін В.Л. _____
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри _____
(підпис)

_____ В.О. Філатов _____
(прізвище, ініціали)

2020 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет _____ Комп'ютерних наук _____
(повна назва)
Кафедра _____ Штучного інтелекту _____
(повна назва)
Рівень вищої освіти _____ другий (магістерський) _____
Спеціальність _____ 122 Комп'ютерні науки _____
(код і повна назва)
Тип програми _____ освітньо-професійна _____
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма _____ Системи штучного інтелекту (СШІ) _____
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри _____
(підпис)

« _____ » _____ 20 ____ р.

ЗАВДАННЯ
НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові _____ Белоусовій Ксенії Вадимівні _____
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи _____ Оцінювання фрактальних характеристик руху Леві _____

затверджена наказом університету від 30 жовтня 20 20 р. № 1497Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 16 грудня 20 20 р.

3. Вихідні дані до роботи Науково-технічні публікації, дані інтернет-джерел щодо властивостей та методів моделювання самоподібних часових рядів, зокрема фрактального руху Леві, методів оцінювання фрактальних характеристик зазначених рядів

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1) Аналіз предметної області та постановка задачі

2) Оцінювання показника Херста

3) Застосування методу дробових моментів для оцінювання параметрів фрактального руху Леві

4) Програмна реалізація елементів системи оцінювання параметрів фрактального руху Леві

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій (п.5 включається до завдання за рішенням випускової кафедри)_____

Рисунок 1 – Use-case діаграма системи моделювання часових рядів, Рисунок 2 – Діаграма діяльності (activity diagram) системи моделювання часових рядів, Рисунок 3 – Діаграма діяльності (activity diagram) сценарія «Генерація та відображення часового ряду», Рисунок 4 – Екранна форма програмного застосування у режимі проектування, Рисунок 11 – Генерація звичайного броунівського руху, Рисунок 5 – Фрактальна довжина звичайного броунівського руху, Рисунок 6 – Згенерований ряд стійкого процесу Леві, Рисунок 7 – Порівняння ФБР та СПЛ за фрактальною довжиною рядів, Рисунок 8 – Порівняння ФБР та СПЛ за графіками часових рядів, Рисунок 9 – Залежність коефіцієнту кореляції послідовних приростів ФБР від часового проміжку, Рисунок 10 – Графіки антиперсистентного, нейтрального, та персистентного фрактальних броунівських рухів, Рисунок 11 – Фрактальний рух Леві, Рисунок 12 – Фрактальна довжина фрактального руху Леві, Рисунок 13 – Залежність коефіцієнту кореляції послідовних приростів ФРЛ від часового проміжку.

6. Консультанти розділів роботи (п.6 включається до завдання за наявності консультантів згідно з наказом, зазначеним у п.1)

Найменування розділу	Консультант (посада, прізвище, ім'я, по батькові)	Позначка консультанта про виконання розділу	
		підпис	дата
Основна частина	доц. Шергін В.Л.		

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Аналіз предметної області	05.11.2020	виконано
2	Постановка завдання та узгодження з керівником	06.11.2020	виконано
3	Дослідження самоподібних часових рядів	12.11.2020	виконано
4	Аналіз та вибір методів оцінювання показників фрактального руху Леві	15.11.2020	виконано
5	Програмна реалізація системи оцінювання показників фрактального руху Леві	25.11.2020	виконано
6	Написання пояснювальної записки	30.11.2020	виконано
7	Попередній захист	15.12.2020	виконано
8	Захист перед ЕК	16.12.2020	

Дата видачі завдання 01 листопада 2020 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ доц. Шергін В.Л.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 90 с., 1 табл., 31 рис., 83 форм., 1 дод., 25 джерел.

АЛЬФА-СТІЙКІСТЬ, ДРОБОВІ МОМЕНТИ, ПОКАЗНИК ХЕРСТА,
УЗАГАЛЬНЕНИЙ ПОКАЗНИК ВЗАЄМОЗВ'ЯЗКУ, ФРАКТАЛ,
ФРАКТАЛЬНИЙ РУХ ЛЕВІ

Об'єкт дослідження – самоподібні часові ряди, їх властивості.

Предмет дослідження – модель фрактального руху Леві.

Мета роботи – вивчення моделей самоподібних часових рядів, зокрема, моделі фрактального руху Леві, дослідження методів оцінювання їх параметрів, програмна реалізація системи моделювання самоподібних часових рядів та оцінки показників стійкості, Херста та взаємозв'язку методом дробових моментів.

РЕФЕРАТ

Пояснительная записка: 90 с., 1 табл., 31 рис., , 83 форм., 1 прил., 25 источников.

АЛЬФА-УСТОЙЧИВОСТЬ, ДРОБНЫЕ МОМЕНТЫ,
ОБОБЩЁННЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ ВЗАИМОСВЯЗИ, ПОКАЗАТЕЛЬ
ХЁРСТА, ФРАКТАЛ, ФРАКТАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЛЕВИ

Объект исследования – самоподобные временные ряды, их свойства.

Предмет исследования – модель фрактального движения Леви.

Цель работы – изучение моделей самоподобных временных рядов, в частности, модели фрактального движения Леви, исследование методов оценивания их параметров, программная реализация системы моделирования самоподобных временных рядов и оценки показателей устойчивости, Хёрста и взаимосвязи методом дробных моментов.

ABSTRACT

Explanatory note: 90 p., 1 table, 31 fig., , 83 form., 1 app., 25 references.

ALPHA-STABILITY, FRACTAL, FRACTAL LEVY'S MOTION,
FRACTIONAL MOMENTS, GENERALIZED AUTODEPENDENCE
COEFFICIENT, HURST INDEX

The object of the study – self-similar time series, their properties.

The subject of research – the model of the Levy's fractal motion.

The purpose of work – studying models of self-similar time series, in particular, the model of fractal Levy's motion, research of methods for estimating their parameters, software implementation of a system for modeling self-similar time series and estimating their stability index, Hurst index and generalized autodependence coefficient by the fractional moments method.

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень, символів, одиниць, скорочень і термінів	8
Вступ.....	9
1 Аналіз предметної області та постановка задачі	10
1.1 Самоподібність, фрактальна розмірність.....	10
1.2 Броунівський рух.....	13
1.3 Фрактальний броунівський рух. Закон Херста	18
1.4 Стійкі розподіли, стійкий процес Леві.....	21
1.5 Фрактальний рух Леві, класифікація СЧР та постановка задачі.....	26
2 Оцінювання показника Херста	28
2.1 Метод нормованого розмаху.....	28
2.2 Безпосередня оцінка фрактальної розмірності.....	31
2.3 Оцінка лінійної фрактальної розмірності	33
2.4 Розрахунок фрактальної довжини рядів	38
2.5 Розрахунок кореляції суміжних приростів часових рядів	40
3 Застосування методу дробових моментів для оцінювання параметрів фрактального руху Леві.....	42
3.1 Оцінювання індексу стійкості альфа-стійких розподілів методом дробових моментів	42
3.2 Зв'язок між параметрами ФРЛ на основі факторної моделі взаємозв'язку	48
3.3 Оцінювання показника Херста ФРЛ методом дробових моментів.....	51
4 Програмна реалізація елементів системи оцінювання параметрів фрактального руху Леві.....	57
4.1 Розробка структури системи	57
4.2 Моделювання фрактального броунівського руху та руху Леві.....	60
4.3 Розробка інтерфейсу системи оцінювання параметрів СЧР.....	64
4.4 Моделювання фрактальних рядів та оцінювання їх характеристик	67
4.5 Моделювання та оцінювання параметрів фрактального руху Леві	72

Висновки	75
Перелік джерел посилання	77
Додаток А Тексти програм (функцій).....	80
Додаток Б Відомість атестаційної роботи магістра.....	90

**ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, ОДИНИЦЬ,
СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ**

БР – броунівський рух;

СПЛ – стійкий процес Леві;

СЧР – самоподібний часовий ряд;

ФБР – фрактальний броунівський рух;

ФРЛ – фрактальний рух Леві;

UML – universal modelling language – універсальна мова моделювання;

$N(\mu, \sigma)$ – нормальний розподіл;

$S\alpha S$ – симетричний альфа-стійкий розподіл.

ВСТУП

Однією з актуальних наукових і прикладних задач є аналіз випадкових процесів, представлених у вигляді часових рядів.

Поняття часового ряду часто зустрічається в різних предметних областях. Біржові індекси і курси, динаміка чисельності популяцій тварин, сонячна активність, рівні води в річках і озерах. Ці та багато інших процесів і явищ спостерігаються дослідником як часові ряди, та розглядаються ним як реалізації випадкових процесів.

Багато з часових рядів мають властивість статистичної самоподібності (або автомодельності, фрактальності, масштабної інваріантності). Ця властивість полягає в тому, що статистичні характеристики випадкових величин, які спостерігаються як часовий ряд, тотожні з точністю до масштабу. Візуально це властивість проявляється в неможливості визначити масштаб за графіком якщо координатні вісі немарковані.

Найпростішими моделями одновимірного випадкового процесу, що має властивість самоподібності, є випадкове блукання (в дискретному випадку) і броунівський рух (в неперервному випадку). Ці моделі лежать в основі аналізу самоподібних рядів. Разом з тим, вони не дозволяють адекватно описати все розмаїття самоподібних часових рядів, що зустрічаються на практиці. Розширеннями моделі класичного броунівського руху є моделі фрактального броунівського руху та стійких випадкових процесів. Найбільш загальною моделлю є модель фрактального руху Леві (запропонована французьким математиком Полем Леві), яка включає в себе всі вищезгадані моделі як часткові випадки.

Саме дослідження фрактального руху Леві, визначення його характеристик являє собою мету та зміст атестаційної роботи.

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

1.1 Самоподібність, фрактальна розмірність

Термін «фрактал» був введений Бенуа Мандельбротом [1]. Він походить від латинського «fractus» – подрібнений і позначає геометричну фігуру, або інший об'єкт, який має властивість самоподібності та дробову розмірність.

Геометрична самоподібність означає, що частини фігури подібні всій фігурі. А саме, взявши частину фігури можна отримати цілу шляхом простого збільшення масштабу. Багато об'єктів в природі мають фрактальні властивості, наприклад, узбережжя, хмари, крони дерев, сніжинки, кровоносна система людини та ін.

Прикладами фракталів на площині є трикутник (серветка) Серпінського (рисунок 1.1) і сніжинка Коха (рисунок 1.2).



Рисунок 1.1 – Трикутник Серпінського

Детермінований геометричний фрактал є результатом нескінченної рекурсії. Наприклад, трикутник Серпінського будується наступним чином: рівносторонній трикутник ділиться на чотири рівносторонніх трикутника і центральний малий трикутник видаляється. Потім та ж сама процедура застосовується до кожної з трьох частин, що залишилися.

Інший приклад – сніжинка Коха (рисунок 1.2). Для неї рекурсивна процедура полягає в розбитті кожного з відрізків на три частини і заміні середньої частини на дві.

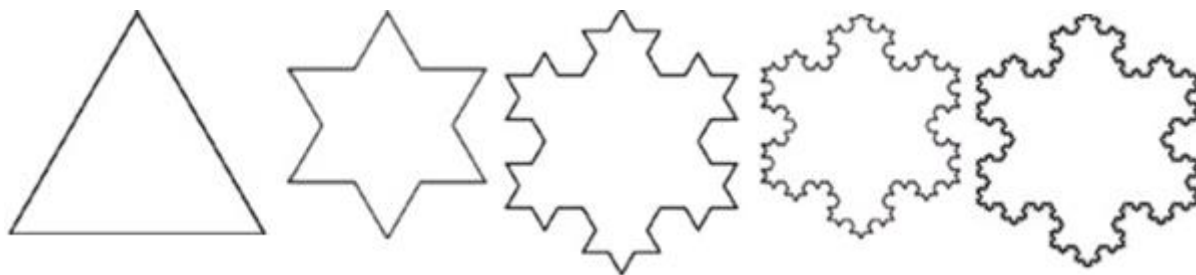


Рисунок 1.2 – Сніжинка Коха

Фрактали мають незвичайні властивості. Так, з точки зору звичайної, «шкільної» геометрії площа трикутника Серпінського дорівнює нулю! Справді: на кожній ітерації вона, очевидно, зменшується на чверть; після n ітерацій вона буде дорівнювати $(3/4)^n$, тобто границя при $n \rightarrow \infty$ дорівнюватиме нулю. Міркуючи аналогічним чином, можна прийти до висновку, що периметр сніжинки Коха нескінченний (хоча площа скінчена). До подібного парадоксу прийшли математики, розглядаючи задачу пошуку довжини узбережжя Британії.

Очевидно, що для фрактальних фігур необхідно було ввести деяку числову міру, відмінну від звичайної (топологічної) розмірності, яка давала б можливість вимірювати ці фігури і порівнювати між собою. Таку міру вів тому ввів німецький математик Хаусдорф.

Виберемо одиницю масштабу r . Будемо вимірювати кількість елементів $N(r)$ фрактальної фігури в цьому масштабі, ігноруючи всі елементи фігури меншого масштабу. Так, під час обрахунку площі трикутника Серпінського будемо враховувати всі непусті трикутники зі стороною r , а під час обрахунку периметра сніжинки Коха – відрізки довжиною r . Очевидно, що при зменшенні масштабу кількість елементарних фігур (трикутників або відрізків) буде зростати. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича визначається наступною формулою:

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N(r)}{\ln(1/r)}. \quad (1.1)$$

Наприклад, для периметра сніжинки Коха оберемо $r = 3^{-n}$, де n – номер ітерації. Тоді матимемо, що $N(0) = 3$, $N(1) = 12, \dots$, $N(r(n)) = 3 \cdot 4^n$.

Згідно з формулою (1.1)
$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3 \cdot 4^n)}{\ln(3^n)} = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1.26.$$

Дробова розмірність є характерною рисою фракталу, яка відрізняє фрактальні фігури від звичайних. Так, якщо аналогічним чином вимірювати периметр звичайної гладкої кривої (наприклад, кола, чи квадрата), то отримаємо, що $D = 1$.

Топологічна розмірність геометричної фігури – це мінімальне число координат, необхідних для її опису як множини точок (зі збереженням їхньої структури природної близькості): наприклад, для опису лінії досить однієї координати, для опису поверхні – двох, для опису просторового тіла – трьох координат. Ця розмірність є топологічним інваріантом (тобто зберігається при взаємно-однозначному і безперервному в обидві сторони відображенні) і позначається D_T .

Відповідно до одного з визначень Мандельброта [1] «фракталом називається множина, хаусдорфова розмірність якої (D) строго більше за її топологічну розмірність (D_T)».

Те, що хаусдорфова розмірність периметра сніжинки Коха лежить між 1 і 2 якраз і ілюструє той факт [2], що він (периметр) «довший» ніж для звичайної гладкої кривої (одновимірного об'єкта), але і двовимірної фігурою він також не є (площа дорівнює нулю). Можна відзначити, що існує об'єкт (крива Пеано), який повністю покриває одиничний квадрат, тобто має метричну розмірність 1, а фрактальну – 2.

Аналогічним чином можна знайти фрактальну розмірність площі трикутника Серпінського:
$$D = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx 1.585.$$

Розглянуті вище приклади фракталів відносяться до так званих точних або детермінованих фракталів. Окрім детермінованих фракталів,

існують ще так звані випадкові фрактали. У розташуванні їх елементів є деяка частка випадковості. Найпростішим випадковим фракталом є траєкторія частки, що здійснює броунівський рух.

1.2 Броунівський рух

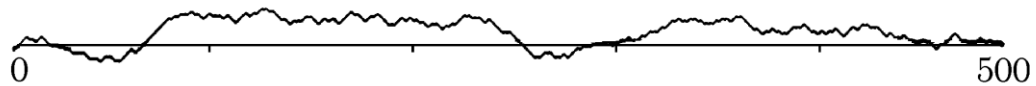
Початок дослідження броунівського руху датується 1827 роком, коли шотландський ботанік Роберт Броун виявив, що дрібні частинки краски, зважені в рідині, здійснюють невпорядкований безперервний рух (рисунок 1.3), який було названо на честь свого відкривача [3]. У 1905 році Альберт Ейнштейн пояснив цей рух хаотичними зіткненнями частинок краски з молекулами рідини.



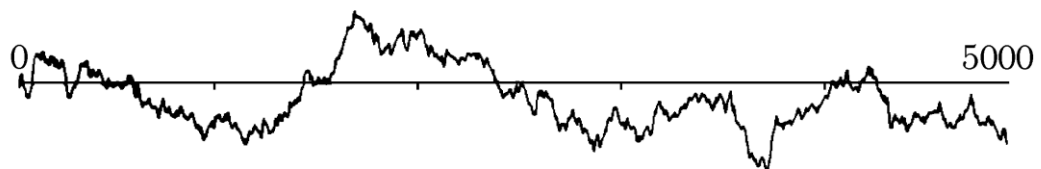
Рисунок 1.3 – а) Броунівський рух. б) Звено АВ траєкторії з (а) при 10-кратному збільшенні.

Найпростішою дискретною моделлю, яка призводить до броунівського руху, є одномірне випадкове блукання. Розглянемо гру в «орлянку» з позиції одного з гравців. Цю задачу розглядав ще Йоганн Бернуллі на початку XVIII століття. Позначимо початковий капітал гравця X_0 . Очевидно, що результат кожного кидка є випадковою величиною, що приймає значення $Z_i = \pm 1$. Якщо монета симетрична, то математичне сподівання виграшу $M[Z_i] = 0$, а дисперсія – $D[Z_i] = \sigma^2 = 1$. Приріст

капіталу за n кидків складе $X_n - X_0 = \sum_{i=1}^n Z_i$. Ця величина також є випадковою. Її часовий ряд буде являти собою випадкове блукання (рисунок 1.4).



(А)



(Б)

Рисунок 1.4 – Одновимірне випадкове блукання. (А) динаміка капіталу гравця на протязі 500 кидків; (Б) на протязі 5000 кидків

Ймовірність того, що цей приріст складе k одиниць, дорівнює ймовірності того, що рівно $x = (n+k)/2$ раз випаде «орел» (а інші $n-x = (n-k)/2$ раз – «решка»). Цю ймовірність можна легко обрахувати за формулою Бернуллі: $P(n, x) = C_n^x p^x q^{n-x}$. Для симетричної монети $p = q = 1/2$ отримаємо, що $P(X_n - X_0 = k) = C_n^{(n+k)/2} (1/2)^n$. Границя при $n \rightarrow \infty$ дорівнює $P(X_n - X_0 = k) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp(-k^2 / (2n))$.

Закон розподілу з щільністю

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{(x - \mu)^2}{-2\sigma^2}\right) \quad (1.2)$$

зветься «нормальним», або «гаусовим» на честь німецького математика Гауса (рисунок 1.5). Якщо випадкова величина X розподілена за нормальним законом (1.2), то це позначають як $X \rightarrow N(\mu, \sigma)$. Параметр μ дорівнює математичному сподіванню випадкової величини (позначається як $M[X] = \mu$) та є мірою положення цієї величини, параметр σ – середньоквадратичне відхилення (корень з дисперсії $D[X] = \sigma^2$); цей параметр характеризує розкид, або масштаб досліджуваної випадкової величини X . Стандартний гаусівський закон (тобто $N(0,1)$) має вигляд:

$$f(x; 0, 1) = \exp(-x^2 / 2) / \sqrt{2\pi} \quad (1.3)$$

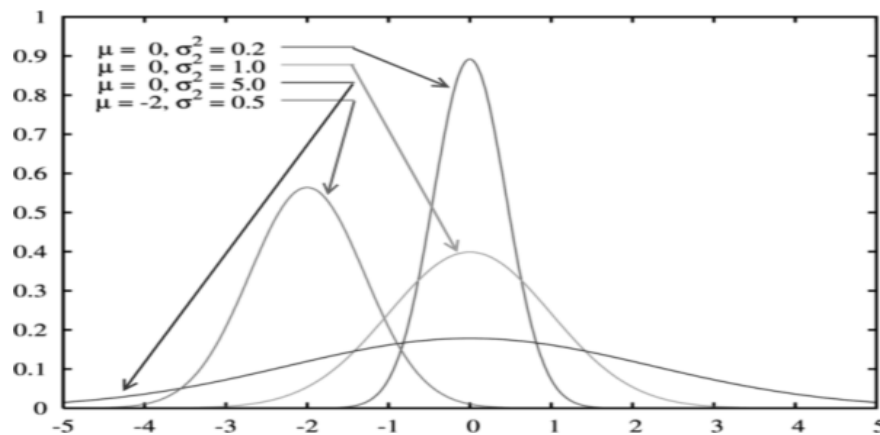


Рисунок 1.5 – Розподіл Гауса

Повертаючись до задачі одновимірного випадкового блукання, можна стверджувати, що при великій кількості кидків монети $X_n - X_0 \rightarrow N(0, \sqrt{n})$.

