УДК 519.62

А.Г. Каграманян[1], Г.Г.Четвериков[2], В.В. Шляхов[3],
[1]ХНУ, г. Харьков, Украина
[2,3]ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, chetvergg@gmail.com

МУЛЬТИАЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ НОСИТЕЛЯ. СООБЩЕНИЕ 3

Во многих практических ситуациях ограничение множества входных сигналов в виде положительного конуса пространства <L,R> не всегда корректно. Например, при изучении органа зрения человека ограничиваются не только положительными, но и излучениями с не очень большими энергиями, поскольку чрезмерно интенсивные могут нарушить зрительный орган. В этом случае достаточно приемлемой моделью множества входных сигналов является выпуклое тело линейного пространства. Поэтому в данной статье мы рассмотрим линейные предикаты именно с такой областью определения.

ПРЕДИКАТ, ЛИНЕЙНЫЙ ПРЕДИКАТ, ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО, АЛГЕБРА, АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА, МУЛИТИАЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Введение

Во многих практических ситуациях множество входных сигналов исследуемого объекта представляет собой некоторую алгебраическую структуру. Объясняется это тем, что, как правило, между элементами этого множества существуют определенные связи, которые можно интерпретировать как алгебраические операции. Как уже говорилось выше, правильное распознавание соответствующей структуры во многом определяет адекватность математической модели в целом. В рамках компараторной идентификации это распознавание должно вестись на языке экспериментально проверяемых свойств отношений или предикатов. Не останавливаясь на экспериментальной части, что выходит за рамки данной работы, дадим теоретическое решение данной задачи для такой алгебраической структуры, как линейное пространство над некоторым полем. Подобная структура широко распространена на практике [1]. Областью определения операторов, которые в дальнейшем будут изучаться, в данной работе является линейное пространство [2, 3].

1. Постановка задачи

Во многих практических ситуациях ограничение множества входных сигналов в виде положительного конуса пространства <L,R> не всегда корректно. Например, при изучении органа зрения человека ограничиваются не только положительными, но и излучениями с не очень большими энергиями, поскольку чрезмерно интенсивные могут нарушить зрительный орган. В этом случае достаточно приемлемой моделью множества входных сигналов является выпуклое тело линейного пространства. Поэтому в данной статье рассмотрим линейные предикаты именно с такой областью определения.

2. Сужение данных в виде выпуклого тела линейного пространства

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $0\le\lambda\le 1$, тогда если для любых двух элементов $x,y\in V\subset L$ отрезок $[x,y]=\{z=\lambda x+(1-\lambda)y\}$ также принадлежит V, то будем называть множество V *выпуклым телом* пространства <L,R> при условии: $\mathit{aff}\,V=L$.

Допустим, на $V\times V$ выполняются:

1) рефлексивность;

2) симметричность;

3) транзитивность;

4) выпуклая аддитивность: пусть числа $\alpha,\beta>0$ удовлетворяют условию $\alpha+\beta=1$ и $E(x,y)=E(x',y')=1$, тогда $E(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y')=1$;

5) *n*-мерность: найдется в V система линейно независимых векторов $\{e_1,\ldots,e_{n+1}\}$ такая, что для любого $x\in V$ существует такое множество индексов $I(x)\subset\{1,2,\ldots,n+1$ и единственный набор чисел $\beta_1(x),\ldots,\beta_{n+1}(x)$, для которых выполняются условия

6) $E(\alpha_0(x)x+\sum\limits_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i,\ \sum\limits_{i\notin I(x)}\alpha_i(x)e_i)=1,$

причем $\alpha_0(x)=[\sum\limits_{i\notin I(x)}\beta_i(x)]^{-1}>0$,

$$\alpha_i(x)=\alpha_0(x)\beta_i(x)>0\text{, при } i\in I(x)\text{,}$$

$$\alpha_i(x)=\alpha_0(x)\beta_i(x)\ge 0 \text{ при } i\notin I(x)$$

$$\text{и } \alpha_0(x)+\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)=1,\ \sum_{i\notin I(x)}\alpha_i(x)=1.$$

Обозначим $\sum\limits_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i=x_1$, $\sum\limits_{i\notin I(x)}\alpha_i(x)e_i=x_2$.

Свойство *n*-мерности тогда можно записать $E(\alpha_0(x)x+x_1,x_2=1$;

7) непрерывность: функционалы $\{a_i(x)\}_{i=1}^{n+1}$ непрерывны в метрике L;

8) выпуклая полуаддитивность:
если $0\le\gamma\le 1$ и $E(\gamma(x)+(1-\gamma)t,\gamma y+(1-\gamma)t=1$, то $E(x,y)=1$ для $x,y\in V$;

9) выпуклая однородность:
пусть элементы $x,y,\lambda x+t,\lambda y+t\in V$ и $E(\lambda x+t,\lambda y+t)=1$, тогда $E(x,y)=1$.

Заметим, что если предикат $E(x,y)$ линеен и задан на $V\times V$, то все перечисленные выше свойства кроме *n*-мерности непосредственно вытекают из вида предиката. Свойство n-мерности мы обоснуем ниже.

Докажем два вспомогательных утверждения.

Утверждение 1. Если предикат $E(x,y)$ удовлетворяет свойствам 1)–8), то:

а) для любых пар $\{x_i,y_i\}_{i=1}^r \in V\times V$ и любого набора чисел вида $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^r \geq 0, \sum_{i=1}^r a_i = 1$ из равенств $E(x_i,y_i)=1$, $i=\overline{1,r}$ вытекает $E(\sum_{i=1}^r \alpha_i y_i)=1$;

б) для любых $x,y,z_1,...,z_r \in V$ и любых чисел $\alpha,\gamma_1,...,\lambda_r \geq 0, \alpha,\gamma_1,...,\gamma_r = 1$ из равенства $E(\alpha x+\sum_{i=1}^r \gamma_i z_i,\ \alpha y+\sum_{i=1}^r \gamma_i z_i)=1$ вытекает $E(x,y)=1$.

Доказательство. Первое утверждение докажем индукцией по r. Из свойства выпуклой аддитивности следует его справедливость при $r = 2$, т.е. фиксирована база индукции. Допустим, оно справедливо для r от 2 до k. Докажем его для $r = k+1$. Для этого рассмотрим $\{x_i,y_i\}_{i=1}^{k+1} \in V\times V$, $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^{k+1} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i x_i = 1$ $E(x_i,y_i)=1, i=\overline{1,k+1}$.

Введем набор чисел

$$\gamma_{k+1}=1-\alpha_{k+1},\ \gamma_i=\alpha_i/\gamma_{k+1},\ i=\overline{1,k},$$

без ограничения общности можно считать

$\alpha_{k+1}\neq 1$ т.е. $\gamma_{k+1}\neq 0$ тогда $\gamma_i \geq 0$, $i=\overline{1,k+1}$ и

$$\sum_{i=1}^k \gamma_i = \frac{1}{\gamma_{k+1}}\sum_{i=1}^k \alpha_i = \frac{1}{1-\alpha_{k+1}}\sum_{i=1}^k \alpha_i = \frac{1-\alpha_{k+1}}{1-\alpha_{k+1}} = 0,$$

отсюда по предложению индукции имеем

$$E(\sum_{i=1}^k \gamma_i x_i, \sum_{i=1}^k \gamma_i y_i)=1.$$

Обозначим $z_1=\sum_{i=1}^k \gamma_i x_i, z_2=\sum_{i=1}^k \gamma_i y_i$,

тогда $E(z_1,z_2)=E(x_{k+1},y_{k+1})=1$ и из выпуклой аддитивности можно записать

$$E\left(\gamma_{k+1},z_1+(1-\gamma_{k+1})x_{k+1},\gamma_{k+1}z_2+(1-\gamma_{k+1})y_{k+1}\right)=1,$$

но $\gamma_{k+1}z_1=\gamma_{k+1}\sum_{i=1}^k \gamma_i x_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$.

Аналогично $\gamma_{k+1}z_2=\sum_{i=1}^k \alpha_i y_i$.

Отсюда $E(\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i x_i, \sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i y_i)=1$.

Последнее равенство означает, что первая часть утверждения доказана.