Гаусівський закон розподілу займає виняткове становище в теорії ймовірностей в силу центральної граничної теореми, згідно з якою закон

розподілу суми з n незалежних однаково розподілених випадкових величин з математичним сподіванням μ та скінченною дисперсією $\sigma^2 < \infty$ при $n \rightarrow \infty$ прагне до гаусівського закону (1.2).

Таким чином, гаусовість розподілу суми виграшу в «орлянку» проявляється як окремий випадок центральної граничної теореми.

Аналогічним чином, можна показати, що виграш, наприклад, в «камінь-ножиці-папір» також буде прагнути за розподілом до нормального закону.

Модель двовимірного випадкового блукання можна уявити собі як описану гру з киданням двох монет з окремим урахуванням балансу по кожній. Асимптотичним законом розподілу буде двовимірний нормальний розподіл.

Оскільки видиме переміщення броунівської частинки є результатом впливу на неї великої кількості «поштовхів» з боку молекул рідини, то воно, вочевидь, буде описуватися тією ж моделлю випадкового блукання, що і гра з киданням монет. Вимога щодо обмеженості дисперсії в даному випадку означає обмеженість теплової енергії молекул. Основна відмінність броунівського руху від розглянутої моделі випадкового блукання полягає у неперервності часу.

Математичну модель броунівського руху побудував Норберт Вінер в 1923 році. Випадковий процес $X(t)$ називається одновимірним броунівським рухом (БР), або вінерівським процесом на інтервалі $[a, b]$, якщо він має такі властивості [3]:

- $X(0) = 0$, та функція $X(t)$ майже всюди неперервна;
- гаусовість приростів: випадкова величина $\Delta X = X(t_2) - X(t_1)$, для довільних $t_2 > t_1 \geq 0$ має гаусівський розподіл (1.2) з нульовим математичним сподіванням та з дисперсією $\sigma^2(t_2 - t_1)$:

$$\Delta X(t_1, t_2) = X(t_2) - X(t_1) \rightarrow N\left(0, \sigma\sqrt{t_2 - t_1}\right). \quad (1.4)$$

Важливою властивістю БР є незалежність приростів: для будь яких часових відрізків $[t_1, t'_1]$ та $[t_2, t'_2]$ випадкові величини $\Delta X_1 = X(t'_1) - X(t_1)$ та $\Delta X_2 = X(t'_2) - X(t_2)$ є незалежними. Ця властивість випливає безпосередньо з формули (1.4).

Броунівський рух $X(t)$ є непервною, але ніде не диференціюємою функцією. Приклад одновимірного броунівського руху наведено на рисунку 1.6.

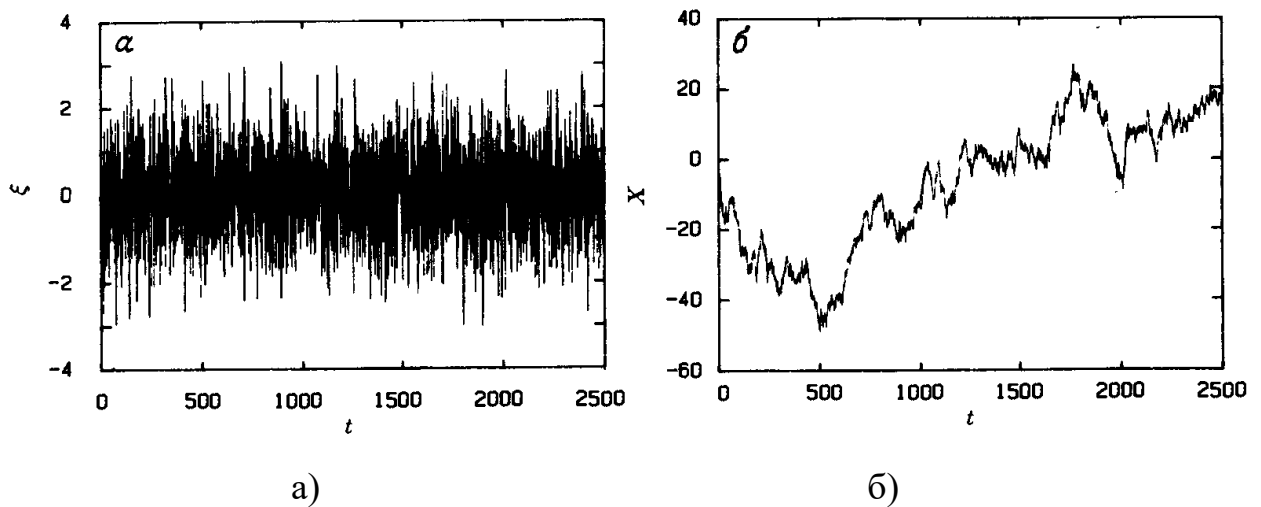


Рисунок 1.6 – Одновимірний броунівський рух. а) – приріст випадкової величини $\Delta X(t)$; б) – значення випадкової величини $X(t)$

Графіки часових рядів БР (рисунок 1.6), та одновимірного випадкового блукання (рисунок 1.4), є схожими на фрактальні криві (типу сніжинки Коха, рисунок 1.2), чи поверхні (типу серветки Серпинського, рисунок 1.1). У всіх цих випадках є справедливим твердження, що «частина схожа на ціле». Й дісно, часовий ряд траєкторії БР є фрактальною кривою. Головною відмінністю між БР та геометричними фракталами є те, що БР є випадковим процесом, отже, його самоподібність розуміється в статистичному сенсі. Тобто як схожість законів розподілу всього випадкового процесу і його частин, а зовсім не як

графічна схожість однієї конкретної реалізації і її фрагментів.

Випадковий процес (тобто часовий ряд) $X(t)$ називається самоподібним часовим рядом (СЧР), якщо за будь-яких $b > 0$, $t > 0$ закони розподілів величин $X(bt)$ та $b^H X(t)$ співпадають:

$$Law(X(bt)) = Law(b^H X(t)). \quad (1.5)$$

Параметр $0 < H \leq 1$ називають параметром самоподібності, або параметром скейлінга, або показником Херста.

Сенс визначення (1.5) полягає в тому, що масштабування часу з довільним коефіцієнтом $b > 0$ не змінює форми та закону розподілу $X(t)$, а лише призводить до масштабування цього ряду з коефіцієнтом b^H .

Оскільки у випадку одновимірного БР значення ряду $X(t)$ та його прирости $\Delta X(t_1, t_2)$ розподілені за гаусовим законом, то з формул (1.4) та (1.5) випливає, що одновимірне БР є СЧР з параметром самоподібності $H = 1/2$. Іншими словами, масштабування проміжку часу $t_2 - t_1$ в b разів призводить до масштабування розподілу у \sqrt{b} разів.

Аналогічно, самоподібними кривими є сніжинка Коха (детерміністський фрактал) або довжина узбережжя острова (випадковий фрактал).

1.3 Фрактальний броунівський рух. Закон Херста

Багато природних, технічних та інших процесів проявляються у формі часових рядів. Наприклад, є довгі ряди вимірів температури повітря. У них ясно простежуються річні варіації. Тривале вимірювання температури виявляє її неупорядковану поведінку як на коротких, так і на довгих часових інтервалах. Часові послідовності вимірювань таких

величин, як температура, стік річок, кількість опадів або товщина кілець дерев, можна досліджувати за допомогою методу нормованого розмаху, або методу Херста.

Гарольд Едвін Херст – британський гідролог. Він займався вивченням Нілу і вирішенням задач, пов'язаних з накопиченням водних ресурсів. Аналізуючи багатовікові статистичні дані рівня води в Нілі, він розробив новий статистичний метод – метод нормованого розмаху, або R/S метод.

Для часового ряду, який складається з n спостережень за випадковим процесом $X(t)$, можна розрахувати розмах (R) та середньоквадратичне відхилення (S):

$$R_n(X) = \max_i(X_i) - \min_i(X_i), \quad S_n(X) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Delta X_i - \overline{\Delta x})^2}, \quad (1.6)$$

$$\text{де } \overline{\Delta x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta X_i = \frac{X_n - X_0}{n}, \quad \Delta X_i = X_i - X_{i-1}.$$

Вибірковий розмах (R_n) та вибіркове середньоквадратичне відхилення (S_n), вочевидь, є також випадковими величинами. Закони їхнього розподілу залежать від розподілу ряду $X(t)$, а числові характеристики – від числових характеристик $X(t)$ та від обсягу вибірки (n). При цьому нормований розмах, тобто відношення R/S , є безрозмірною величиною яка характеризує динамічні властивості випадкового процесу.

Відомо, що для одновимірного БР з ростом n нормований розмах прагне до

$$R_n / S_n = (\pi n / 2)^{1/2}. \quad (1.7)$$

Однак Херст виявив, що для багатьох часових рядів, що описують різні природні явища, справедливо більш загальне емпіричне співвідношення:

$$R_n / S_n = Cn^H. \quad (1.8)$$

Величина H називається показником Херста (Hurst exponent) та знаходиться в діапазоні від 0 до 1.

Важливість відкриття Херста обумовлена тим, що часові ряди з $H \neq 1/2$ не можуть бути описані моделлю броунівського руху та мають ряд цікавих властивостей.

Мандельброт ввів поняття узагальненого, або фрактального броунівського руху (ФБР).

Гаусівський процес $X(t)$ називається одновимірним ФБР з параметром H ($0 < H < 1$) на інтервалі $[a, b]$, якщо він має такі властивості [3]:

- $X(0) = 0$, та функція $X(t)$ майже всюди неперервна;
- властивість гаусовості приростів: випадкова величина $\Delta X = X(t_2) - X(t_1)$, $t_2 > t_1$ має гаусівський розподіл (1.2) з нульовим математичним сподіванням та з дисперсією:

$$D[\Delta X] = D[X(t_2) - X(t_1)] = \sigma^2 |t_2 - t_1|^{2H}. \quad (1.9)$$

Можна зазначити, що звичайний БР є частковим випадком фрактального, якому відповідає значення показника Херста $H = 1/2$.

ФБР (так само, як і звичайний БР) є безперервною, але ніде не диференційованою функцією. Фрактальна («клітинна») розмірність Хаусдорфа ФБР дорівнює $D = 2 - H$.

Фундаментальною особливістю ФБР є взаємозалежність приростів

при $H \neq 1/2$. З цієї причини його не можна змодельовати підсумовуванням гаусівських (або асимптотично гаусівських) незалежних випадкових величин на відміну до того, як експеримент з підкиданням монет можна використати для моделювання звичайного БР [3].

Якщо минулий приріст ФБР $\Delta X_{-t} = X(0) - X(-t)$ є відомим, то математичне сподівання добутку майбутнього $\Delta X_t = X(t) - X(0)$ та минулого приростів, нормоване на їхні дисперсії складає [5]:

$$K(t) = \frac{M[\Delta X_{-t} \Delta X_t]}{\sqrt{D[\Delta X_{-t}] D[\Delta X_t]}} = 2^{2H-1} - 1. \quad (1.10)$$

Ця величина називається автокореляційною функцією приростів та характеризує силу взаємокореляції минулих і майбутніх приростів.

Якщо $H > 1/2$, то $K(t) > 0$ і ФБР називають персистентним, тобто таким, що зберігає тенденцію. Це означає, що якщо в минулому на інтервалі $[-t, 0]$ приріст був позитивним, то і на інтервалі $[0, t]$, тобто в майбутньому, позитивний приріст буде більш ймовірним, ніж негативний.

Відповідно й навпаки: якщо $H < 1/2$, то $K(t) < 0$ та ФБР є антиперсистентним; зростання величини $X(t)$ в минулому робить більш ймовірним її зменшення в майбутньому.

В обох розглянутих випадках автокореляційна функція $K(t)$ (1.10) зберігає свій знак і величину при будь-якому значенні t . Це означає, що час кореляції є нескінченим. Іншими словами, ФБР є процесом з нескінченою пам'яттю.

1.4 Стійкі розподіли, стійкий процес Леві

Стійкий розподіл – це такий розподіл, яке може бути отримано як межа по розподілу сум незалежних випадкових величин. Точне визначення

стійкості розподілу має наступний вигляд:

Розподіл P^X випадкових величин X_i називається стійким [6], якщо для будь-яких $n \geq 2$ та $c_k > 0$ ($k = 1, \dots, n$) існують такі значення $c_0 > 0$ та b_0 , що розподіл випадкової величини $c_0 X_0 + b_0$ співпадає з розподілом зваженої суми n незалежних величин, що сліdkують цьому ж закону:

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n \stackrel{\Delta}{=} c_0 X_0 + b_0, \quad X_k \rightarrow P^X, \quad k = 0, \dots, n. \quad (1.11)$$

Розподіл називають суворо стійким, якщо параметр $b_0 = 0$.

Якщо умова (1.11) виконується, то існує параметр $\alpha \in (0; 2]$ такий, що для довільних значень c_1, c_2, \dots, c_n є справедливим твердження:

$$|c_1|^\alpha + |c_2|^\alpha + \dots + |c_n|^\alpha = |c_0|^\alpha. \quad (1.12)$$

Стійкі закони характеризуються чотирма параметрами:

- $\alpha \in (0; 2]$ – параметр форми;
- $\beta \in [-1; 1]$ – параметр асиметрії;
- $c \in (0; \infty)$ – параметр масштаба (міра розкиду);
- $\mu \in (-\infty; \infty)$ – параметр положення (міра зсуву вздовж вісі абсцис).

Параметр α є найбільш важливим, тому стійкі розподіли часто називають α -стійкими.

Так, відмінною рисою нормального (гаусівського) розподілу (1.2), що виділяє його серед всіх інших законів, є саме його стійкість: як уже зазначалося, в силу центральної граничної теореми сума незалежних однаково розподілених випадкових величин з скінченою дисперсією сходиться до гаусівському закону. Разом з тим, існують і інші стійкі закони, наприклад закон Коші з щільністю

$$f_C(x; c, \mu) = \frac{c / \pi}{c^2 + (x - \mu)^2}. \quad (1.13)$$

В загальному випадку (тобто окрім законів Гауса та Коші) щільності α -стійких розподілів $g(x; \alpha, \beta, c, \mu)$ не можна виразити через елементарні математичні функції. Замість щільностей користуються характеристичними функціями таких розподілів.

Альфа-стійкі розподіли $g(x; \alpha, \beta, 1, 0)$ з параметрами $c = 1$ та $\mu = 0$ називають стандартизованими. Графіки щільностей α -стійких стандартизованих розподілів наведені на рисунку 1.7. Дуже важливим частковим випадком α -стійких розподілів є симетричні незміщені розподіли ($\beta = \mu = 0$). Такі розподіли позначають аббревіатурою $S\alpha S$ (symmetric α -stable) [7]. Для $S\alpha S$ -розподілів характеристична функція має досить простий вигляд:

$$\varphi(t; \alpha, 0, c, 0) = \exp(-|ct|^\alpha). \quad (1.14)$$

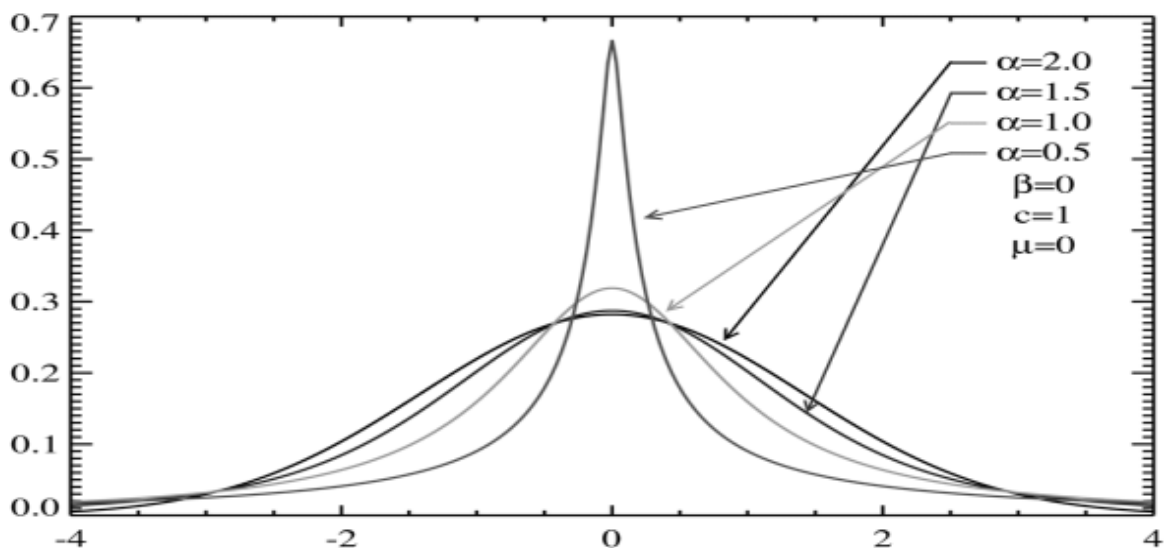


Рисунок 1.7 – Щільності α -стійких розподілів

Частковими випадками α -стійких розподілів є випадки $\alpha = 1$, $\beta = 0$ та $\alpha = 2$. Перший з них відповідає розподілу Коші (1.13), а другий – гаусівському розподілу (1.2) з $\sigma = c\sqrt{2}$.

Сума $S\alpha S$ -випадкових величин $X_1 \rightarrow g(\alpha, 0, c_1, 0)$, $X_2 \rightarrow g(\alpha, 0, c_2, 0)$ розподілена за таким самим законом $g(\alpha, 0, c, 0)$ з параметром масштабу

$$c = \left(c_1^\alpha + c_2^\alpha \right)^{1/\alpha}. \quad (1.15)$$

Альфа-стійкі розподіли мають початкові моменти, порядок яких (k), не перевищує α : $M[x^k] = \infty$ якщо $k \geq \alpha$. З цього випливає, що при $\alpha \leq 1$ розподіли не мають математичного сподівання, а при $\alpha \neq 2$ – дисперсії. Таким чином, класичний нормальний розподіл є хоча і дуже важливим, але все ж частковим випадком сімейства стійких розподілів, а саме, таким стійким розподілом, який має дисперсію.

Ключовою рисою α -стійких розподілів при $\alpha \neq 2$ є наявність «важких хвостів». Це зумовлено тим, що при $\alpha \neq 2$, та великих (за модулем) значеннях x щільність розподілу спадає як

$$g(x; \alpha, \beta, c, \mu) \underset{|x| \rightarrow \infty}{\approx} \text{const} \cdot |x|^{-(1+\alpha)}. \quad (1.16)$$

З формули (1.16) випливає, що ймовірність появи у вибірці дуже великих (за модулем) значень (тобто «викидів») є суттєво більшою, ніж для нормального розподілу. Так, для незміщеного гаусівського розподілу (1.2) одиничного масштабу ($\mu = 0$, $c = 1$, $\sigma = c\sqrt{2} = \sqrt{2}$) щільність розподілу у точці $x = 10$ дорівнює $f_G(10) = 3.9 \cdot 10^{-12}$, а для розподілу Коші (1.13) (також $\mu = 0$, $c = 1$) – $f_C(10) = 0.0031$.

Більш строго, розподіл має важкий правий хвіст, якщо

$P(X > x) = 1 - F(x) = x^{-\alpha} L(x)$, где $L(x)$ – довільна функція, яка зростає на нескінченності повільніше, ніж будь-яка ступенева. Аналогічним чином формалізується і «важкий лівий хвіст» (тобто при $x \rightarrow -\infty$).