Для доказательства второй части воспользуемся аналогичными индуктивными рассуждениями. При $r = 1$ утверждение (б) совпадает с выпуклой полуаддитивностью. Пусть при $r = m$ утверждение верно, покажем, что оно верно и для $r = m + 1$. Рассмотрим

$$\xi_{m+1}=1-\gamma_{m+1}, \alpha'=\frac{\alpha}{\xi_{m+1}}, \xi_i=\frac{1}{\xi_{m+1}\gamma_i}, i=\overline{1,r},$$

тогда

$$\alpha'+\sum_{i=1}^m \xi_i = 1, \alpha x+\sum_{i=1}^{m+1}\gamma_i z_i =$$

$$=(\alpha' x+\sum_{i=1}^m \xi_i z_i)\xi_{m+1}+(1-\xi_{m+1})z_{m+1}$$

Аналогично

$$\alpha y+\sum_{i=1}^{m+1}\gamma_i z_i = (\alpha' y+\sum_{i=1}^m \xi_i z_i)\xi_{m+1}+(1-\xi_{m+1})z_{m+1}.$$

Поскольку выполняется

$$E(\alpha' x+\sum_{i=1}^{m+1}\gamma_i z_i, \alpha y+\sum_{i=1}^{m+1}\gamma_i z_i)=1,$$

то из предыдущих равенств и выпуклой полуаддитивности получим

$$E(\alpha' x+\sum_{i=1}^m \xi_i z_i, \alpha' y+\sum_{i=1}^m \xi_i z_i)=1.$$

Отсюда по предположению индукции имеем $E(x,y) = 1$. Таким образом, доказательство закончено.

Утверждение 2. Пусть для любого $x\in V$ задан оператор Ax следующим соотношением

$$Ax=\frac{1}{\alpha_0(x)}\left(\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i-\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i\right)=\frac{x_2-x_1}{\alpha_0(x)},$$

где $x_1,x_2,\alpha_0,...,\alpha_{n+1},e_1,...,e_{n+1}$ определены в свойстве n-мерности. Тогда для любых $x,y\in V$ и чисел $\alpha,\beta\geq 0,\alpha+\beta=1$ выполняется $A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay$.

Доказательство. Пусть

$$\alpha,\beta\geq 0,\alpha+\beta=1 \text{ и } x,y\in V.$$

Введем в рассмотрение числа

$$\gamma=\frac{\alpha\alpha_0(y)}{\alpha\alpha_0(y)+\beta\alpha_0(x)}, \gamma'=\frac{\beta\alpha_0(y)}{\alpha_0(y)+\beta\alpha_0(x)}.$$

Ясно, что $\gamma+\gamma'=1$. Для произвольных $x,y\in V$ по свойству n-мерности можно записать

$$E(\alpha_0(x)x+x_1,x_2)=1, E(\alpha_0(y)y+y_1,y_2)=1.$$

Отсюда согласно выпуклой аддитивности

$$E(\gamma[\alpha_0(x)x+x_1]+\gamma'[\alpha_0(y)y+y_1],\gamma x_2+\gamma' y_2)=1 \text{ или}$$

$$E([\gamma\alpha_0(x)x+\gamma'\alpha_0(y)y]+(\gamma x_1+\gamma' y_1),\gamma x_2+\gamma' y_2)=1 \quad (1)$$

Обозначим

$$\gamma x_1+\gamma' y_1=\sum_{i=1}^{n+1}\delta_i e_i$$

(это возможно, так как $x_1,y_1\in \mathrm{J}(e_1,...,e_{n+1})$ — линейная оболочка),

$$\gamma x_2+\gamma' y_2=\sum_{i=1}^{n+1}\delta'_i e_i$$

$$\text{и } \alpha_0(x)\gamma x+\alpha_0(y)\gamma' y=\frac{\alpha_0(x)\alpha_0(y)}{\alpha\alpha_0(y)+\rho\alpha_0(x)}$$

$$[\alpha x+\beta y]=\Theta(\alpha Ax+\beta Ay)$$

Введем теперь множество индексов

$$N = \{i : \delta_i > \delta`_i\}$$

и обозначим $u = \sum\limits_{i \in N} (\delta_i - \delta'_i) e_i, \quad v = \sum\limits_{i \notin N} (\delta'_i - \delta_i) e_i$,

тогда $\gamma x_1 + \gamma' y_1 = \sum\limits_{i \in N} \delta'_i e_i + \sum\limits_{i \notin N} \delta_i e_i + u = z + u$,

$\gamma x_2 + \gamma' y_2 = \sum\limits_{i \in N} \gamma'_i e_i + \sum\limits_{i \notin N} \delta_i e_i + v = z + v$.

Отсюда

$$v - u = \gamma(x_2 - x_1) + \gamma(y_2 - y_1) = \gamma\alpha_0(x)Ax + \gamma'\alpha_0(y)Ay =$$
$$= \Theta[\alpha Ax + \beta Ay] .$$

Значит, $\alpha Ax + \beta Ay = \dfrac{(v-u)}{\Theta}$.

Теперь, используя новые обозначения, преобразуем (1). Оно примет вид

$$E([\gamma\alpha_0(x)x + \gamma'\alpha_0(y)y] + (\gamma x_1 + \gamma' y_1), \gamma x_2 + \gamma' y_2) = 1 .$$

$$E([\gamma\alpha_0(x)x + \gamma'\alpha_0(y)y] + u + z, v + z) = 1 , \qquad (2)$$

$$E(\Theta[\alpha x + \beta y] + u + z, v + z) = 1 .$$

Пусть теперь $\mu = \sum\limits_{i \in N} (\delta_i - \delta'_i), v = \sum\limits_{i \notin N} (\delta'_i - \delta_i)$. Тогда из (2) вытекает

$$E\left(\mu \frac{\Theta[\alpha x + \beta y] + u}{\mu} + z, v\frac{u}{v} + z\right) = 1 . \qquad (3)$$

Заметим, что сумма коэффициентов в равенствах (2) при $x, y, \{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ равна 1, т.е.

$$\gamma\alpha_0(x) + \gamma'\alpha_0(y) + \sum_{i \in I(x)} \gamma\alpha_i(x) + \sum_{i \in I(y)} \gamma'\alpha_i(y) = 1 .$$

С другой стороны,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i = \sum_{i \in I(x)} \gamma\alpha_i(x) + \sum_{i \in I(y)} \gamma'\alpha_i(y) ,$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \delta'_i = \sum_{i \in I(x)} \gamma\alpha_i(x) + \sum_{i \in I(y)} \gamma'\alpha_i(y) = 1 .$$

Из последних трех равенств получим

$$\gamma\alpha_0(x) + \gamma'\alpha_0(y) + \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i = \sum_{i=1}^{n+1} \delta'_i = 1 ,$$

$$\Theta + \sum_{i \in N} \delta_i + \sum_{i \notin N} \delta'_i = \sum_{i \in N} \delta'_i + \sum_{i \notin N} \delta'_i = 1 ,$$

$$\Theta + \sum_{i \in N} (\delta_i - \delta'_i) = \sum_{i \notin N} (\delta'_i - \delta_i), \Theta + \mu = v ,$$

$$\frac{\Theta[\alpha x + \beta y]}{\gamma} + \frac{u}{v} = \frac{(v-\mu)(\alpha x + \beta y)}{v} + \frac{\mu}{v}\frac{u}{\mu} .$$

Заметим, что $\alpha x + \beta y \in V, \dfrac{u}{v} \in V$. Поскольку $\dfrac{(v-\mu)}{v} + \dfrac{\mu}{v} = 1$, то $\dfrac{\Theta}{v}(\alpha x + \beta y) + \dfrac{\mu}{v}\dfrac{u}{\mu} \in V$, тогда из (3) имеем

$$E\left(\mu \frac{\Theta[\alpha x + \beta y] + u}{\mu} + z,\ \gamma\frac{v}{\gamma} + z\right) = 1 ,$$

$$E\left(v\left[\frac{\Theta}{v}(\alpha x + \beta y) + \frac{\mu}{v}\frac{u}{\mu}\right] + z, \gamma\frac{u}{\gamma} + z\right) = 1 .$$

Используя выпуклую однородность, получим

$$E\left(\frac{\Theta[\alpha x + \beta y] + u}{v}, \frac{u}{v}\right) = 1 , \qquad (4)$$

но так как $u, v \in \mathrm{J}(e_1, \ldots, e_{n+1})$, то равенство (4) — это единственное разложение в свойстве *n*-мерности для элемента $\alpha x + \alpha y$. Поэтому с учетом определения оператора *A* получим

$$A(\alpha x + \beta y) = \frac{\frac{v}{\upsilon} - \frac{u}{\upsilon}}{\frac{\Theta}{\upsilon}} = \frac{v - u}{\Theta} .$$

Сравним последнее равенство с ранее полученным: $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$. Утверждение доказано.