Для ілюстрації «тяжкості хвостів» більш інформативним, ніж графік щільності (рисунок 1.7), є графік «хвостів» $S\alpha S$ -законов, тобто значень величини $1 - F(x)$. Цей графік (в логарифмічному масштабі) представлений на рисунку 1.8.

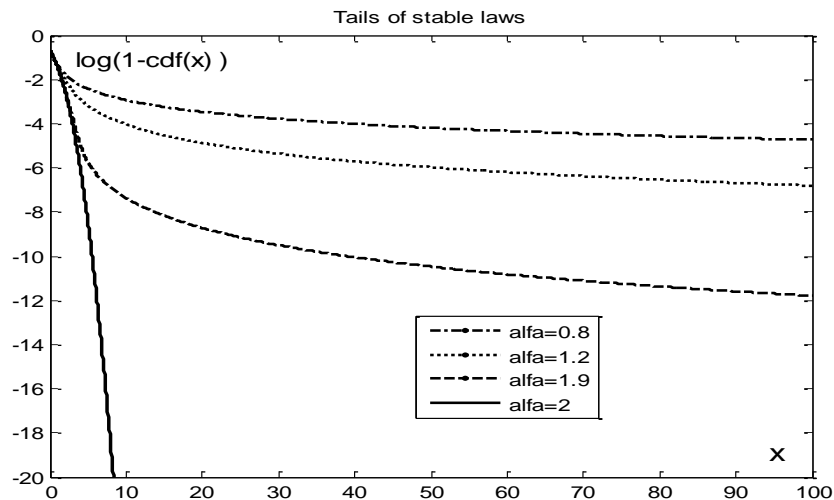


Рисунок 1.8 – «Хвости» α -стійких розподілів

Випадковий процес $X(t)$ називається стійким процесом Леві (СПЛ) на інтервалі $[a, b]$, якщо він має такі властивості [1]:

- $X(0) = 0$, та функція $X(t)$ майже всюди неперервна;
- стійкість та незалежність приростів: для довільних відрізків часу $[t_1, t'_1]$ та $[t_2, t'_2]$ випадкові величини $\Delta X_1 = X(t'_1) - X(t_1) \rightarrow g(x; \alpha, \beta_1, c_1, \mu_1)$ та $\Delta X_2 = X(t'_2) - X(t_2) \rightarrow g(x; \alpha, \beta_2, c_2, \mu_2)$ є незалежними.

Зазвичай розглядають такий частковий випадок процесу Леві, при якому прирости випадкової величини розподілені за $S\alpha S$ -законом:

$$\Delta X \rightarrow g(\Delta X; \alpha, 0, c(t_2 - t_1)^{1/\alpha}, 0). \quad (1.17)$$

Альфа-стійкий процес Леві ϵ , вочевидь, самоподібним з показником Херста $H = 1/\alpha$. Звичайний БР є частковим випадком СПЛ при $\alpha = 2$.

Таким чином, фрактальний рух Леві ϵ ще одним (крім ФБР) узагальненням броунівського руху.

1.5 Фрактальний рух Леві, класифікація СЧР та постановка задачі

Проведене дослідження предметної області, а саме, моделей одновимірних самоподібних часових рядів (СЧР), дозволяє класифікувати їх за двома ознаками: наявністю «важких хвостів» та за наявністю довгострокових взаємозалежностей приростів. Класифікація СЧР наведена на рисунку 1.9.

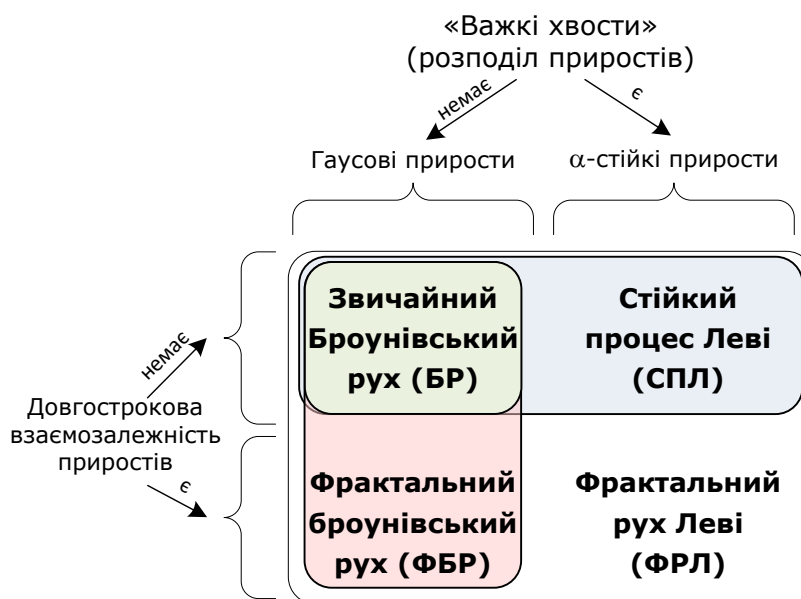


Рисунок 1.9 – Класифікація одновимірних СЧР

Відповідно до цієї класифікації найпростішою моделлю СЧР є модель звичайного БР, у якій прирости є незалежними випадковими величинами та розподілені за законом Гауса (тобто «важких хвостів» немає).

У моделі ФБР природи часового ряду також розподілені за законом Гауса, але є взаємозалежними з автокореляційною функцією (1.10).

У моделі СПЛ – навпаки: природи часового ряду є незалежними випадковими величинами, але вони розподілені за α -стійким законом, що призводить до «важкості хвостів» розподілу (як приростів, так і самих значень часового ряду).

Найбільш загальною з моделей СЧР є модель фрактального руху Леві (ФРЛ), згідно з якою, природи вважаються водночас α -стійкими та взаємозалежними. Така модель поєднує в собі моделі ФБР та СПЛ.

Розробка елементів програмного забезпечення (ПЗ) для моделювання ФРЛ і є основною задачею, що розглядається у атестаційній роботі.

Як показав первинний аналіз існуючого ПЗ, існує багато бібліотек (зокрема, у MatLab, SciPy, R, та на мовах/середовищах загального застосування) призначених для моделювання та аналізу БР та ФБР. Також існують, хоча й значно менше за кількістю та мовною/платформною базою, пакети та модулі (у тих же MatLab, SciPy) для моделювання СПЛ. В той же час, єдиних та уніфікованих пакетів/модулів, призначених для моделювання ФРЛ не існує, що й зумовлює актуальність теми роботи.

Основними задачами, які плануються до розв'язання в атестаційній роботі є:

- оцінювання показника Херста ФРЛ за умови, що показник стійкості є відомим;
- оцінювання показника стійкості ФРЛ за умови, що показник Херста є відомим;
- сумісне оцінювання показників Херста та стійкості ФРЛ;
- моделювання ФРЛ та чисельні експерименти з оцінювання параметрів ФРЛ.

2 ОЦІНЮВАННЯ ПОКАЗНИКА ХЕРСТА

2.1 Метод нормованого розмаху

Найпростішим методом оцінки показника Херста (H) є метод нормованого розмаху, запропонований самим Херстом. Відповідно до даного методу для оцінювання використовується безпосередньо співвідношення (1.8). З нього випливає, що

$$\log(Q_n) = \log(R_n/S_n) = H \cdot \log(n) + \log(C). \quad (2.1)$$

Значення H оцінюють з формули (2.1) методом лінійного регресійного аналізу.

Без порушення спільності, вісь часу масштабується так, щоб мінімальний крок уздовж неї дорівнював одиниці. Алгоритм оцінки показника Херста методом нормованого розмаху має наступний вигляд [10], [11]:

Крок 1. Сформуємо масив відліків $X_i^{(0)}$ з $(N+1)$ значення досліджуваного часового ряду $X(t)$, які взяті з мінімальним часовим кроком.

Крок 2. Задамо масив значень кроків відліку (k_j) , $j = 1, \dots, m-1$.
Встановимо $j = 0$, початковий крок $k_0 = 1$.

Крок 3. Якщо $j = 0$, то масиви відліків збігаються з вихідними ($X = X^{(0)}$), а кількість відліків (крім нульового) $n = N$.

Інакше $n = \text{int}(N/k_j)$, масив відліків (X) формується з вихідного $X^{(0)}$ шляхом проріджування з коефіцієнтом k_j : $X_i = X_{k_j \cdot i}^{(0)}$ ($i = 0, \dots, n$).

Крок 4. Сформуємо масив приростів значень досліджуваного ряду:

$Y_i = X_i - X_{i-1}$ ($i = 1, \dots, n$), розрахуємо середній приріст $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$. Легко

бачити, що його можна розрахувати за простішою формулою:

$$\bar{y} = (X_n - X_0) / n. \quad (2.2)$$

Крок 5. Згідно з формулою (1.6) розрахуємо розмах елементів ряду X (R_n), середньоквадратичне відхилення його приростів (S_n) і нормований розмах (Q_n):

$$R_n = \max_{1 \leq i \leq n} (X_i) - \min_{1 \leq i \leq n} (X_i), \quad S_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \bar{y}^2}, \quad Q_n = R_n / S_n. \quad (2.3)$$

Зберігаємо логарифми величин n та Q_n в масивах U, Z розміром m , індексованих по j ($u_j = \log(n)$, $z_j = \log(Q_n)$). Можна використовувати натуральні логарифми, десяткові, двійкові та ін. Основа ролі не грає і може бути будь-якою позитивною, крім одиниці. Звичайно, однаковою протягом роботи всього алгоритму.

Крок 6. Інкрементуємо j . Якщо не всі кроки відліку перебрані $j < m$, то повертаємось до кроку 3.

Крок 7. Розраховуємо H як кутовий коефіцієнт лінії регресії між Z та U (тобто між $\log(Q_n)$ та $\log(n)$) звичайним методом найменших квадратів:

$$H = \frac{\sum_{j=0}^{m-1} (z_j u_j) - m \cdot \bar{z} \cdot \bar{u}}{\sum_{j=0}^{m-1} u_j^2 - m \cdot \bar{u}^2}, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} z_j, \quad \bar{u} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} u_j. \quad (2.4)$$

Як набір величин кроків відліку (k_j) використовують або послідовність малих цілих чисел (2,3,4, ...), або послідовність ступенів одного малого цілого числа (p, p^2, p^3, \dots). У другому випадку не потрібно зберігати вихідний масив відліків $X_i^{(0)}$: на третьому кроці алгоритму масив X формується шляхом проріджування самого себе з коефіцієнтом p : $X_i = X_{p \cdot i}$. Очевидно, що для раціонального використання даних бажано (але зовсім необов'язково) підбирати $N = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_{m-1}$, або $N = p^{m-1}$.

При застосуванні описаного алгоритму до «штучним» часових рядах слід враховувати особливості алгоритмів їх генерації. Так, якщо вихідний ряд був отриманий методом послідовного випадкового складання з половинним діленням кроку, то в алгоритмі нормованого розмаху не рекомендується використовувати кроки відліку (k_j или p^j), які дорівнюють ступеню двійки.

Основним недоліком методу нормованого розмаху є його низька точність. Так, співвідношення (1.7) і (1.8) виконуються лише асимптотично, при $n \rightarrow \infty$, а при скінченних значеннях n породжувананими оцінка показника Херста є зміщеною [10].

Якщо ігнорувати скінченність n та застосовувати для оцінки H модель (2.1), засновану на формулі (1.8), то отримані оцінки будуть помітно завищені і вказувати на наявність довгострокової залежності, насправді відсутньої. В таблиці 2.1 наведені оцінки показника Херста за моделлю (2.1) для класичного БР, для якого «справжнє» значення $H = 0.5$.

Таблиця 2.1 – Оцінки H за моделлю (2.1) при скінчених n

n	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384
H	0,727	0,666	0,621	0,588	0,564	0,546	0,533	0,524	0,517	0,512	0,509	0,506	0,504

У разі фрактального характеру БР (тобто при $H \neq 1/2$) точних аналітичних формул оцінки математичного очікування нормованого розмаху не існує. Асимптотична оцінка має вигляд (1.8), однак вона, так само, як і (1.7), є зміщеною.

2.2 Безпосередня оцінка фрактальної розмірності

Альтернативним методом оцінювання показника Херста є метод безпосередньої оцінки фрактальної розмірності кривої. Згідно [5] для її отримання уздовж кривої укладається еталон довжиною δ , тобто лінійка з кроком ділення δ . Деталі кривої, менші δ є нерозрізнені. Довжина кривої $L(\delta)$ дорівнює кількості використаних еталонів. Фрактальна розмірність кривої оцінюється згідно з формулою (1.1) як межа кутового коефіцієнта нахилу прямої лінії – залежності $\log(L(\delta))$ від $\log(1/\delta)$ при $\delta \rightarrow 0$.

Якщо крива не самоподібна, а самоафінна, то використовуваний еталон повинен в загальному випадку мати різний масштаб (різну довжину) уздовж осей часу і координати. Будемо вибирати еталон таким чином, щоб він завжди повністю покривав крок по вісі часу τ , тобто мав розмір $\delta = \tau + \varepsilon$ уздовж вісі часу (ε – величина, нескінченно мала в порівнянні з τ). Масштаб еталона уздовж вісі координати X позначимо як x . У цьому випадку довжина кривої вздовж осі часу $L_k^{(\tau)} = \lfloor \tau / \delta \rfloor$ дорівнює нулю, а вздовж осі x вона дорівнює відношенню модуля збільшення випадкового процесу до масштабу еталона, усіченому до

цілого: $L_k^{(x)} = \left\lfloor \frac{|X((k+1)\tau) - X(k\tau)|}{x} \right\rfloor$. Тоді довжина

k -го відрізка кривої дорівнює $L_k = \sqrt{(L_k^{(\tau)})^2 + (L_k^{(x)})^2} = L_k^{(x)}$. Загалом таких відрізків $K = T / \tau$, тому довжина всієї кривої дорівнює

$$L(\delta) = \sum_{k=0}^{K-1} \left\lfloor \frac{|X((k+1)\tau) - X(k\tau)|}{x} \right\rfloor. \quad (2.5)$$

Фрактальна розмірність кривої згідно з (1.1) обчислюється як

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(L(\delta))}{\log(1/\delta)} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\log(L(\tau))}{-\log(\tau)}. \quad (2.6)$$

Важливо розуміти, що результат обчислень (тобто значення і сенс отриманої розмірності) істотно залежить від способу масштабування вздовж координати X . Розглянемо два варіанти.

Відповідно до першого з способів масштаб x вздовж координати X пропорційний до масштабу τ вздовж вісі часу: $x = a\tau$. Враховуючи, що при $\tau \rightarrow 0$ оператор усікання до цілого $\lfloor \cdot \rfloor$ в (2.5) можна вилучити, то з (2.5) і (2.6) випливає, що

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} L(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{a\tau} \sum_{k=0}^{T/\tau-1} |X((k+1)\tau) - X(k\tau)| \right\}. \quad (2.7)$$

Математичне сподівання цієї величини дорівнює

$$M \left[\lim_{\tau \rightarrow 0} L(\tau) \right] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{T}{a\tau^2} \cdot M[\Delta X(\tau)] \right\}. \quad (2.8)$$

Оскільки для ФБР математичне очікування приросту $M[\Delta X(\tau)]$ пропорційно до τ^H , то формула (2.6) дає так звану «клітинну» розмірність, або розмірність покриття D_c , математичне очікування якої має вигляд

$$M[D_c] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\log(C\tau^{H-2})}{-\log(\tau)} = 2 - H. \quad (2.9)$$

Розмірність покриття проілюстрована на рисунку 2.1 сірим прямокутником.

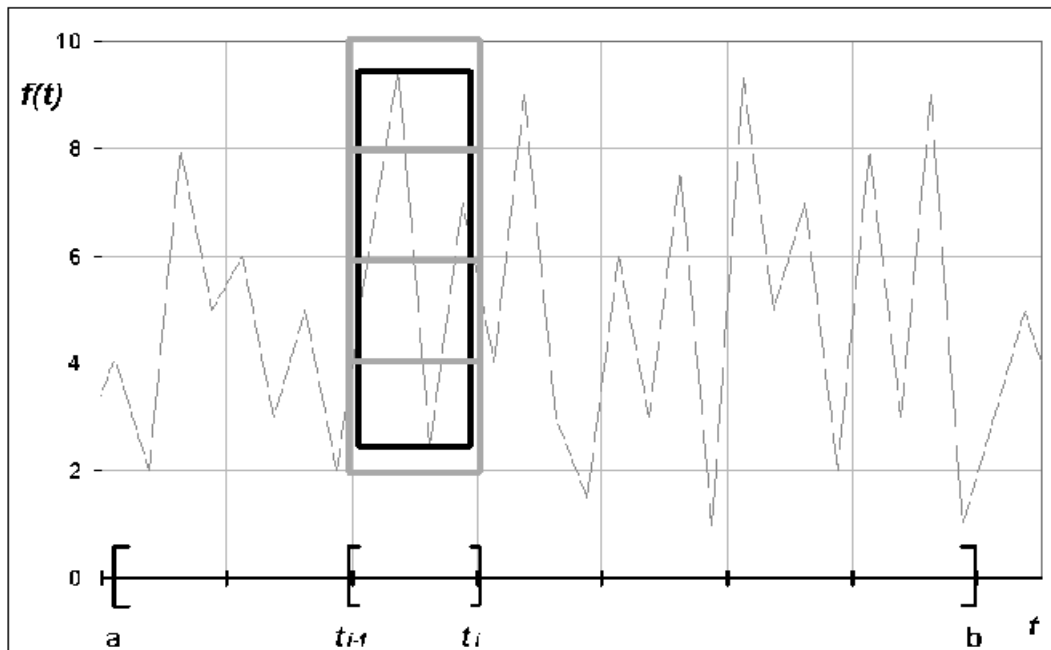


Рисунок 2.1 – Клітинне покриття функції $f(t)$ на інтервалі $[t_{i-1}, t_i]$

2.3 Оцінка лінійної фрактальної розмірності

Згідно з другим варіантом масштаб x уздовж координати X є постійним і нескінченно малим в порівнянні з τ . З практичної точки зору це означає, що всі виміри уздовж вісі X проводяться точно, а тому

$$L(\tau) = \frac{1}{x} \cdot \sum_{k=0}^{T/\tau-1} |X((k+1)\tau) - X(k\tau)|. \quad (2.10)$$

Тоді за аналогією з формули (2.9) матимемо:

$$M[L(\tau)] = \frac{T/x}{\tau} \cdot M[\Delta X(\tau)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{T\sigma}{x} \cdot \tau^{H-1} = C_2 \tau^{H-1}. \quad (2.11)$$

Математичне очікування лінійної фрактальної розмірності D_L дорівнює

$$M[D_L] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\log(C_2 \tau^{H-1})}{-\log(\tau)} = 1 - H. \quad (2.12)$$

Слід зауважити, що з математичної точки зору використане припущення про сталість і нескінчену малість $x \in$ некоректним: оскільки $\tau \rightarrow 0$, то воно неминуче стане менше будь-якого наперед заданого постійного значення x . Якщо ж припустити, що $x \in$ функцією від τ , то буде втрачена основна перевага даного варіанта, що складається в можливості використання точних вимірювань.

Насправді це протиріччя лише здається і легко усувається: досить припустити, що функція $x(\tau)$ спадає швидше будь-якої ступеневої функції: наприклад експоненціально $x = Ce^\tau$, або ще швидше. Тоді $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\log(x)}{\log(\tau)} = 0$, та справедливість формули (2.12) зберігається. При цьому, очевидно, завжди можна подумки підібрати таку функцію $x(\tau)$, для якої при практично використовуваних значеннях τ і розрядності сітки по X оператор усікання до цілого $\lfloor \cdot \rfloor$ в формулі (2.5) можна опустити.

Між «клітинною» (2.9) і лінійною (2.12) фрактальними розмірностями існує просте співвідношення

$$D_c = D_L + 1. \quad (2.13)$$

Важливо зазначити, що співвідношення (2.13) справедливо не тільки

для розглянутого випадку, коли досліджуваної самоафінної кривої є ФБР, воно є фундаментальним властивістю самих розмірностей і пов'язане з тим, що при пошуку лінійної розмірності (2.12) один з вимірів штучно редукується шляхом відповідного вибору масштабів розбиття по осях.