Теперь можно перейти к доказательству основного факта.

Т е о р е м а 1. Для того, чтобы предикат *E(x,y)*, заданный на $V \times V \subset <L, R> \times <L, R>$, был линейным, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условиям 1)–8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Из замечаний, сделанных выше, следует, что для обоснования необходимости надо доказать выполнение свойства *n*-мерности для линейного предиката.

Поскольку *dim L > n* и *aff V = L,* то можно зафиксировать линейно независимую систему векторов $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\} \in V$ и не принадлежащую *ker F* (ядру оператора *F*). Зафиксируем таковую и рассмотрим систему линейных уравнений для произвольного $x \in V$ относительно неизвестных чисел $\beta_1(x), \ldots, \beta_{n+1}(x)$ вида

$$\begin{cases} f_j(x) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \beta_i(x) f_j(e_i), j = \overline{1,n} , \\ \sum\limits_{i=1}^{n+1} \beta_i(x) = 1. \end{cases} \qquad (5)$$

Матрица системы *A* имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots\ 1 \\ f_1(e_1) & f_1(e_2) & \ldots f_1(e_{n+1}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ f_n(e_1) & f_n(e_2) & f_n(e_{n+1}) \end{bmatrix}$$

Если показать, что определитель матрицы *A* не равен 0, то система (5) разрешима единственным образом и числа $\beta_1(x), \ldots, \beta_{n+1}(x)$ непрерывно зависят от *x*. Эквивалентными преобразованиями *det A* можно привести

$$\det A = \begin{vmatrix} f_1(e_2 - e_1) \ldots f_1(e_{n+1} - e_1) \\ f_n(e_2 - e_1) \ldots f_n(e_{n+1} - e_1) \end{vmatrix} . \qquad (6)$$

Докажем теперь, что система векторов $\{e_i - e_1\}_{i=2}^{n+1}$ линейно независима. Действительно, если она линейно зависима, то $\sum\limits_{i+2}^{n+1} \lambda_i (e_i - e_1) = 0$, при $\sum\limits_{i+2}^{n+1} \lambda_i^2 \neq 0$.

Но тогда $\sum\limits_{i=2}^{n+1} \lambda_i e_i + (-\sum\limits_{i+1}^{n+1} \lambda_i) e_i = 0$, что означает линейную зависимость первоначальной системы $e_1,...,e_{n+1}$. Противоречие. Следовательно, система $\{e_i - e_1\}_{i=2}^{n+1}$ линейно независима и не принадлежит $Ker\ F$. Значит, определитель Грамма, стоящий в правой части равенства (6), не равен 0, что означает $\det A \neq 0$.

Теперь положим $I(x)=\{i:\beta_i(x)\le 0\}$. Заметим, что множество $I(x)$ может оказаться пустым. Затем положим

$$\alpha_0(x)=\left[\sum_{i\notin I(x)}\beta_i(x)\right]^{-1}, \alpha_i(x)=\alpha_0(x)\beta_i(x)>0$$

при $i\notin I(x)$ и $\alpha_i(x)=-\alpha_0(x)\beta_i(x)\ge 0$ при $i\in I(x)$.

Рассмотрим элементы

$$\alpha_0(x)+\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i \text{ и } \sum_{i\notin I(x)}\alpha_i(x)e_i .$$

Коэффициенты $\alpha_0(x)\alpha_1(x),...,\alpha_{n+1}(x)$ положительны, найдем их сумму у каждого из элементов с учетом (4).

$$\alpha_0(x)+\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)=\alpha_0(x)\left(1-\sum_{i\in I(x)}\beta_i(x)\right)=$$

$$=\alpha_0(x)\sum_{i\notin I(x)}\beta_i(x)=1,$$

$$\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)=\alpha_0(x)\sum_{i\in I(x)}\beta_i(x)=1.$$

Следовательно, элементы

$$\alpha_0(x)x+\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i, \sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i\in V .$$

Теперь несколько преобразуем систему (4). Рассмотрим

$$f_j(x)=\sum_{i\in 1}^{n+1}\beta_i(x)f_j(e_i)=$$

$$=\sum_{i\in I(x)}\beta_i(x)f_j(e_i)+\sum_{i\notin I(x)}\beta_i(x)f_j(e_i)=$$

$$=-\frac{1}{\alpha_0(x)}\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)f_j(e_i)+\frac{1}{\alpha_0(x)}\sum_{i\notin I(x)}\alpha_i(x)f_j(e_i),$$

$$j=\overline{1,n} \tag{7}$$

С учетом линейности можно записать

$$f_j\left(\alpha_0(x)x+\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i\right)=f_j\left(\sum_{i\notin I(x)}\alpha_i(x)e_i\right),$$

$$j=\overline{1,n} .$$

Следовательно, система равенств (4) эквивалентна набору равенств (7). Поскольку

$$\alpha_0(x)x+\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i, \sum_{i\notin I(x)}\alpha_i(x)e_i\in V ,$$

то (6) для линейного предиката означает

$$E\left(\alpha_0(x)x+\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i, \sum_{i\notin I(x)}\alpha_i(x)e_i)\right)=1 .$$

Тем самым доказано свойство n-мерности и необходимость условий 1)–8)

Достаточность. Пусть предикат $E(x, y)$ удовлетворяет свойствам (1–8). Сначала покажем, что $E(x,y)=1$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha_i(x)=\alpha_i(y), i=\overline{0,n+1} \text{ и } I(x)=I(y).$$

Согласно условию рефлексивности

$$E(e_i,e_i)=1, i=\overline{1,n+1},$$

тогда из утверждения (1) вытекает

$$E\left(\alpha_0(x)x+\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i, \alpha_0(x)y+\sum_{i\notin I(x)}\alpha_i(x)e_i\right)=1.$$

С другой стороны, n-мерность означает

$$E\left(\alpha_0(x)x+\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i, \sum_{i\notin I(x)}\alpha_i(x)e_i\right)=1,$$

и из симметричности и транзитивности следует

$$E\left(\alpha_0(x)y+\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i, \sum_{i\notin I(x)}\alpha_i(x)e_i\right)=1.$$

В силу однозначности $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^{n+1}$ и $I(x)$ можно утверждать, что $\alpha_i(x)=\alpha_i(y), i=\overline{0,n+1}$ и $I(x)=I(y)$.

Эти рассуждения могут быть приведены и в обратном порядке, причем на последнем шаге следует воспользоваться второй частью утверждения (1).

Поскольку $\{\alpha_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$ однозначно связаны при помощи множества $I(x)$ с $\{\beta_i(x)\}_{i=1}^{n+1}$, то $E(x,y)=1$ тогда и только тогда, когда $\beta_i(x)=\beta_i(y), i=\overline{1,n+1}$.

Покажем теперь, что для любых $\alpha,\beta\ge 0, \alpha+\beta=1$ и $x,y\in V$ имеет место равенство

$$\beta_i(\alpha x+\beta y)=\alpha\beta_i(x)+\beta\beta_i(y), i=1,..,.n+1. \tag{8}$$

Действительно, так как $Ax=\sum_{i=1}^{n+1}\beta_i(x)e_i$ (это вытекает из соотношений между $\alpha_i(x)$ и $\beta_i(x)$), то из утверждения 2 имеем

$$A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay=\sum_{i=1}^{n+1}[\alpha\beta_i(x)+\beta\beta_i(y)]e_i .$$

С другой стороны, $A(\alpha x+\beta y)=\sum_{i=1}^{n+1}\beta_i(\alpha x+\beta y)e_i$.

В силу единственности разложения по линейно независимой системе $e_1,...,e_{n+1}$ вектора $A(\alpha x+\beta y)$ получим (8).