З проведеного аналізу випливає, що при будь-якій кінцевій величині τ формули типу (2.9) або (2.12) містять методичну похибку. Так, вираз (2.12) набуває вигляду

$$d_L = \frac{\log(L(\tau))}{-\log(\tau)}, \quad (2.14)$$

а його математичне очікування:

$$M[d_L] = \frac{\log(C_2 \tau^{H-1})}{-\log(\tau)} = \frac{(H-1)\log(\tau) + \log(C_2)}{-\log(\tau)} = 1 - H - \varepsilon, \quad (2.15)$$

де $\varepsilon = \log_\tau(C_2)$ – стала, яка не залежить від шуканої фрактальної розмірності.

З практичної точки зору це означає, що графік залежності $L(\tau)$ від τ , побудований в подвійному логарифмічному масштабі (тобто як залежність $\log(L(\tau))$ від $\log(\tau)$), сходиться до прямо пропорційної залежності лише асимптотично, при $\tau \rightarrow +0$. Спроба знайти кутовий коефіцієнт цієї залежності по одній точці, тобто при одному значенні τ призведе до впливу заздалегідь невідомого значення методичної похибки (ε). Більш того, при такому підході величину кроку по часу не можна прийняти за одиницю ($\tau = 1$), як це зазвичай прийнято, бо отримаємо $\log(1) = 0$ в знаменнику.

Виходом з цієї ситуації може служити розрахунок сум модулів довжин фрактальної кривої $L(\tau)$ для різних значень τ з наступною

побудовою графіка (в подвійному логарифмічному масштабі) і графічним знаходженням кутового коефіцієнта асимптоти. Недоліком такого підходу є великий обсяг обчислень і низька точність графічного знаходження кутового коефіцієнта.

З цієї причини для знаходження лінійної фрактальної розмірності застосовують регресійний аналіз і знаходять її методом найменших квадратів:

$$d_L = \frac{\sum_{j=1}^m (z_j u_j) - m \cdot \bar{z} \cdot \bar{u}}{\sum_{j=1}^m u_j^2 - m \cdot \bar{u}^2}, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m z_j, \quad \bar{u} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m u_j. \quad (2.16)$$

де m – кількість різних значень кроків τ_j ; $t_j = \lfloor T / \tau_j \rfloor$ – кількість елементів ряду (з кроком τ_j);

$$u_j = -\log(\tau_j), \quad z_j = \log(L_j), \quad L_j = \left(\sum_{k=0}^{t_j-2} |X((k+1)\tau_j) - X(k\tau_j)| \right). \quad (2.17)$$

Якщо довжини використовуваних кроків дорівнюють $1, 2, \dots, m$, тобто $\tau_j = j$, то формула (2.17) дещо спрощуються:

$$u_j = -\log(j), \quad z_j = \log(L_j), \quad t_j = \lfloor T / j \rfloor, \quad L_j = \left(\sum_{k=0}^{t_j-2} |X_{(k+1) \cdot j} - X_{k \cdot j}| \right). \quad (2.18)$$

Згідно з формулою (2.12) оцінка показника Херста матиме вигляд

$$H = 1 - d_L. \quad (2.19)$$

Алгоритм, який реалізує описаний підхід, матиме такий вигляд:

Крок 1. Задати кількість різних довжин кроків m . Зазвичай $m \leq 5$.

Крок 2. Встановити нульові значення в змінні z_1, u_2, z_0, u_0 .

Крок 3. Почати цикл по $j = 1, \dots, m$

Крок 4. Розрахувати u_j та t_j згідно з формулою (2.18).

Крок 5. В циклі по $k = 0, \dots, t_j - 1$ знайти L_j з формули (2.18).

Крок 6. Розрахувати z_j за формулою (2.18).

Крок 7. Оновити змінні-накопичувачі: $z_{1+} = z_j \cdot u_j, \quad u_{2+} = u_j^2,$

$$z_{0+} = z_j, \quad u_{0+} = u_j.$$

Крок 8. Завершити цикл по j .

Крок 9. Розрахувати \bar{u} (під ім'ям u_0 як $u_0 = u_{0+} / m$), аналогічним чином обчислити \bar{z} .

Крок 10. Розрахувати d_L за формулою (2.16).

Крок 11. Знайти шукану оцінку показника Херста (H) за формулою (2.19).

В роботі [7] показано, що даний алгоритм має приблизно ту ж асимптотичну точність оцінювання показника Херста, що і алгоритм методу нормованого розмаху (описаний в підрозділі 2.1), однак метод лінійної фрактальної розмірності простіше в реалізації, ніж метод нормованого розмаху. З практичної точки зору відзначається [7], що на реальних даних (коли заздалегідь невідомо, чи відповідає ряд моделі ФБР, чи ні) розкид оцінок H , отриманих методом лінійної фрактальної розмірності, менше, ніж у разі застосування методу нормованого розмаху.

2.4 Розрахунок фрактальної довжини рядів

Якщо часовий ряд X_t заданий на проміжку $[0, N]$, тобто складається з $N + 1$ точки (та N елементарних проміжків між ними), то довжина ламаної лінії, яка є реалізацією ряду, дорівнює сумі модулів приростів:

$$L(1) = \sum_{t=0}^{N-1} |X_{t+1} - X_t|. \quad (2.20)$$

У разі, якщо збільшувати масштаб, тобто вважати елементарними проміжки часу розміром $\Delta t = 2, 3, 4, \dots$, то довжина ламаної за аналогією з (2.20) складе

$$L(\Delta t) = \sum_{\substack{n=0, \\ \text{by } \Delta t}}^{N-1} |X_{t+\Delta t} - X_t|. \quad (2.21)$$

Згідно з формулою (2.21) розрахунок фрактальної довжини кривої самоподібного часового ряду можна здійснити за допомогою наступного алгоритма:

Крок 1. Розрахувати $n = \log_2 N$ та початковий крок $\Delta t = N / 2$.

Крок 2. Вибрати з ряду X_t елементи з індексами від $t = 0$ до N з кроком Δt .

Крок 3. Обрахувати прирости значень сформованого ряду.

Крок 4. Просумувати модулі цих приростів, занести результат $L(\Delta t)$ у вихідний масив.

Крок 5. Якщо $\Delta t = 1$, завершити роботу алгоритма. Інакше – зменшити вдвічі Δt та повернутись до кроку 2.

Легко бачити, що цей алгоритм відповідає широко відомому

«клітинному» методу оцінки фрактальної розмірності [1].

Згідно з властивостями стійких розподілів [6] якщо елементарний приріст $\Delta X_t = X_{t+1} - X_t$ розподілений за $S\alpha S$ законом $g(\alpha, 0, c, 0)$ (з індексом стійкості α та масштабом c), то математичне очікування модуля приросту дорівнює

$$M \{|X_{t+1} - X_t|\} = m_1 = 2c / \Gamma(1/\alpha), \quad (2.22)$$

де $\Gamma(x)$ – гамма-функція Ейлера (яка є узагальненням факторіалу на дробові аргументи).

Зменшення масштабу (тобто вибір $\Delta t > 1$) призводить до зміни масштабу випадкової величини приросту відповідно до формули (1.5), тобто

$$M \{|X_{t+\Delta t} - X_t|\} = m_{\Delta t} = m_1 (\Delta t)^H. \quad (2.23)$$

З формул (2.21) та (2.23) випливає, що для процесів, які розглядаються,

$$M \{L(\Delta t)\} = \frac{N}{\Delta t} m_1 (\Delta t)^H = \frac{2cN}{\Gamma(1/\alpha)} (\Delta t)^{H-1}. \quad (2.24)$$

З формули (2.24) легко бачити, що довжина графіку самоподібного випадкового процесу ступеневим чином залежить від масштабу, тобто саме так, як і для кривої Коха. Згідно з формулою (1.1) фрактальна розмірність такого процесу становить $D_{ser} = 1 - H$, а фрактальна розмірність його приростів – $D_{noise} = 2 - H$.

2.5 Розрахунок кореляції суміжних приростів часових рядів

Згідно з роботами [3], [5] важливою характеристикою фрактальних рядів є автокореляційна функція суміжних приростів ($\Delta X_{t,-\Delta t} = X_t - X_{t-\Delta t}$ та $\Delta X_{t,+\Delta t} = X_{t+\Delta t} - X_t$):

$$K(\Delta t) = \text{corr}(\Delta X_{t,-\Delta t} \cdot \Delta X_{t,+\Delta t}) = \frac{M\{(X_t - X_{t-\Delta t})(X_{t+\Delta t} - X_t)\}}{\sqrt{D\{X_t - X_{t-\Delta t}\} \cdot D\{X_{t+\Delta t} - X_t\}}}. \quad (2.25)$$

Доведено [5], що для ФБР ця функція є константою від Δt та дорівнює

$$K(\Delta t) = 2^{2H-1} - 1. \quad (2.26)$$

Незалежність автокореляційної функції (2.25) суміжних приростів ряду від інтервалу часу, за який взяті ці прирости, є одним з проявів довгострокової залежності приростів (іншим проявом є ступеневий характер спадання модулю автокореляційної функції між приростами, що не є суміжними, а відстоять один від одного на часовий інтервал τ). Довгострокова залежність приростів є характерною рисою ФБР у порівнянні з звичайним БР, для якого $H = 1/2$ і тому $K(\Delta t)$ (2.26) тотожно дорівнює нулю.

Згідно з (2.25) для чисельного розрахунку коефіцієнту кореляції між суміжними приростами ряду пропонується наступний алгоритм:

Крок 1. Розрахувати $n = \log_2 N$ та масив значень Δt (наприклад, у геометричній прогресії від 1 до $N/16$ з знаменником $\sqrt[4]{2}$).

Крок 2. Починаємо цикл (s – змінна циклу) по елементам масиву Δt .

Крок 3. Вибрати з ряду X_t елементи з індексами від $t = 0$ до N з

кроком Δt_s .

Крок 4. Обрахувати «минулі» та «майбутні» прирісти значень сформованого ряду $\Delta X_{t,-\Delta t_s} = X_t - X_{t-\Delta t_s}$ та $\Delta X_{t,+\Delta t_s} = X_{t+\Delta t_s} - X_t$.

Крок 5. Розрахувати коефіцієнт кореляції між отриманими масивами, занести результат у вихідний масив під індексом s .

Крок 6. Кінець циклу (крок 2).

Слід зазначити, що коефіцієнти кореляції завжди можна розрахувати чисельно для будь-якого ряду (навіть не тільки самоподібного), проте у разі, якщо прирісти ряду є альфа-стійкими (наприклад, СПЛ та ФРЛ), то математичне очікування коефіцієнтів кореляції невизначене. Це пов'язано з тим, що коефіцієнт кореляції, так само, як й дисперсія, є моментом другого порядку, а альфа-стійкі випадкові величини не мають моментів порядку вищого, ніж α [6].

Таким чином, виникає цікава ситуація, коли кореляцію суміжних приростів СПЛ та ФРЛ можна чисельно розрахувати, але нема з чим порівнювати.

3 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДРОБОВИХ МОМЕНТІВ ДЛЯ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ФРАКТАЛЬНОГО РУХУ ЛЕВІ

3.1 Оцінювання індексу стійкості альфа-стійких розподілів методом дробових моментів

Класичним методом отримання точкових оцінок параметрів розподілів є метод моментів. Він характеризується низькою обчислювальною складністю. Однак область його застосування фактично обмежена класом розподілів, підлеглих нормальному, тобто мають індекс стійкості $\alpha = 2$. Це пов'язано з тим, що при $\alpha < 2$ випадкова величина не має моментів порядку α і вище. В роботі [6] для оцінювання параметрів стійких розподілів запропонований метод логарифмічних моментів. Він є простим в реалізації, однак по ефективності одержуваних оцінок поступається методам, заснованим на переході в частотну область.

У той же час, поняття моменту випадкової величини можна узагальнити на випадок якщо $s \in \alpha$, тобто використовувати дробові моменти. Відомо [6], що при будь-якому значенні α існує безліч таких значень s , при яких момент порядку s існує.

Абсолютний момент порядку s випадкової величини з щільністю розподілу $f(x)$, що розглядається як функція від s , називається двостороннім перетворенням Мелліна (від його щільністю розподілу) [6]:

$$(M f f(x))(s) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^s f(x) dx. \quad (3.1)$$

Відомо [15], що альфа-стійка випадкова величина має моменти порядку $-1 < s < \alpha$. Для незміщених стійких випадкових величин перетворення Мелліна (3.1) має аналітичний вираз у вигляді

$$(\mathbb{M} g(x; \alpha, \rho, \gamma))(s) = \gamma^s \frac{\cos(\frac{\pi s}{2}(2\rho-1)) \cdot \Gamma(1-s/\alpha)}{\cos(\frac{\pi s}{2}) \cdot \Gamma(1-s)}, \quad (3.2)$$

де $\Gamma(x)$ – гамма-функція.

Якщо випадкова величина симетрична ($\rho = 1/2$) і має одиничний масштаб ($\gamma = 1$), вираз (3.2) набуває вигляду

$$(\mathbb{M} g(x; \alpha))(s) = \gamma^s \cdot \frac{\Gamma(1-s/\alpha)}{\cos(\frac{\pi s}{2}) \cdot \Gamma(1-s)} = \frac{\Gamma(1-s/\alpha)}{\chi(s)}, \quad (3.3)$$

де позначено

$$\chi(s) = \cos(\frac{\pi s}{2}) \cdot \Gamma(1-s) \geq 1. \quad (3.4)$$

Графік функції (3.4) наведено на рисунку 3.1. Легко бачити, що при $0 < s \leq 1$ він майже збігається з лінійним $(\pi/2 - 1) \cdot s + 1$. В той же час,

$$\lim_{s \rightarrow 2} \chi(s) = \infty.$$

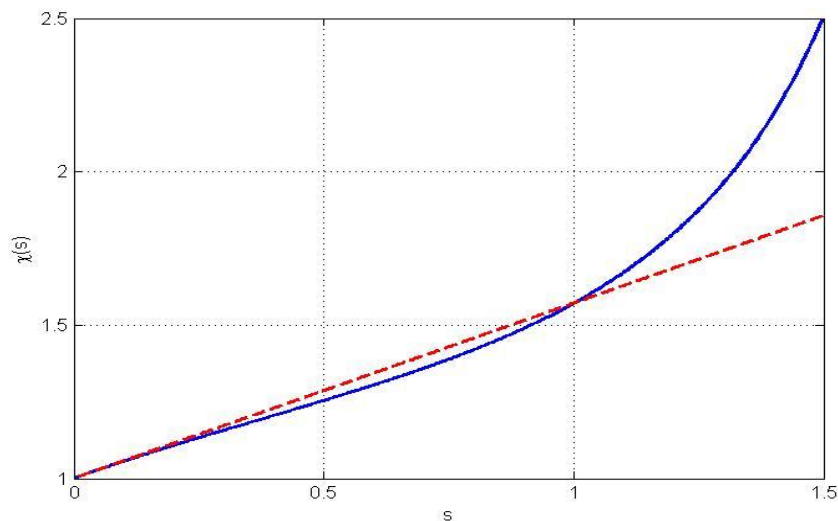


Рисунок 3.1 – Графік функції $\chi(s) = \cos(\frac{\pi s}{2}) \cdot \Gamma(1-s)$

Замінюючи в співвідношенні (3.3) теоретичне значення моменту $(M g(x; \alpha))(s)$ його вибіркоvim значенням $Z_n(s)$, можна отримати оцінку індексу стійкості α :

$$\alpha(n, s) = \frac{s}{1 - \Gamma^{-1}(\chi(s) \cdot Z_n(s))} = \frac{s}{1 - \Gamma^{-1}(1 + Y_n(s))}, \quad (3.5)$$

де

$$Z_n(s) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |X_k|^s, \quad Y_n(s) = \chi(s) \cdot Z_n(s) - 1. \quad (3.6)$$

Оцінка (3.5), незважаючи на простоту математичного запису, має очевидний недолік, пов'язаний з використанням функції $\Gamma^{-1}(u)$, оберненої до гамма-функції $u = \Gamma(x)$. Обернена гамма-функція не тільки не відноситься до елементарних (з точки зору математики), але і не реалізована ні в одному з відомих інженерних і математичних пакетів. Таким чином, для її обчислення слід чисельно розв'язувати нелінійне рівняння $\Gamma^{-1}(u) = \underset{x \in (0;1)}{\text{sol}} \{ \Gamma(x) = u \}$, або (що дещо зручніше) оптимізаційну задачу: $\Gamma^{-1}(u) = \underset{x \in (0;1)}{\text{arg min}} \left\{ (\Gamma(x) - u)^2 \right\}$. Цей недолік істотно знижує практичну цінність запропонованого методу і, з іншого боку, робить неможливим аналіз властивостей оцінки (3.5)–(3.6) аналітичними методами.

В роботі [16] показано, що наближена оцінка індексу стійкості

$$\alpha(n, s) \approx s \left(a + \frac{b}{Y_n(s)} \right) = s \left(a + \frac{b}{\chi(s) \cdot Z_n(s) - 1} \right), \quad (3.7)$$

де $a = 1.19236$,
 $b = 0.64072$

дає похибку, що не перевищує 3.5%, що цілком прийнятно з практичної точки зору.

В роботі [15] зазначено, що оцінка (3.7) є асимптотично незміщеною, а її дисперсія становить

$$D(\alpha(n, s)) \approx \frac{b^2 \cdot D_0(\alpha, s)}{n}, \quad (3.8)$$

де

$$D_0(\alpha, s) = \frac{s^2 \left(\frac{\chi^2(s)}{\chi(2s)} \Gamma(1 - 2\frac{s}{\alpha}) - \Gamma^2(1 - \frac{s}{\alpha}) \right)}{\left(\Gamma(1 - \frac{s}{\alpha}) - 1 \right)^4}. \quad (3.9)$$

Графік функції (3.9) наведено на рисунку 3.2.

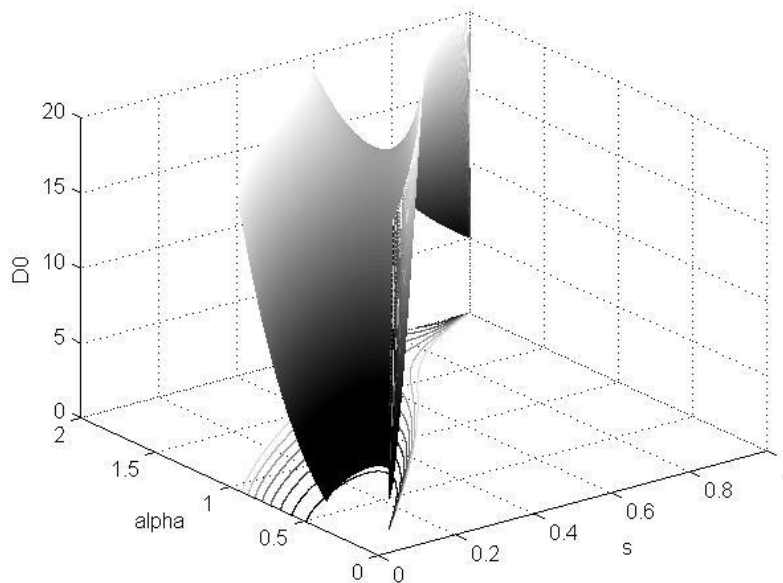


Рисунок 3.2 – Графік асимптотичної дисперсії оцінок $D_0(\alpha, s)$ за моделлю (3.9)

Згідно з цим графіком, для кожного значення оцінюваної величини α існують значення дробового порядку s , які забезпечують локальний

мінімум значенням асимптотичної дисперсії оцінок. Таким чином, точність оцінювання буде тим вище, чим s ближче до

$$s_{\min}(\alpha) = \arg \min_{-1/2 < s < \alpha/2} (D_0(\alpha, s)). \quad (3.10)$$

Графіки залежності $s_{\min}(\alpha)$ наведені на рисунку 3.3 (а), а графіки значень функції (3.9), що відповідають $s = s_{\min}(\alpha)$ – на рисунку 3.3 (б).

Згідно з цими графіками, функція $D_{0,\min}(\alpha)$ досягає максимуму при $\alpha^* \approx 1.707$, чому відповідає значення $s_{\min} \approx 0.665$. Таким чином, значення індексу стійкості, що знаходяться в околиці α^* , є найменш сприятливими для їх оцінювання запропонованим методом.

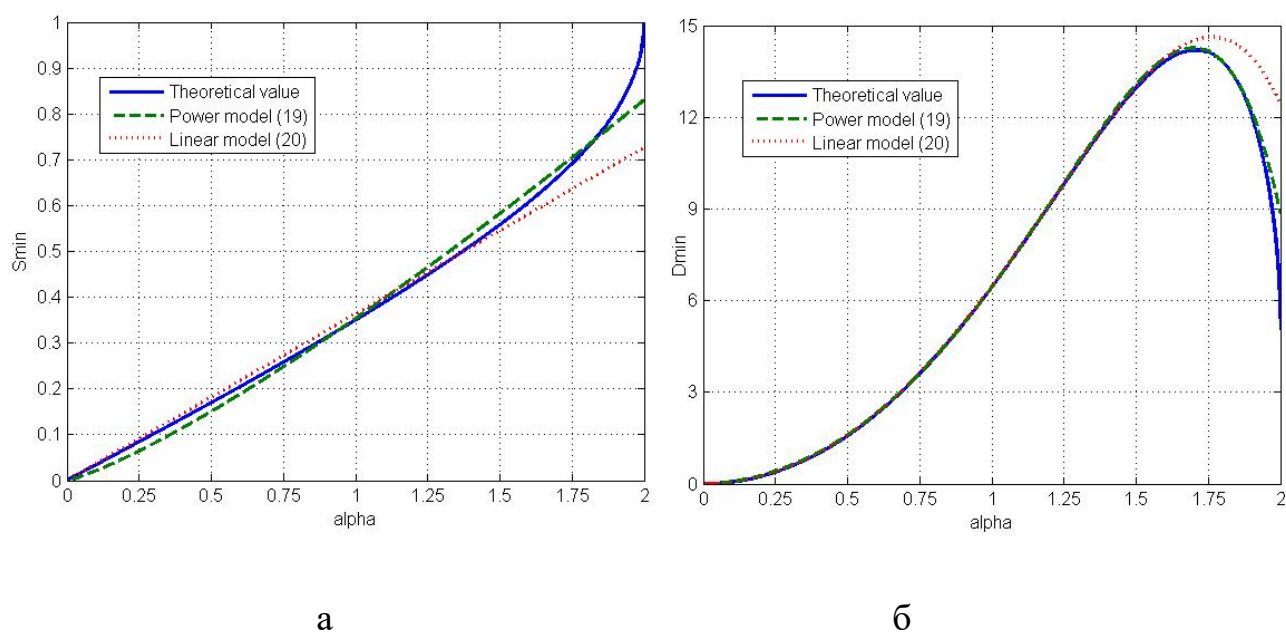


Рисунок 3.3 – Залежності $s_{\min}(\alpha)$, $D_{0,\min}(\alpha)$, отримані шляхом чисельної мінімізації (3.10) по s , та за допомогою моделей (3.11):

а – залежність $s_{\min}(\alpha)$, б – залежність $D_{0,\min}(\alpha)$

Залежність (3.10) може бути апроксимована виразами

$$s_{\min}^{pow} = 0.35281 \cdot \alpha^{1.2332}, \quad s_{\min}^{linear} = 0.3630 \cdot \alpha. \quad (3.11)$$

Залежності (3.11) та значення функції $D_{0,\min}(\alpha)$, отримані при їх підстановці в формулу (3.9), також представлені на рисунку 3.3. Таким чином, при заданому значенні дробового моменту s оцінка індексу стійкості α має вигляд:

$$\alpha(n, s) = s \left(a + \frac{b}{\chi(s) \cdot Z_n(s) - 1} \right), \quad (3.12)$$

де $Z_n(s) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |X_k|^s$, $\chi(s) = \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \Gamma(1-s)$, $a = 1.19236$,

$$b = 0.64072.$$

Оцінка (3.12) буде максимально точною при $s = s_{\min}^{pow}(\alpha)$ (3.11).

У зв'язку з цим для оцінки індексу стійкості пропонується проста ітераційна процедура:

$$s^{(m+1)} = s_{\min}^{pow} \left(\alpha(n, s^{(m)}) \right), \quad (3.13)$$

де функції $s_{\min}^{pow}(\alpha)$ та $\alpha(n, s^{(m)})$ обчислюються згідно з (3.11) та (3.12) відповідно.

Умова виходу має вигляд $|s^{(m+1)} - s^{(m)}| \leq tol$. Як значення $s^{(0)}$ та tol в роботі [17] рекомендується використовувати величини 0.25 та 10^{-4} відповідно.

3.2 Зв'язок між параметрами ФРЛ на основі факторної моделі взаємозв'язку

Як було зазначено під час аналізу проблемної області, ФРЛ має три ключові властивості: самоподібність, «важкі хвости» та довгострокову залежність приростів. Числовими мірами цих властивостей є відповідно показник Херста (H), показник стійкості (α) та міра взаємозв'язку приростів (r_n , зокрема значення r_1), яка узагальнює автокореляційну функцію.

Окремими випадками ФРЛ є моделі звичайного і фрактального броунівського руху, а також модель сталого процесу Леві. Відомо, що у всіх цих окремих випадках параметри H, α, r_n взаємопов'язані. У той же час, для загального випадку вид зазначеного зв'язку довгий час був невідомим. Насамперед, це було обумовлено відсутністю узагальнення автокореляційної функції приростів на випадок, коли ці прирости є альфа-стійкими та $\alpha \neq 2$.

У гаусівському випадку (тобто при $\alpha = 2$), що відповідає моделям БР та ФБР, мірою взаємозв'язку сусідніх приростів випадкової величини служить коефіцієнт кореляції. Але якщо $\alpha < 2$, то випадкові величини не мають моментів другого порядку, тому потрібно узагальнити визначення показника взаємозв'язку r_1 на цей випадок. Для цього пропонується [2] інтерпретувати взаємозв'язок між спостережуваними випадковими величинами як результат симетричного перемішування незалежних прихованих чинників. Відповідно до цього підходу взаємозв'язок спостережуваних однаково розподілених випадкових величин (x, y) розглядається як результат перемішування незалежних (і також однаково між собою розподілених) неспостережуваних випадкових величин (u, v) :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

З точки зору геометричної інтерпретації, перемішування (3.14) являє собою контраваріантне перетворення координат між прямокутною декартовою системою XOY та косокутною UOV з координатним кутом $\eta = \pi/2 - 2\theta$, поверненою на кут $\theta = \arctan(b/a)$. При цьому коефіцієнт взаємозв'язку (кореляції) дорівнює косинусу координатного кута:

$$r_{xy} = \cos(\eta) = \sin(2\theta) = 2ab / (a^2 + b^2). \quad (3.15)$$

Якщо виміряти координати точок еліпса розсіювання гаусівських випадкових величин (x, y) в косокутній системі координат UOV , а потім «розтиснути ножиці» (тобто розташувати осі OU та OV під прямим кутом), то еліпс розсіювання прийме форму кола, як і повинно бути в разі незалежних випадкових величин. Єдина відмінність гаусівського випадку від альфа-стійкого проявляється у формі «еліпсів» розсіювання (тобто кривих постійної щільності), які в разі альфа-стійкого розподілу мають дещо іншу форму. Так, на рисунку 3.4 показані відповідні криві для двовимірного розподілу Коші ($\alpha = 1$) для залежних змінних (x, y) і прихованих чинників (u, v) .

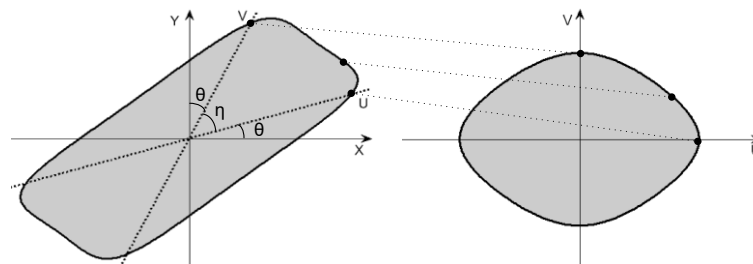


Рисунок 3.4 – Геометрична інтерпретація взаємозв'язку між випадковими величинами, розподіленими за законом Коші

Іншими словами, спостерігач інтерпретує наявність взаємозв'язку між (x, y) як результат переходу від «природної» косокутній системи координат до прямокутної. Можлива і зворотна інтерпретація сутності взаємозв'язку (як на правій частині рисунок 3.4): як перехід від прямокутної системи UOV до косокутної XOY .

В моделі ФРЛ прирости випадкового процесу підкоряються симетричним альфа-стійким законам $g(x; \alpha, \gamma)$ з параметрами стійкості $0 < \alpha \leq 2$ і масштабу $\gamma > 0$. При лінійній комбінації незалежних випадкових величин одиничних масштабів (тобто для моделі (3.14)) параметри масштабів пов'язані співвідношенням:

$$\gamma_x = \gamma_{au+bv} = (|a|^\alpha + |b|^\alpha)^{1/\alpha} = \gamma_{bu+av} = \gamma_y. \quad (3.16)$$

Згідно з визначенням самоподібності, для будь-якого $c > 0$ розподіл величини X_{ct} ідентичен розподілу величини $c^H X_t$:

$$\text{Law}\{X_{ct}\} = \text{Law}\{c^H X_t\}. \quad (3.17)$$

Зокрема, приріст досліджуваного випадкового процесу за два такти має масштаб, в 2^H більший, ніж за один такт: $\gamma_{x+y} = 2^H \gamma_x$. Згідно ж моделі перемішування прихованих чинників (3.14),

$\gamma_{x+y} = \gamma_{(a+b)(u+v)} = 2^{1/\alpha} |a+b|$, тобто

$$2^{1/\alpha} |a+b| = 2^H (|a|^\alpha + |b|^\alpha)^{1/\alpha}. \quad (3.18)$$

З формул (3.15) та (3.18) випливає, що шукана залежність $\eta(\alpha, H)$, зображена на рисунку 3.5 має наступний вигляд:

$$r_1 = 2z / (1 + z^2), \quad z = \underset{|z| \leq 1}{\text{sol}} \left\{ (1 + z)^\alpha = 2^{\alpha H - 1} (1 + |z|^\alpha) \right\}. \quad (3.19)$$

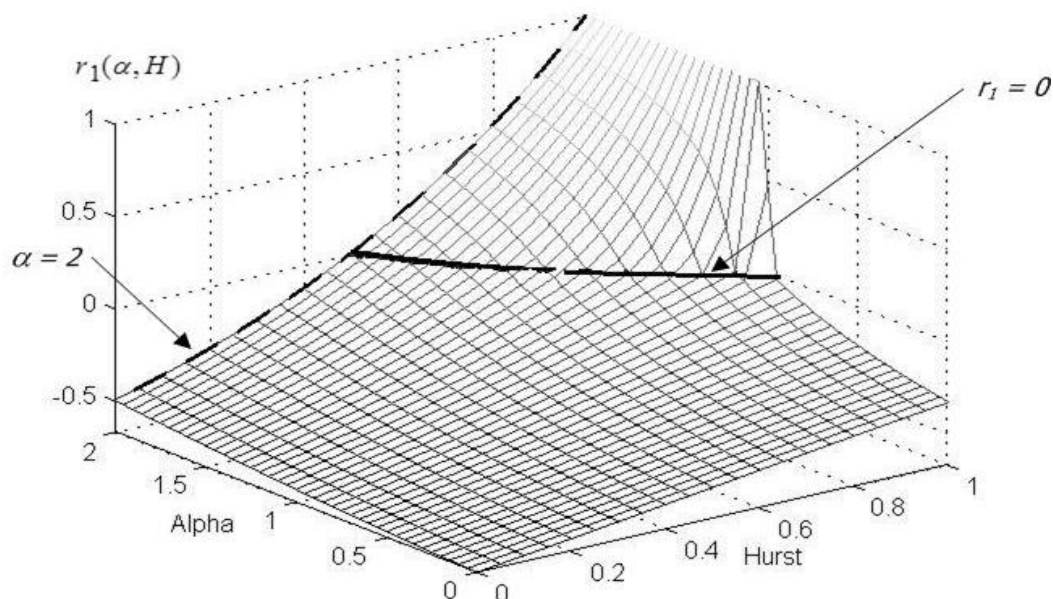


Рисунок 3.5 – Залежність $\eta_1(\alpha, H)$ для фрактального руху Леві

Таким чином, була знайдена залежність коефіцієнта взаємозв'язку між сусідніми приростами фрактального руху Леві (3.19) від показників Херста і стійкості. Ця залежність була побудована чисельним методом.

3.3 Оцінювання показника Херста ФРЛ методом дробових моментів

Як було визначено в розділі 3.1, момент порядку s випадкової величини X , розподіленої за альфа-стійким законом має вигляд (3.3), тобто:

$$E\{|X|^s\} = \gamma^s \cdot \frac{\Gamma(1 - s/\alpha)}{\chi(s)}. \quad (3.20)$$

Розглянемо послідовні однокрокові прирости ФРЛ (з довільним кроком часу τ) та відповідні двоступеневі прирости:

$$V_t = |X_{t+\tau} - X_t|^s, \quad U_t = |X_t - X_{t-\tau}|^s, \quad W_t = |X_{t+\tau} - X_{t-\tau}|^s. \quad (3.21)$$

Без обмеження загальності ми можемо взяти $Scale\{X_1\} = 1$, тому з головної властивості масштабування самоподібних процесів (1.5) та (2.23) випливає, що

$$Scale\{X_t - X_{t-\tau}\} = \tau^H, \quad Scale\{X_{t+\tau} - X_{t-\tau}\} = (2\tau)^H. \quad (3.22)$$

Згідно з формулами (3.20) та (3.22) отримуємо:

$$E\{V\} = E\{U\} = \tau^{sH} \cdot \frac{\Gamma(1 - \frac{s}{\alpha})}{\chi(s)} = \mu_1, \quad E\{W\} = (2\tau)^{sH} \cdot \frac{\Gamma(1 - \frac{s}{\alpha})}{\chi(s)} = \mu_2. \quad (3.23)$$

Замінюючи в формулі (3.23) теоретичні значення моментів порядку s на їхні вибіркові значення, та враховуючи, що вибіркові оцінки U та V асимптотично співпадають між собою, позначимо

$$v = \frac{1}{n+1} \sum_{t=\tau}^{(n+1)\tau} |X_t - X_{t-\tau}|^s, \quad w = \frac{1}{n} \sum_{t=\tau}^{n\tau} |X_{t+\tau} - X_{t-\tau}|^s. \quad (3.24)$$

Тоді на підставі формул (3.23) та (3.24) отримуємо бажану оцінку показника Херста:

$$\hat{H} = \frac{\log_2(w) - \log_2(v)}{s}. \quad (3.25)$$

Як видно з формули (3.25), метод оцінювання показника Херста, заснований на використанні дробових моментів, є дуже простим у реалізації, що є його безсумнівною перевагою. Проте, важливою передумовою практичного застосування отриманої оцінки є визначення її статистичних властивостей (збіжності, незміщеності, середньоквадратичної помилки оцінювання).

Згідно з формулами (3.20) та (3.22) можна отримати вирази для моментів порядку $2s$ випадкових величин (3.21), та враховуючи, що $\text{var}\{X\} = E\{X^2\} - (E\{X\})^2$, матимемо оцінки дисперсій випадкових величин V, W :

$$\text{var}\{V\} = \tau^{2sH} \cdot \varphi(s, \alpha) = D_1, \quad \text{var}\{W\} = (2\tau)^{2sH} \cdot \varphi(s, \alpha) = D_2, \quad (3.26)$$

де

$$\varphi(s, \alpha) = \frac{\Gamma(1-2s/\alpha)}{\chi(2s)} - \frac{\Gamma^2(1-s/\alpha)}{\chi^2(s)}. \quad (3.27)$$

Дисперсії (3.26) існують лише тоді, коли існують $\varphi(s, \alpha)$ (3.27), тобто коли $s \neq 0$, $-1/2 < s < \alpha/2$, та якщо так, то згідно з узагальненою центральною граничною теоремою [11] однаково розподілені змінні (3.21) знаходяться в зоні притягання закону розподілу Гауса. Це означає, що кумулятивні середні (3.24) таких змінних асимптотично також відповідають гауссовому (нормальному) розподілу з параметрами

$$E\{v\} = \mu_1, \quad E\{w\} = \mu_2, \quad \text{var}\{v\} = \frac{D_1}{n+1}, \quad \text{var}\{w\} = \frac{D_2}{n}. \quad (3.28)$$

Областю визначення функції (3.21) є позитивна напіввісь $[0; \infty]$, тоді як областю визначення закону Гауса є вся реальна вісь. Таким чином,

асимптотичний перехід до закону Гауса призводить до спотворення як області визначення розподілу. Водночас відомо [12], що кожному стійкому закону розподілу відповідає нескінченна кількість нескінченно ділимих законів, які знаходяться в області тяжіння цього стійкого. Ці підпорядковані закони можуть мати різну область визначення, збігаючись із областю визначення батьківського стійкого, чи ні.

Очевидно, що в тих випадках, коли спотворенням області визначення нехтувати не можна, слід шукати асимптотичний закон розподілу суми (або накопичувального середнього) стійких випадкових величин у вигляді деякого нескінченно ділимого закону з напівнескінченною областю визначення. Найбільш придатним в цьому сенсі є гамма-розподіл [13]. Ми можемо розглядати змінні v, w з формули (3.24) як такі, що відповідають гамма-розподілу $Gamma(k, \theta)$ з такими параметрами k, θ за яких математичне сподівання та дисперсія збігаються з формулою (3.28) :

$$k_1 = (n+1) \frac{\mu_1^2}{D_1}, \quad k_2 = n \frac{\mu_2^2}{D_2}, \quad \theta_1 = \frac{D_1}{(n+1)\mu_1}, \quad \theta_2 = \frac{D_2}{n \cdot \mu_2}. \quad (3.29)$$

Варто зазначити, що асимптотично $\lim_{n \rightarrow \infty} k_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} k_2 = k$.

Математичне очікування логарифма гамма-розподіленої змінної має замкнену форму:

$$E\{\ln(v)\} = \psi(k_1) + \ln(\theta_1), \quad E\{\ln(w)\} = \psi(k_2) + \ln(\theta_2) \quad (3.30)$$

де $\psi(x) \approx \ln(x)$ – дігамма-функція.

З формули (3.30) випливає:

$$E\{\hat{H}\} = \frac{\psi(k_2) - \psi(k_1)}{s \cdot \ln(2)} + \frac{1}{s} \log_2 \frac{\theta_2}{\theta_1}. \quad (3.31)$$

Згідно з формулами (3.22) та (3.29), асимптотично, коли $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{\hat{H}\} = \frac{1}{s} \log_2 \frac{(2\tau)^{sH}}{\tau^{sH}} = H. \quad (3.32)$$

Таким чином, оцінка (3.25) є асимптотично незміщеною.

Дисперсії логарифмів випадкових величин v, w , розподілених асимптотично за гамма-законом, дорівнюють

$$\text{var}\{\ln(v)\} = \psi^{(1)}(k_1) \approx \frac{1}{k}, \quad \text{var}\{\ln(w)\} = \psi^{(1)}(k_2) \approx \frac{1}{k}. \quad (3.33)$$

де $\psi^{(1)}(x) \approx 1/x$ при $x \rightarrow \infty$ – тригамма-функція.

Таким чином, асимптотична дисперсія оцінки (3.25) є обмеженою:

$$\text{var}\{\hat{H}\} \leq \frac{\text{var}\{\ln(w)\} + \text{var}\{\ln(v)\}}{(s \cdot \ln 2)^2} = \frac{D_H(s, \alpha)}{n} = O(1/n), \quad (3.34)$$

де згідно з формулами (3.28), (3.29), (3.33),

$$D_H(s, \alpha) = 2\varphi(s, \alpha) \cdot \left(\frac{\chi(s)}{s \cdot \Gamma(1 - s/\alpha) \cdot \ln 2} \right)^2. \quad (3.35)$$

Приклад залежності (3.35) наведено на рисунку 3.6.