Теперь рассмотрим функционалы

$$g_i(x)=\beta_i(x)-\beta_i(0), k=\overline{1,n+1}.$$

Заметим, что так как от $\beta_i(x)$ они отличаются только сдвигом, то $E(x, y)=1$ тогда и только тогда, когда

$$g_i(x)=g_i(y), i=\overline{1,n+1}.$$

Докажем их линейность. Действительно,

$$g_i(\lambda x)=\beta_i(\lambda x)-\beta_i(0)=\beta_i(\lambda x+(1-\lambda)0)-\beta_i(0)=\lambda\beta_i(x)+$$
$$+(1-\lambda)\beta_i(0)-\beta_i(0)=\lambda(\beta_i(x)-\beta_i(0))=\lambda g_i(x),$$

$$g_i(x+y)=g_i(x)\left[\frac{2(x+y)}{2}\right]=2g_i\left[\frac{(x+y)}{2}\right]=$$
$$=2\left[\beta_i\left[\frac{(x+y)}{2}\right]-\beta_i(0)\right]=2\left[\frac{(\beta_i(x)+\beta_i(y))}{2}-\beta_i(0)\right]=$$

$$=[\beta_i(x)-\beta_i(0)]+[\beta_i(y)=\beta_i(0)]=$$
$$=g_i(x)+g_i(y), i=\overline{1,n+1}.$$

Заметим, что все это выполняется в рамках выпуклого тела *V*. Однако, поскольку $\beta_i(x)$ непрерывны, то $g_i(x)$ непрерывны. Таким образом, с учетом однородности и аддитивности $g_i(x)$ линейны на выпуклом теле *V,* для которого *aff V* = *L*. Поэтому по теореме о продолжении [1] они могут линейным образом быть продолжены на все пространство <L,R>.

Нам осталось показать, что число функционалов можно сократить до *n*. Поскольку

$$\sum_{i=1}^{n+1}\beta_i(x)=1 \text{ , то } \beta_{n+1}(x)=1-\sum_{i=1}^{n+1}\beta_i(x) .$$

Таким образом, можно обойтись первыми *n*-функционалами $\beta_i(x)$, а следовательно и $g_i(x)$.

Теперь зададимся вопросом: можно ли еще уменьшить это число?

Допустим, $\beta_1(x)$ – «лишний». Тогда из рефлексивности и *n*-мерности для вектора e_1 будем иметь:

$$E(e_1,e_1)=1 \text{ , т.е.}$$

$$\alpha_0(e_1)=1, I(e_1)=0, \alpha_1(e_1)=1, \alpha_2(e_1)=...=\alpha_{n+1}(e_1)=0 .$$

Это означает, что $\beta_1(e_1)=1, \beta_i(e_1)=0, i=\overline{2,n+1}$. Значит, $\beta_1(x)$ не является линейной комбинацией остальных. Аналогичное утверждение справедливо для $\beta_i(x), i=2,n$. Тем самым теорема полностью доказана.

Выводы

Рассмотрены ограничения, при которых ищутся условия существования линейных предикатов в гильбертовом пространстве. Показано, что последние могут носить различный характер. Всё зависит от конкретной реальной ситуации и той степени адекватности математической модели, которая нас устраивает. При этом положительный конус – это один из видов ограничений так как часто интенсивность входных сигналов реально ограничена сверху (например, яркость излучения). Естественно, этот случай требует другой модели входных сигналов. В работе эта модель выбрана в виде выпуклого тела гильбертового пространства. Найдены условия существования линейных предикатов, удовлетворяющие данному ограничению. Доказано, что они являются необходимыми и достаточными.

Список литературы:

1. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы - М.: Наука, 1970. – 392 с. **2.** *Каграманян А.Г.,* Четвериков Г.Г., Шляхов В.В. Мультиалгебраические дискретные системы при наличии алгебраической структуры носителя. Сообщение 1, 2 // Бионика интеллекта – 2016. – №2(87). – С. 48-58. **3.** *Grygoryy Chetverikov,* Oleksey Puzik, Iryna Vechirska. Multily-valued structures of intellectual systems // Computer Science and Information Technologies (CSIT"2016), Lviv, 2016, ss. 204–207.

Поступила в редколлегию 15.02.2017