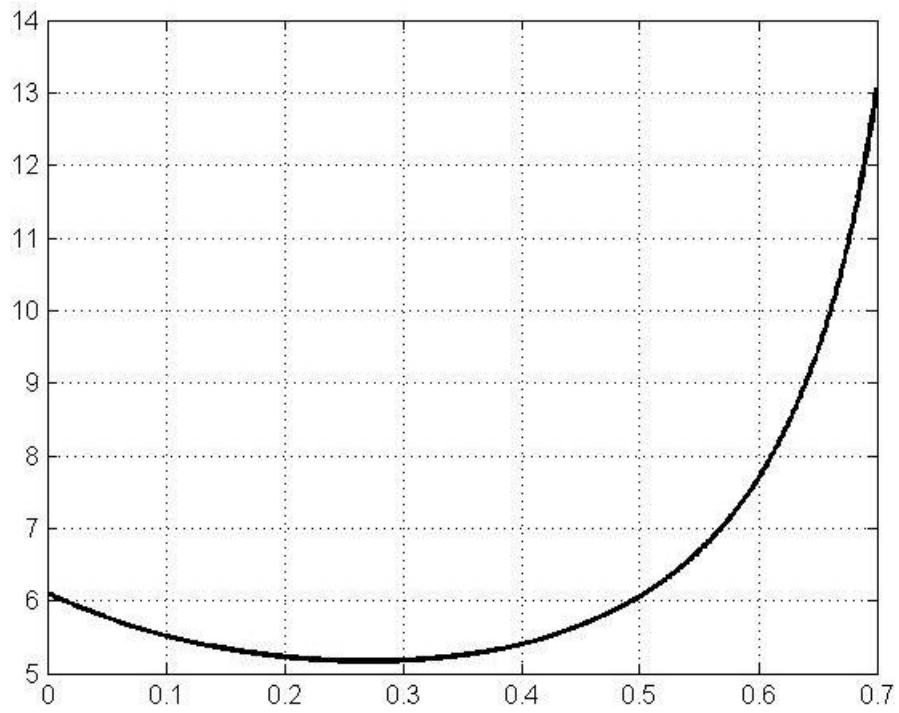


Рисунок 3.6 – Залежність $D_H(s, \alpha)$ (3.35) при $\alpha = 1.6$

Підсумовуючи, можна стверджувати, що отримана оцінка (3.25) показника Херста ФРЛ є асимптотично незміщеною (3.32), а її дисперсія (3.34) прагне до нуля при $n \rightarrow \infty$, отже, ця оцінка є збіжною.

4 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ ЕЛЕМЕНТІВ СИСТЕМИ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ФРАКТАЛЬНОГО РУХУ ЛЕВІ

4.1 Розробка структури системи

Програмна реалізація досліджуваних методів оцінювання параметрів ФРЛ здійснена шляхом надбудови існуючої системи моделювання ФРЛ, розробленої в дипломній роботі бакалавра.

UML-діаграма прецедентів (use-case діаграма, діаграма варіантів використання) оновленої системи представлена на рисунку 4.1. Нові (тобто розроблені в рамках поточних досліджень) варіанти використання системи виділені сірим фоном заливки.

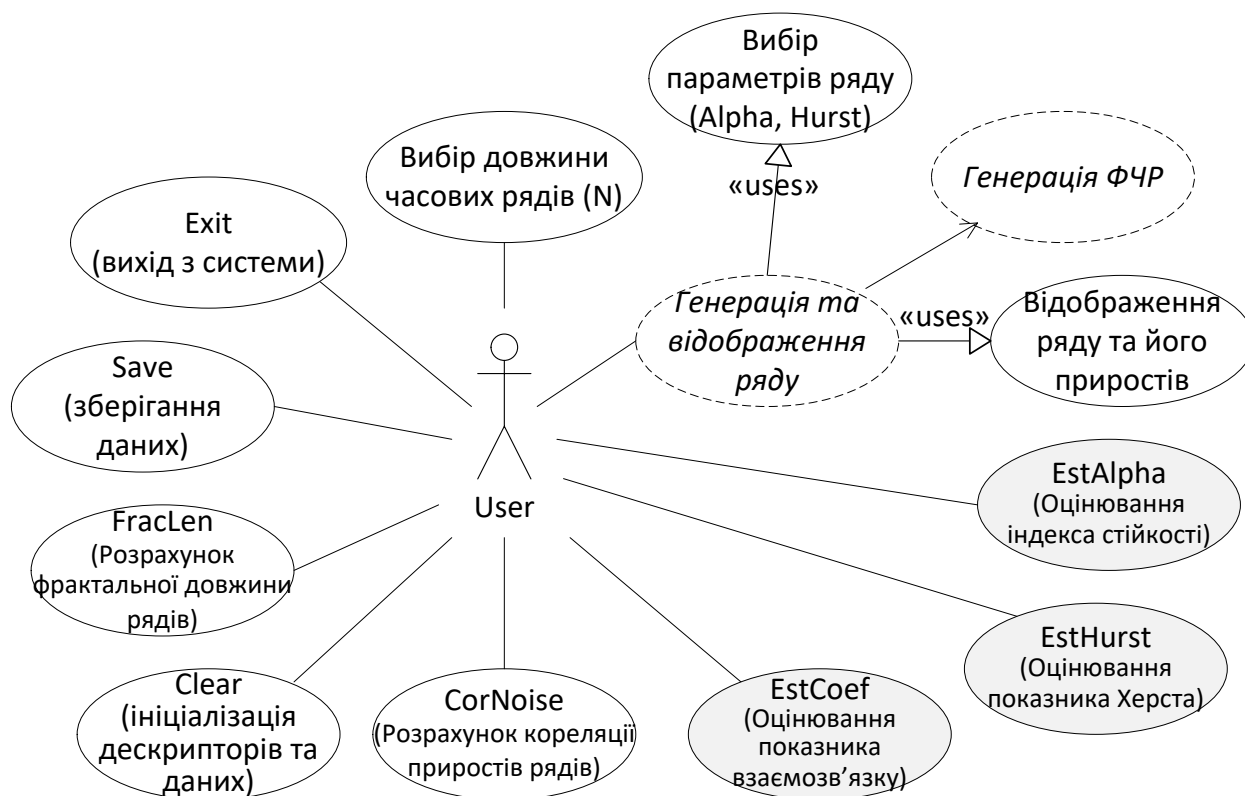


Рисунок 4.1 – Use-case діаграма системи дослідження фрактальних часових рядів

Згідно з діаграмою система надає користувачу (User) десять варіантів використання першого рівня (сценаріїв). Три з них є новими:

- оцінювання індексу стійкості методом дробових моментів (EstAlpha);

- оцінювання показника Херста методом дробових моментів (EstHurst);

- оцінювання узагальненого показника взаємозв'язку приростів досліджуваного ФЧР на основі факторної моделі взаємозв'язку (EstCoef).

Розроблена діаграма (рисунок 4.1) охоплює всі етапи життєвого циклу даних і демонструє всі реалізовані сценарії використання системи, проте послідовність дій користувача та виконання сценаріїв не є довільною та не описується діаграмою прецедентів.

Для представлення послідовності дій користувача (актора) та використання ним запропонованих варіантів використання системи застосовується інша UML-діаграма – діаграма діяльності.

Діаграма діяльності (activity diagram) – це UML-діаграма, на якій показані дії. Під діяльністю (activity) розуміється специфікація поведінки системи у вигляді координованого послідовного і паралельного виконання підлеглих елементів - вкладених видів діяльності і окремих дій (action), з'єднаних між собою потоками виконання, які йдуть від виходів одного вузла до входів іншого.

Діаграми діяльності є аналогом блок-схем. Діаграми діяльності складаються з фігур, з'єднаних стрілками. Стрілки йдуть від початку до кінця процесу і показують потоки управління або потоки об'єктів (даних). Основні фігури:

- прямокутники з великими закругленнями – дії;
- прямокутники з малими закругленнями – стани;
- ромби – рішення;
- широкі смуги – початок (розгалуження) і закінчення (сходження) розгалуження дій;

Згідно з цією діаграмою діяльності система може знаходитись в одному з трьох станів:

- стан 1 – початковий. Доступні варіанти «Вибір довжини рядів», «Генерація та відображення часового ряду», а також «Ініціалізація (Clear)» та «Завершення роботи (Exit)». Інші варіанти недоступні;

- стан 2 – генерація рядів. Виникає після того, як згенеровано хоча б один часовий ряд. У цьому стані варіант «Вибір довжини рядів» заблокований, а всі інші доступні;

- стан 3 – аналіз рядів. Виникає після вибору одного з сценаріїв «Відображення кореляції приростів (CorNoise)», «Відображення фрактальної довжини рядів (FracLen)», «Оцінювання індексу стійкості (EstAlpha)», «Оцінювання показника Херста (EstHurst)», «Оцінювання показника взаємозв'язку приростів (EstCoef)». Варіанти «Вибір довжини рядів», «Генерація та відображення часового ряду» заблоковані (додавання нового ряду стає неможливим).

Варіанти використання «Ініціалізація (Clear)» та «Завершення роботи (Exit)» доступні у будь-якому стані системи. «Clear» переводить систему в початковий стан (очищуючи всі дані та графіки), а «Exit» – завершує роботу системи.

4.2 Моделювання фрактального броунівського руху та руху Леві

Генерація досліджуваних СЧР потребує генерації випадкових величин, розподілених за гаусовими, або альфа-стійким законами. Якщо генерація гаусових величин реалізована у більшості програмних пакетів, середовищ та бібліотек, то генерація альфа-стійких – ні. Проте її нескладно реалізувати. Для цього використовується алгоритм, узагальнюючий перетворення Боксу-Мюллера [9]: якщо $U \rightarrow R(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ и $V \rightarrow R(0;1]$ – незалежні випадкові величини (розподілені рівномірно у зазначених

інтервалах), то $Z \rightarrow g(z; \alpha, 0, 1, 0)$ (та відповідно $Y \rightarrow g(z; \alpha, 0, \gamma, \mu)$):

$$Z = \frac{\sin(\alpha U)}{(\cos U)^{1/\alpha}} \left(\frac{\cos((1-\alpha)U)}{-\ln(V)} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, \quad Y = \gamma Z + \mu. \quad (4.1)$$

Для $S\alpha S$ -законів випадок $\alpha = 1$ (розподіл Коші) є окремим випадком формули (4.1), для якого $Z = \tan(U)$.

Для моделювання ФБР та ФРЛ застосовується метод послідовного випадкового додавання, який запропонував Р. Ф. Фосс [5]. Сутність методу Фосса проілюстровано на рисунку 4.3.

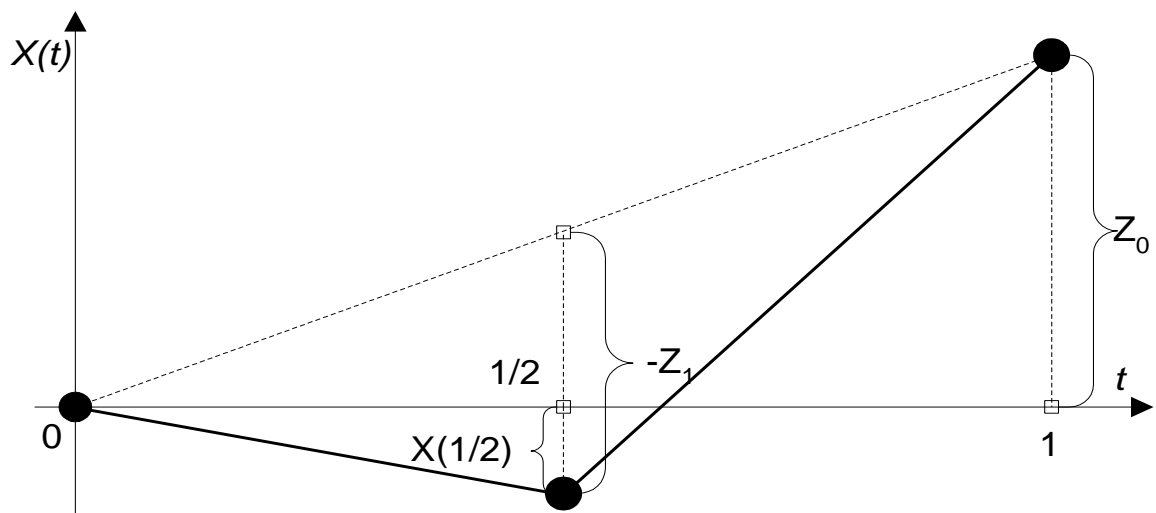


Рисунок 4.3 – Генерація СЧР методом послідовних випадкових додавань

У випадку ФБР встановлюється $X(t_L = 0) = 0$, значення $X(t_R = t_{\max})$, тобто на правому кінці відрізка часу, генерується як випадкова гаусова величина $Z_0 \rightarrow N(0, \sigma)$, а значення ряду посередині відрізка (тобто при $t_M = (t_L + t_R)/2$) розраховується шляхом лінійної інтерполяції з додаванням випадкового значення $Z_1 \rightarrow N(0, \sigma_1)$, де $\sigma_1 = k_1 \sigma$:

$$X(t_R / 2) = \frac{1}{2} X(t_R) + Z_1. \quad (4.2)$$

У подальшому кожен з відрізків часу $[t_L; t_R]$ також розбивається навпіл, а значення у середині знаходиться аналогічно формулі (4.2) з тією відмінністю, що коефіцієнт зменшення масштабу дорівнюватиме k_2 : $Z \rightarrow N(0, k_2 \sigma_{prev})$,

$$X(t_M) = \frac{1}{2} (X(t_L) + X(t_R)) + Z. \quad (4.3)$$

Для того, щоб генерований СЧР $X(t)$ був саме ФБР, необхідно, щоб дисперсія збільшень координати підпорядковувалася співвідношенню (1.9) З цього випливає, що

$$k_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^H - \frac{1}{4}}, \quad k_2 = 2^{-H}. \quad (4.4)$$

Метод Фосса придатен для генерації не тільки ФБР, а й для ФРЛ. Головною відмінністю алгоритма буде те, що закон розподілу випадкових величин, які послідовно додаються, змінюється з гаусівського $N(0, \sigma)$ на альфа-стійкий розподіл $g(\alpha, 0, \gamma, 0)$ (з масштабом γ) згідно з формулою (4.1). Крім того, змінюються формули розрахунку коефіцієнта зменшення масштабу k (4.4):

$$k_1 = \left(2^{-\alpha H} - 2^{-\alpha}\right)^{1/\alpha}, \quad k_2 = 2^{-H}. \quad (4.5)$$

Легко бачити, що формула (4.4) є частковим випадком формули (4.5) у разі $\alpha = 2$.

Алгоритм, що реалізує метод Фосса може бути

нерекурсивним (тобто у формі циклу), або рекурсивним. Зазвичай рекурсія значно уповільнює роботу будь-якого алгоритму та призводить до витрат пам'яті, тому, початкове наближення ряду (до заданої глибини p) слід розраховувати звичайним алгоритмом. Але в багатьох практичних застосуваннях виникає потреба у реалізації зумінга, тобто масштабування виділеної частини (а не всього) ряду. Наприклад у разі, якщо алгоритм застосовується для моделювання профілю горних хребтів у комп'ютерній графіці, користувач застосовує зумінг для наближення (тобто більш детального відображення) потрібної йому частини цього хребту. Для реалізації такого запиту необхідно продовжити розрахунки за цим алгоритмом (тобто збільшити глибину p), але не для всього початкового відрізка осі абсцис, а тільки для виділеної області. За таких умов рекурсивна реалізація алгоритму є доцільною.

Нерекурсивний варіант алгоритму Фосса має наступний вигляд:

Без порушення спільності, вісь часу масштабується так, щоб мінімальний крок уздовж неї дорівнював одиниці.

Крок 1. Задати показник Херста (H), тривалість моделювання $t_{end} = 2^p$, ввести масштаб (γ , у разі ФРЛ), або середньоквадратичне відхилення приростів на всьому інтервалі (σ , у разі ФБР).

Крок 2. Розрахувати коефіцієнти зменшення масштабу (k_1, k_2) згідно з формулами (4.4), або (4.5).

Крок 3. Обнулити масив значень випадкового процесу $X(t)$, $t = 0, 1, \dots, t_{end}$, встановивши таким чином початкові наближення.

Крок 4. Обрахувати значення ряду на правому кінці формули (4.2) як гаусівьку, чи альфа-стійку випадкову величину $X(t_{end}) = Z$.

Крок 5. Зменшити масштаб ($\sigma = k_1\sigma$, чи $\gamma = k_1\gamma$) та обрахувати значення ряду у середині інтервалу (4.2).

Крок 6. Встановити $\tau = t_{end} / 2$.

Крок 7. Зменшити вдвічі значення кроку вздовж вісі часу $\tau = \tau / 2$ та,

відповідно, зменшити альфа-масштаб (γ), чи середньоквадратичне відхилення (σ) з коефіцієнтом k_2 ($\sigma = k_2\sigma$, чи $\gamma = k_2\gamma$).

Крок 8. В циклі по t від τ до t_{end} з кроком 2τ генерувати альфа-стійкі, чи гаусівські випадкові величини Z та уточнювати наближення значень випадкового процесу $X(t)$ згідно з формулою (4.3).

Крок 9. Якщо $\tau > 1$, то повернутися до кроку 7.

Крок 10. Кінець алгоритму.

Застосування описаного алгоритму дозволяє отримувати модель фрактального СЧР з усе більшою роздільною здатністю за часом. Більш того, цей алгоритм, заснований на рекурсивному подрібненні часового інтервалу, наочно демонструє поняття «фрактальності» та «самоафінності».

4.3 Розробка інтерфейсу системи оцінювання параметрів СЧР

Для програмної реалізації системи оцінювання параметрів СЧР було обрано середовище MatLab з графічним інтерфейсом користувача (GUI). Вікно екранної форми у режимі проектування представлено на рисунку 4.4.

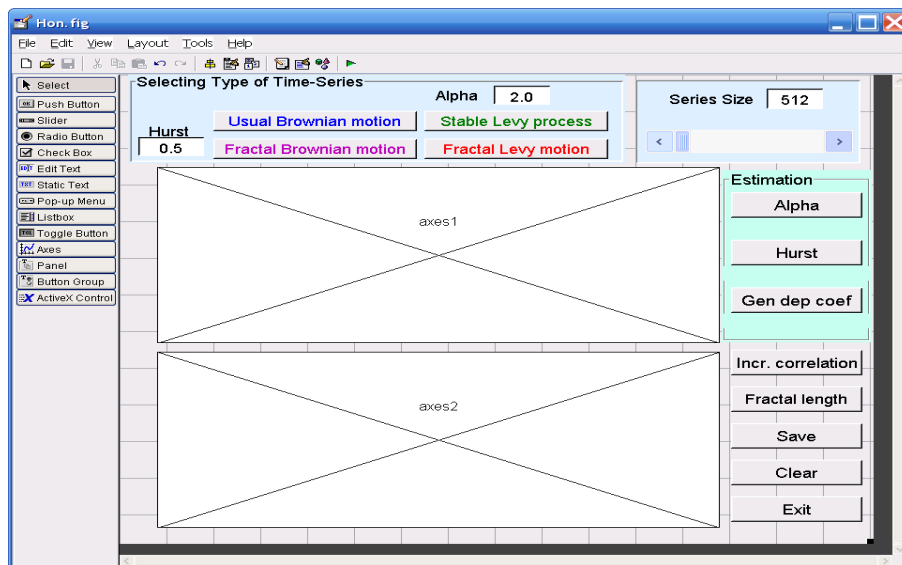


Рисунок 4.4 – Екранна форма у режимі проектування

Програмна реалізація системи оцінювання параметрів СЧР виконана як надбудова до системи моделювання СЧР, розробленої у попередній роботі.

Головне вікно являє собою кнопочну форму з кнопками (PushButton), полями редагування (Edit), лінійкою прокрутки (Slider) та вісями графіків (Axes). Інтерфейс вікна повністю відповідає варіантам використання (сценаріям) системи (рисунок 4.1).

Варіант використання «Вибір довжини рядів (N)» реалізується за допомогою лінійки прокрутки (Slider). Лінійка дозволяє обирати довжину рядів серед послідовних ступеней двійки в діапазоні від $2^6 = 64$ до $2^{16} = 65536$. Значення «за умовчанням» дорівнює $2^9 = 512$.

Сценарій «Вибір параметрів (Alpha та Hurst)» реалізується за допомогою відповідних полів редагування. Значення «за замовчуванням» дорівнюють 2.0 та 0.5 (тобто відповідають звичайному БР). Слід зазначити, що передбачена перевірка на припустимість значень, які вводяться: вони мають бути числовими та знаходитися у діапазонах: $64 \leq N \leq 65536$, $0 < \alpha \leq 2$, $0 < H < 1$. У разі некоректного вводу таке значення не приймається, про що з'являється відповідне повідомлення (рисунок 4.5).

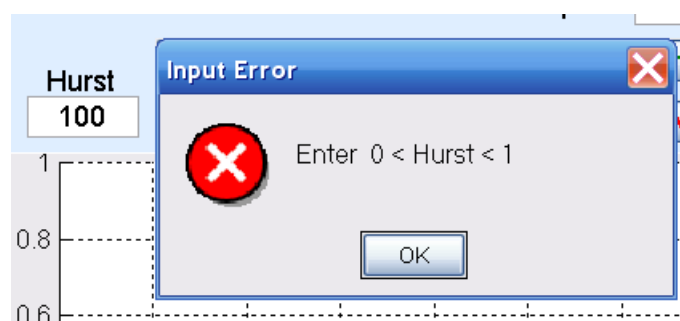


Рисунок 4.5 – Повідомлення у разі некоректного вводу даних

Інші сценарії діаграми (рисунок 4.1) обираються за допомогою відповідних кнопок (PushButton). Нові сценарії (тобто оцінювання

фрактальних параметрів СЧР) згруповані на панелі, виділеної зеленим кольором (рисунок 4.4).

Дії користувача викликають послідовність зміни станів системи у відповідності до її діаграми діяльності (рисунок 4.2). Візуально зміна станів проявляється у блокуванні / розблокуванні кнопок та полів редагування.

Сценарій «Збереження даних (Save)» призводить до виведення діалогового вікна вибору файла Excel (рисунок 4.6). Після здійснення цього вибору згенеровані часові ряди зберігаються на листах Noise та Motion, фрактальні довжини (якщо вони розраховані) – на листі FracLen, кореляції приростів (якщо вони розраховані) – на листі Corr.

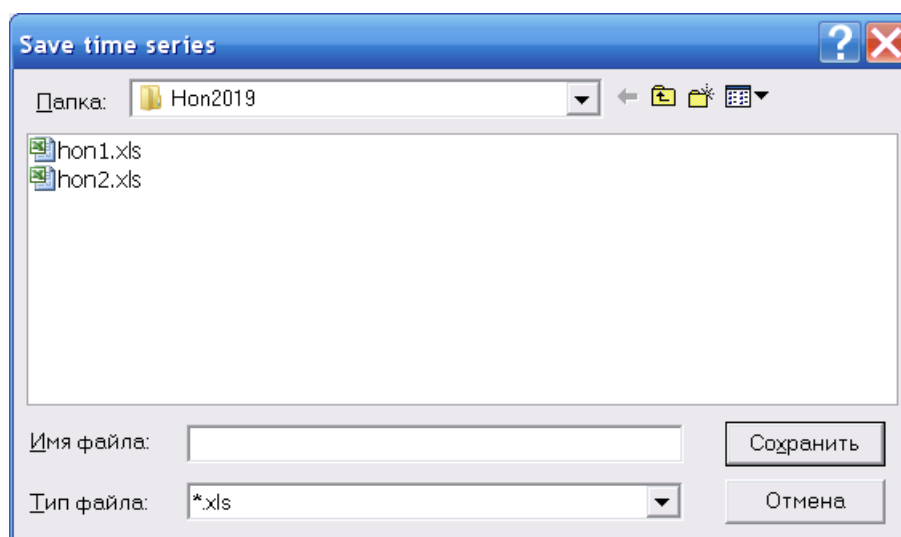


Рисунок 4.6 – Діалогове вікно вибору файла Excel

Згенеровані ряди (Motion) та їхні прирости (Noise) відображаються у відповідних об'єктах класу Axes (вісі), які розташовані безпосередньо на головній формі. Кожному типу ряду відповідає свій колір графіків та тексту кнопки:

- БР – синій;
- ФБР – пурпуровий (magenta);
- СПЛ – темно-зелений;

– ФРЛ – червоний.

У разі, якщо користувач генерує декілька рядів одного типу (декілька реалізацій), то вони розрізняються на графіках видом ліній: сплошна, пунктир, точкова, точково-пунктирна.

При переході до сценаріїв сценарію «Відображення кореляції приростів (CorNoise)», або «Відображення фрактальної довжини рядів (FracLen)» їхні результати відображаються на вісі Axes3, яка виводиться поверх осей Axes1 та Axes2. При цьому кольори та види ліній графіків зберігаються.

Тексти програми наведені у додатку А. Програма складається з основного файлу (hon.m), файлів fBm.m fLm.m, які містять реалізацію однойменних функцій (генерація ФБР та ФРЛ), файлів EstCoef.m, EstHurst.m, EstAlpha.m, які містять функції, що реалізують оцінювання показників ФРЛ методом дробових моментів згідно з формулами розділу 3.

Значення дробового моменту в загальному випадку може бути довільним (від 0 до $\alpha/2$), проте в межах розробленої системи це значення є постійним та дорівнює $s = 0.5$.

4.4 Моделювання фрактальних рядів та оцінювання їх характеристик

Згідно з діаграмою діяльності (рисунок 4.2) першим кроком роботи з програмою є обрання довжини СЧР, які будуть генеруватися. За замовчуванням $N = 512$, але користувач може за допомогою лінійки прокрутки обрати іншу ступінь двох від 64 до 65536.

Після обрання N користувач задає параметри *Alpha* та *Hurst* та натисканням відповідної кнопки запускає генерацію обраного ряду. При цьому «притаманні» для ряду значення параметрів мають пріоритет над введеними, тобто для звичайного БР значення полів *Alpha* та *Hurst* ігноруються; в ці поля записуються відповідно 2.0 та 0.5. Аналогічним чином для ФБР також завжди $\alpha = 2$. Для СПЛ завжди $H = 1/\alpha$ та є

додаткова умова $1 \leq \alpha \leq 2$.

Можна зазначити, що при виборі $Alpha = 2$ та $Hurst = 0.5$ будь-який з алгоритмів буде фактично генерувати звичайний БР, оскільки цей різновид СЧР є частковим випадком всіх інших за наведеними значеннями параметрів. Такий спосіб дозволяє перевірити коректність реалізації алгоритмів. Приклад генерації чотирьох СЧР, які фактично є БР, але генеруються різними алгоритмами, наведений на рисунок 4.7. Той факт, що ці ряди дійсно є реалізаціями звичайного БР, можна перевірити за допомогою графіків фрактальної довжини (рисунок 4.8), які статистично тотожні. На рисунку 4.8 додатково побудовано пряму (чорний пунктир), яка відповідає теоретичній залежності (кутовий коефіцієнт прямої $coef = H - 1 = -1/2$).

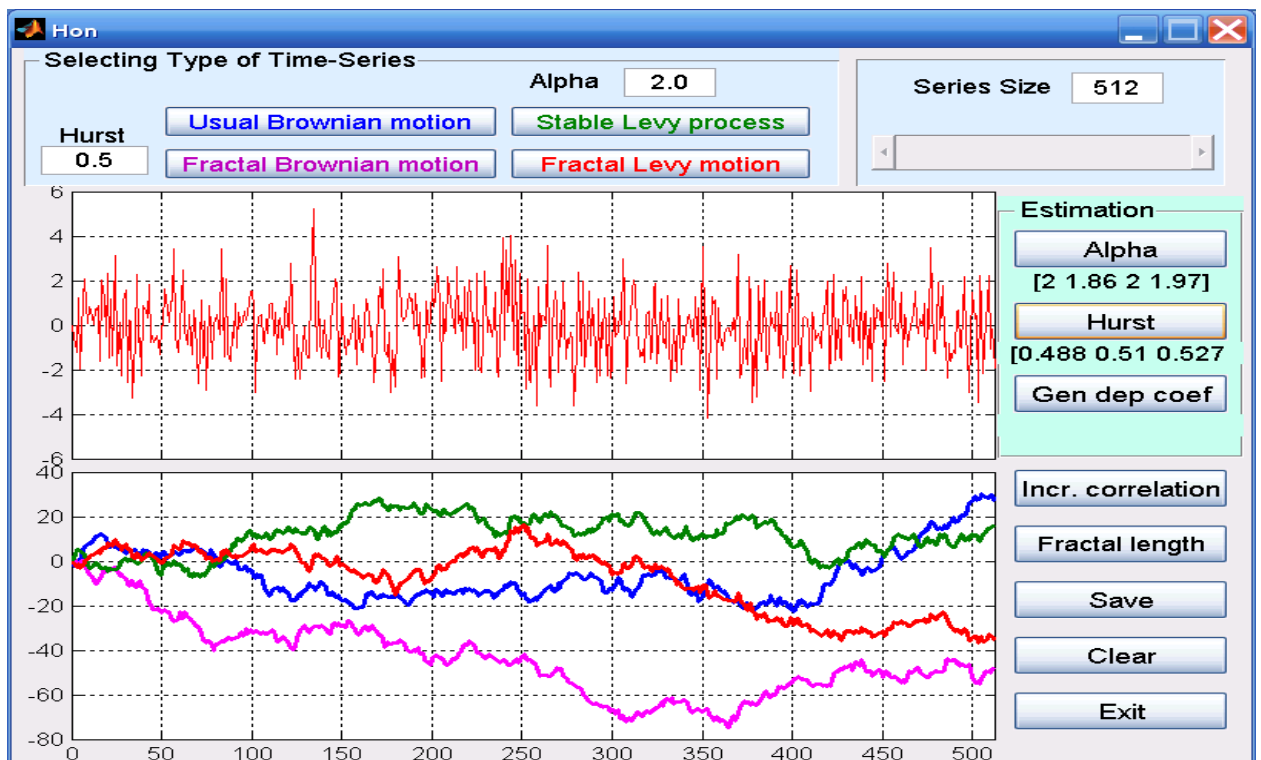


Рисунок 4.7 – Генерація БР чотирма різними алгоритмами

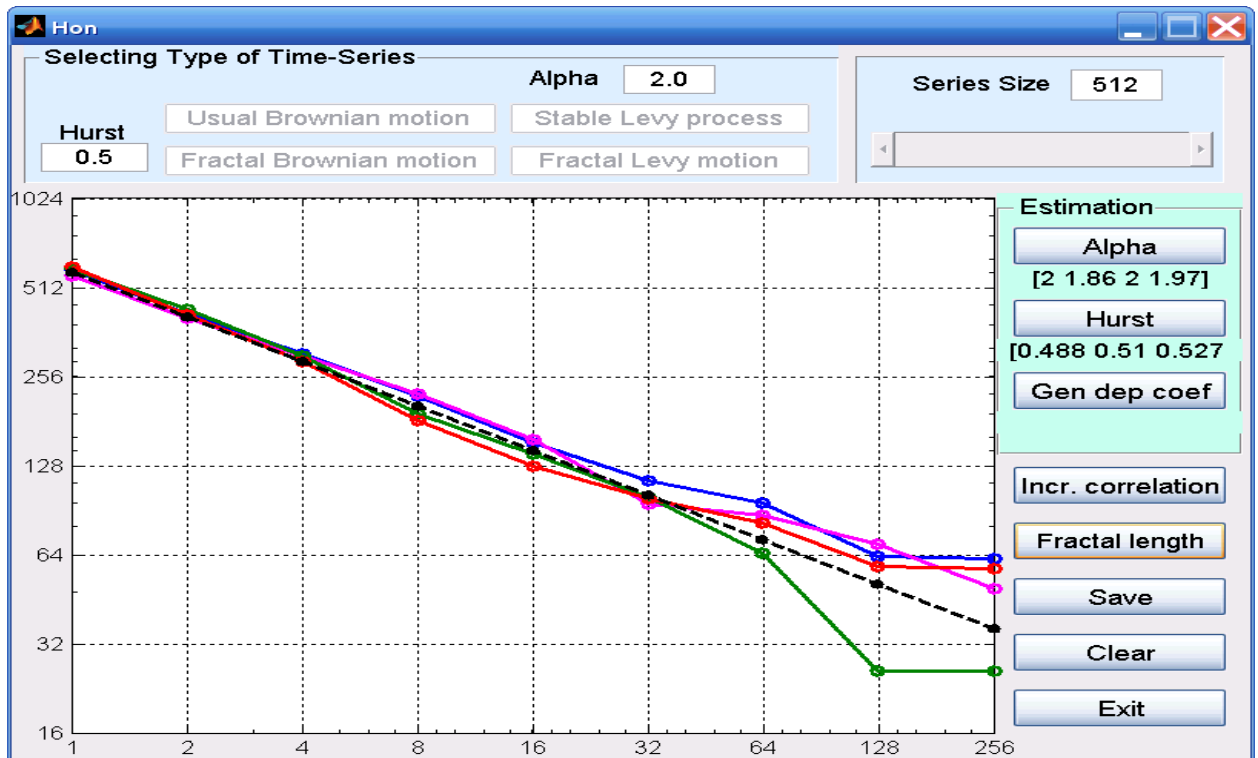


Рисунок 4.8 – Фрактальні довжини чотирьох рядів БР

Після цього згенеровані ряди були збережені у xls-файлі. Зразки листів цього файлу показані на рисунку 4.9.

	A	B	C	D
1	N	512		
2	Method	1	2	3
3	Hurst	0,5	0,5	0,5
4	Alpha	2	2	2
5	0	0	0	0
6	1	0,062695	1,056004	1,274244
7	2	0,620618	2,584825	-1,85674
8	3	3,662174	-1,10821	0,469216
9	4	1,585143	2,33571	-0,06242
10	5	1,101668	0,04097	1,215869
11	6	1,977973	0,233772	1,910544
12	7	2,25285	-1,43001	-0,18326
13	8	0,935634	2,004509	-2,65644
14	9	-1,10766	2,133351	1,330056
15	10	-0,98499	-0,52883	-0,23764

	A	B	C	D
1	N	512		
2	Method	1	2	3
3	Hurst	0,5	0,5	0,5
4	Alpha	2	2	2
5	1	583,5451	583,6753	576,3257
6	2	423,0667	384,5951	415,0984
7	4	303,8804	262,2451	284,3553
8	8	229,0366	181,8942	188,7027
9	16	162,7907	117,2146	140,1304
10	32	120,8178	86,36042	86,85349
11	64	87,03936	79,17944	72,59976
12	128	72,24406	62,52681	72,59976
13	256	31,75188	51,38944	18,24435
14				
15				

Рисунок 4.9 – Збережені значення приростів рядів та їх фрактальної довжини

Вплив фактору «важких хвостів» проілюстровано на рисунку 4.10. Було згенеровано СПЛ з $\alpha = 1.25$ та ФБР ($\alpha = 2$, $H = 0.8$). Легко бачити, що СПЛ дійсно має «важкі хвости», тобто великі за амплітудою викиди. Так, максимальний за абсолютною величиною приріст ФБР був менше п'яти, в той же час, максимальна амплітуда приросту СПЛ (з таким же одиничним масштабом) склала більше 80.

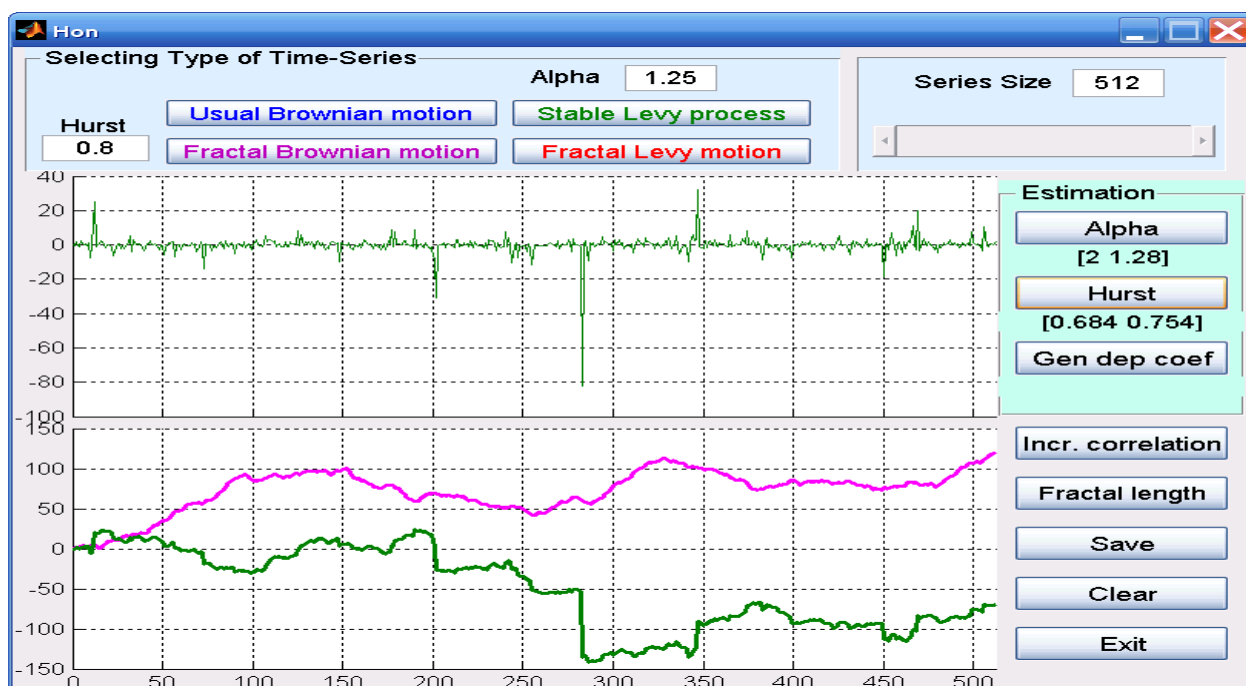


Рисунок 4.10 – Порівняння ФБР та СПЛ за графіками часових рядів

Графік СПЛ та його приросту ілюструє можливу сферу застосування таких моделей: моделювання СЧР з «чорними лебідями».

Графіки фрактальних довжин цих рядів на рисунку 4.11 демонструють, що фрактальна розмірність (наклон графіків) ФБР з $H = 0.8$ та СПЛ з $\alpha = 1.25$ майже співпадають, що підтверджується близькістю оцінок показника Херста (0.684 та 0.754 при «істинному» значенні $H = 0.8$ для обох СЧР), в той час, як самі ряди (рисунок 4.10) корінно відрізняються.

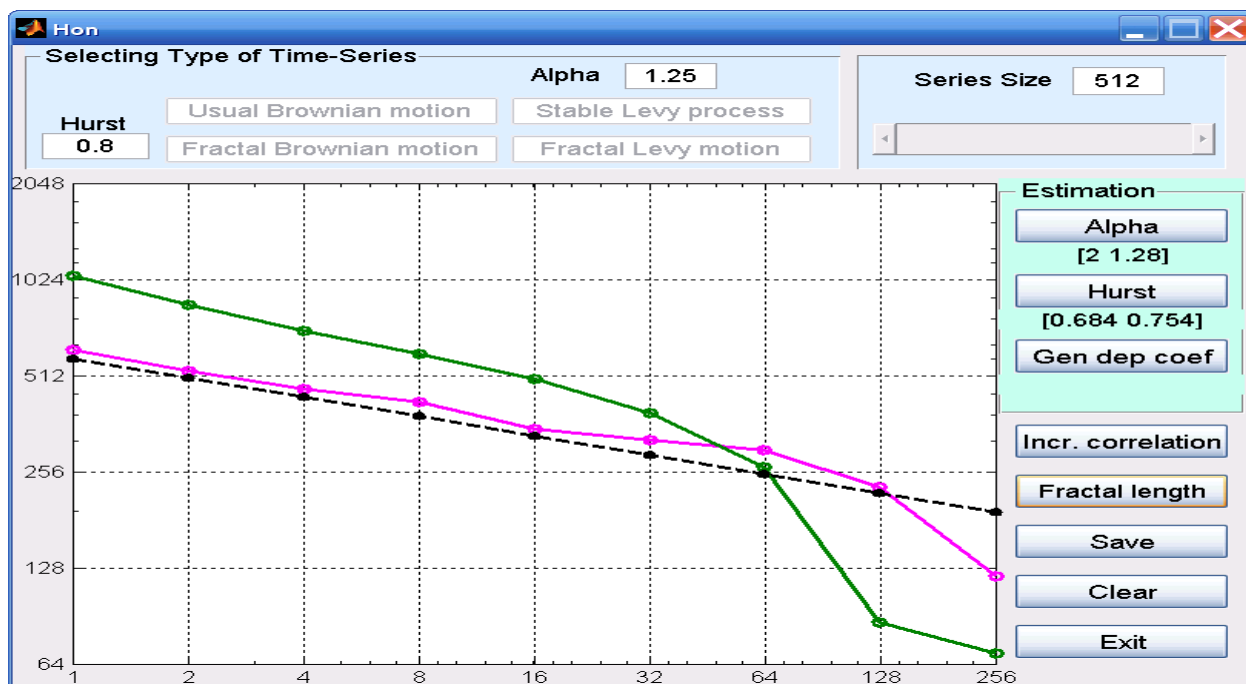


Рисунок 4.11 – Порівняння ФБР та СПЛ за фрактальною довжиною рядів

Згідно з проведеним аналізом предметної області, для БР та СПЛ прирости є некорельованими, а для ФБР та ФРЛ – корельованими (тому такі ряди можуть бути персистентними, чи антиперсистентними). При цьому асимптотично коефіцієнт кореляції між послідовними приростами значень ряду [5] не має залежати від величини кроку Δt за вісью часу.

Результати експериментального дослідження ФБР та СПЛ за кореляцією приростів показані на рисунку 4.12. За допомогою сценарію EstCoef (кнопка Gen_dep_coef) були отримані значення коефіцієнту взаємозв'язку однокрокових приростів (або узагальненого коефіцієнту кореляції між ними), які ґрунтуються на отриманих оцінках показників стійкості та Херста. Оцінки коефіцієнту взаємозв'язку дорівнюють 0.290 та -0.029 (рисунок 4.12).

Estimation	
Alpha	[2 1.28]
Hurst	[0.684 0.754]
Gen dep coef	[0.29;-0.0289]

Рисунок 4.12 – Оцінки коефіцієнту взаємозв'язку ФБР та СПЛ

4.5 Моделювання та оцінювання параметрів фрактального руху Леві

Фрактальні ряди Леві – це такі СЧР, які мають обидві ключові властивості: «важкі хвости» та довготермінову залежність приростів. Характеристики згенерованих програмою рядів ФРЛ наведені на рисунках 4.13–4.15.

На рисунку 4.13 наведено графіки рядів ФРЛ розміром $N = 4096$ точок для $\alpha = 1.5$ та $H = 0.3$ (червона сплюснута лінія), $H = 2/3$ (сплюснута лінія зеленого кольору; таке значення показника Херста для $\alpha = 1.5$ відповідає незалежним приростам, тобто СПЛ) та $H = 0.9$ (червоний пунктир).

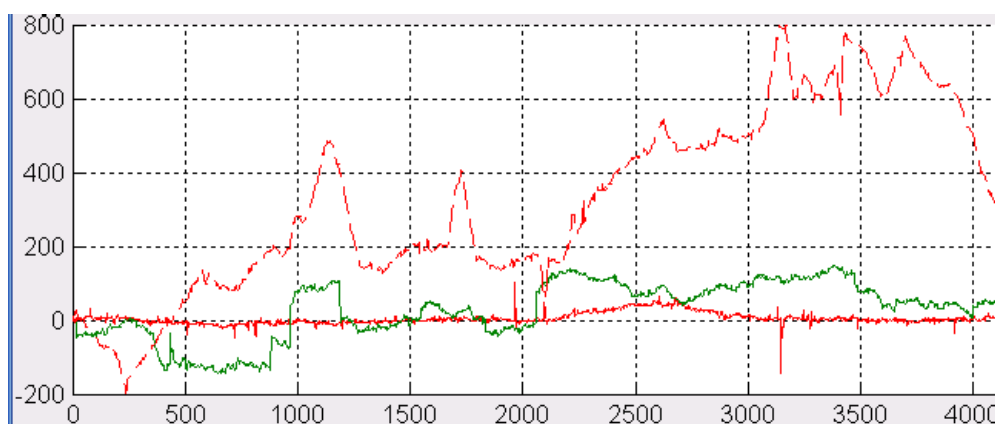


Рисунок 4.13 – Фрактальний рух Леві ($\alpha = 1.5$, $H = 0.3, 2/3, 0.9$)

Згідно з графіками фрактальної довжини ФРЛ (рисунок 4.14) можна зробити висновок, що фрактальна довжина та фрактальна розмірність визначаються величиною показника Херста, як це й впливає з теоретичної формули (2.24).

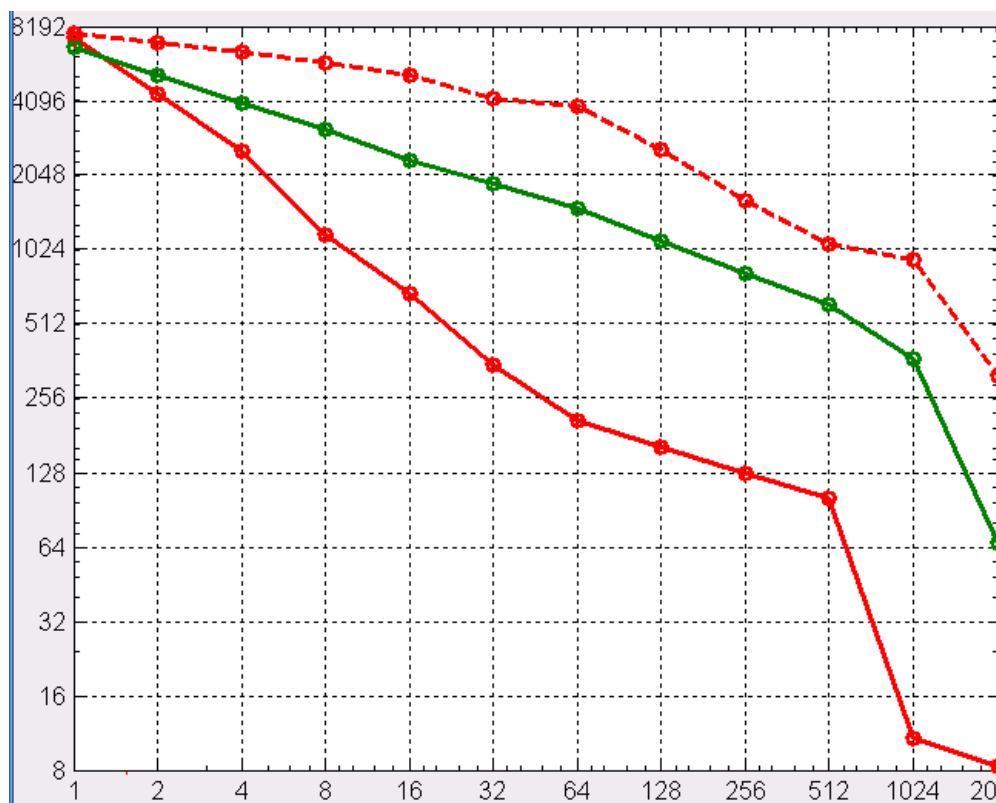


Рисунок 4.14 – Фрактальна довжина ФРЛ ($\alpha = 1.5$, $H = 0.3, 2/3, 0.9$)

Як було зазначено під час теоретичного дослідження, для процесів з альфа-стійкими приростами (тобто СПЛ та ФРЛ) коефіцієнт кореляції та інші статистичні характеристики другого порядку, такі як дисперсія, не визначені. Безумовно, для будь-якої вибірки скінченої довжини ці характеристики завжди можна обрахувати чисельно (рисунок 4.15), але вони не мають математичного очікування, яке б можна було обрахувати теоретично, та з яким можна б було співставити експериментальні дані.

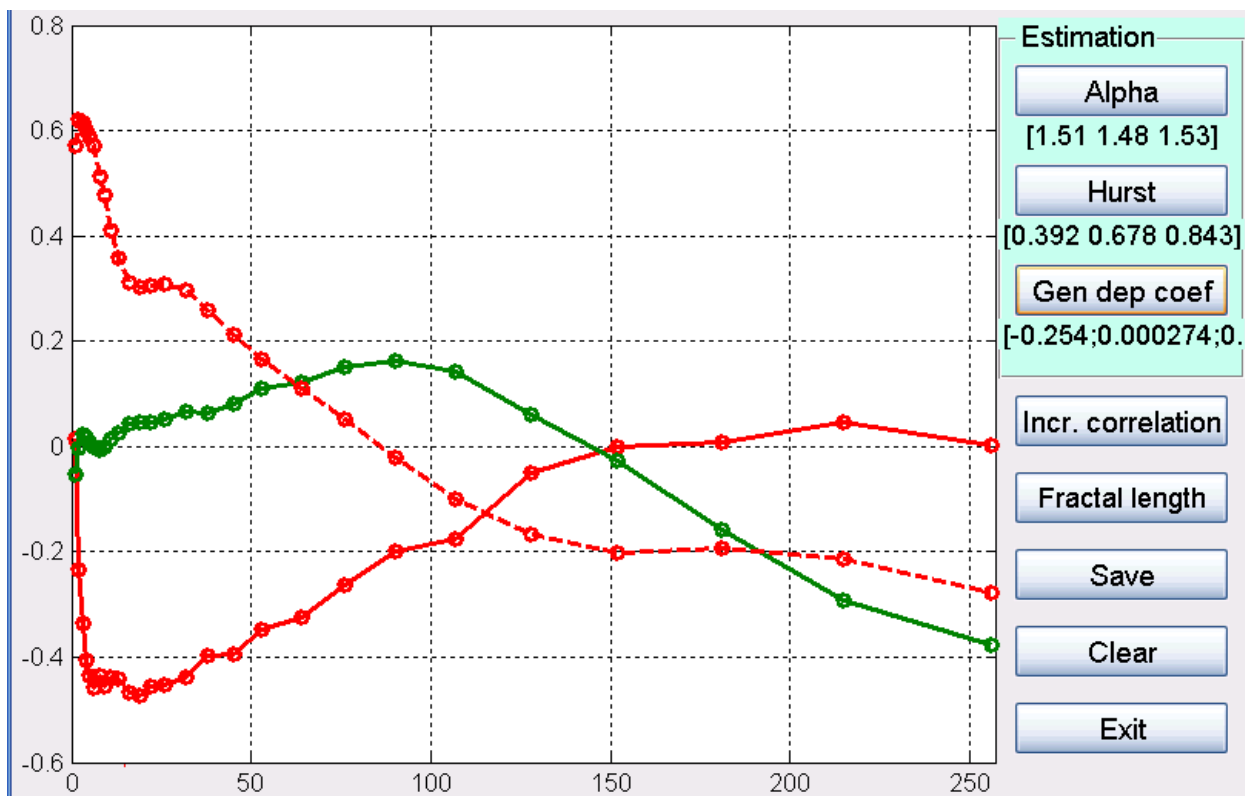


Рисунок 4.15 – Залежність коефіцієнту кореляції послідовних приростів ФРЛ від часового проміжку

Запропонований у роботі коефіцієнт взаємозв'язку однокрокових приростів узагальнює коефіцієнт кореляції саме на випадок процесів з альфа-стійкими приростами. Його значення для процесів, що моделювались (рисунки 4.13–4.15) дорівнюють -0.254 , 0.000274 та 0.100 (для ФРЛ з $\alpha = 1.5$, та $H = 0.3, 2/3, 0.9$ відповідно).

Таким чином, можна зробити висновок, що розроблена система, що моделює СЧР та оцінює їх фрактальні характеристики, є працездатною. Її використання суттєво спрощує дослідження часових рядів з фрактальними властивостями.

ВИСНОВКИ

Атестаційна робота магістра присвячена проблемі оцінювання параметрів часових рядів з фрактальними властивостями, тобто самоподібних часових рядів. При аналізі предметної області були вивчені поняття «фрактал», «фрактальна розмірність», «самоподібність», а також моделі часових рядів.

Однією з таких моделей є броунівський рух. Проведений аналіз показав, що модель класичного броунівського руху не є універсальною, тобто не дозволяє адекватно описати все реально існуючі самоподібні часові ряди. Таким чином, завдання моделювання часових рядів і розпізнавання їх характеристик, є, з одного боку, актуальними і цікавими в теоретичному плані, а з іншого боку – широко зустрічаються в прикладних дослідженнях.

Більш загальними моделями самоподібних рядів є модель фрактального броунівського руху (має «нескінченну пам'ять» приростів) та модель стійких процесів Леві (з «важкими хвостами» розподілів значень ряду). Втім найбільш універсальною моделлю самоподібних рядів є модель фрактального руху Леві. Ця модель поєднує властивості перелічених моделей: «нескінченну пам'ять» приростів та «важкі хвости» розподілів. Вона характеризується двома параметрами: показником стійкості та показником Херста. В свою чергу моделі звичайного та фрактального броунівських рухів та стійкого процесу Леві є по суті частковими випадками фрактального руху Леві при певних значеннях зазначених параметрів.

Було проведено аналіз методів та алгоритмів оцінювання показників стійкості, Херста та взаємозв'язку. Визначено, що методи, засновані на застосуванні дробових моментів, мають певну перевагу за рахунок простоти реалізації.

Проведено проектування системи оцінювання параметрів

самоподібних рядів. Побудована UML-діаграма варіантів використання (сценаріїв), що відображає основні задачі, які вирішуються системою. До них відносяться завдання генерування випадкових величин, генерування та візуалізація часових рядів з фрактальними властивостями, розрахунок та візуалізація фрактальної довжини рядів та автокореляції приростів, оцінювання показника стійкості, показника Херста, показника взаємозв'язку приростів, а також ряд допоміжних задач. Були розроблені діаграми діяльності (activity diagram) виділених варіантів використання системи.

Здійснено обгрунтований вибір програмного забезпечення для реалізації системи. В якості такого обрано середовище MatLab. Розроблена система має зручний графічний інтерфейс користувача (GUI) у вигляді кнопкової форми з полями виведення графіків. Кнопки форми відповідають виділеним варіантам використання системи.

Проведене тестування розробленої системи, в результаті якого було підтверджено «дружність» інтерфейсу, тобто неможливість введення некоректних вхідних даних, чи некоректної послідовності виконання сценаріїв. Було підтверджено коректність реалізації кожного з сценаріїв, тобто відповідність властивостей рядів, що генеруються, з теоретичними значеннями цих властивостей, а також асимптотичне співпадіння оцінок параметрів з дійсними їх значеннями.

Створена система може бути використана як для власне генерації самоподібних часових рядів з метою їхнього подальшого дослідження, так і з навчальними цілями, тобто для наочної демонстрації властивостей розглянутих моделей самоподібних часових рядів.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы видео: пер. с англ. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
2. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая: пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 528 с.
3. Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории: пер. с англ. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.
4. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение: пер. с нем. М.: Мир, 1990. 254 с.
5. Федер Е. Фракталы: пер. с англ. М.: Мир, 1991. 254 с.
6. Золотарёв В.М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983. 304 с.
7. Розанов Ю.А. Лекции по теории вероятностей: учеб. Пособиею М.: Наука, 1986. 120 с.
8. Chambers J. M., Mallows C. L., Stuck B. W. A method for simulating stable random variables. *Journal of the American Statistical Association* 71, 1976. P.340-344.
9. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков: Применение теории хаоса в инвестициях и экономике: пер. с англ. М: Интернет-трейдинг, 2004. 304 с.
10. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т.1: Факты. Модели Москва: ФАЗИС, 1998. 512 с.
11. Шергин В. Л. Оценивание индекса устойчивости альфа устойчивых распределений методом дробных моментов. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*, 2013. №. 6. 4 с.
12. Kirichenko L. Analysis of the properties of ordinary Levy motion based on the estimation of stability index / ed. V. Shergin *International Journal «Information Content and Processing»*, Vol.1., №. 2. 2014. P.170-181.

13. Шергин В. Л. Аппроксимация оценки индекса устойчивости SaS распределений: *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*, 2014. №. 1. С.34-38.

14. Шергин В. Л. Интерпретация показателя взаимосвязи многомерных устойчивых случайных величин с помощью факторной модели. *Восточно-европейский журнал передовых технологий*, 2015. № 5/4 (77). С. 46–49. DOI: 10.15587/1729-4061.2015.50442

15. Шергин В. Л. Связь между параметрами самоподобия, устойчивости и долгосрочной зависимости приращений фрактального движения Леви: *Радіоелектроніка, інформатика, управління*, 2016. №3 (38). С.23-29.

16. Шергин В. Л. Оценивание показателя Херста для процессов Леви / ред. Э. Э. Дереза, В. С. Передерий *Вісник Нац. техн. ун-ту «ХПІ»* : зб. наук. пр. Сер. : Механіко-технологічні системи та комплекси. Харків : НТУ «ХПІ», 2016. № 4 (1176). С. 84-88

17. Шергин В.Л. *Взаимосвязь соседних приращений фрактального движения Леви* / ред. М.М. Погурская: Матеріали 5 Міжнародної науково-практичної конференції «Обчислювальний інтелект». Україна. Ужгород, 2019.

18. Шергин В. *Оценивание показателя Хёрста самоподобных процессов с тяжёлыми хвостами и долгосрочной зависимостью приращений*. Матеріали 8 Міжн. Наук.-техн. конф. «Інформаційні системи і технології» (ІСТ-2019). Коблево, 9-14 вересня 2019

19. Pashko A. O., Synyavska O. O. Baxter estimates of the Hurst parameter of fractional Brownian motion. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка*. Серія: фізико-математичні науки, 2019. № 3. С. 18-23.

20. Shergin V. «Estimating the Hurst Exponent of Fractional Levy Motion by the Fractional Moments Method,» *2019 IEEE International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications, Science and*

Technology (PIC S&T), Kyiv, Ukraine, 2019, P. 719-722, DOI: 10.1109/PICST47496.2019.9061298.

21. Pashko A., Sinyavska O. and Oleshko T., «Simulation of Fractional Brownian Motion and Estimation of Hurst Parameter,» *2020 IEEE 15th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET)*, Lviv-Slavske, Ukraine, 2020, pp. 632-637, doi: 10.1109/TCSET49122.2020.235509.

22. Shergin V., Chala L. and Udovenko S., «Statistical Properties of the Hurst Exponent Estimates for Fractional Levy Motion,» *2020 IEEE 15th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET)*, Lviv-Slavske, Ukraine, 2020, P. 194-197, DOI: 10.1109/TCSET49122.2020.235421.

23. Pashko A., Oleshko T., Syniavska O. (2021) Estimation of Hurst Parameter for Self-similar Traffic. In / eds Z. Hu, S. Petoukhov, I. Dychka, M. He. *Advances in Computer Science for Engineering and Education III. ICCSEEA 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing*, Vol. 1247. Springer, Cham. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-55506-1_16

24. Дьяконов В. Matlab 6.5 SP1/7/7 SP1/7 SP2 + Simulink 5/6. *Инструменты искусственного интеллекта и биоинформатики / ред. В. В. Круглов М.:СОЛОН-ПРЕСС, 2006. 456 с.*

25. Мироновский Л. Введение в MATLAB: Учеб. пособие. / ред. К. Ю. Петрова СПб.: ГУАП, 2006. 164 с.