

УДК 517.9:533.9

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ МЕТОДОМ R-ФУНКЦІЙ ДВОВИМІРНИХ ЗАДАЧ ПЛАЗМОСТАТИКИ З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ГЕОМЕТРІЄЮ ТА ГВИНТОВИМ МАГНІТНИМ ПОЛЕМ

Шерстнюк Д.В.

Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ
м. Харків, Україна

тел. +38(063) 714-19-22, email: dmytro.sherstniuk@nure.ua

The paper considers the two-dimensional problem of plasma statics with a cylindrical geometry and a helical magnetic field. Problems of this class arise when calculating the characteristics of plasma configurations in magnetic traps. The mathematical model of the plasma statics problem under consideration is a nonlinear boundary value problem for the Grad-Shafranov equation. For the numerical study of the problem, it is proposed to use the R-function's method.

Основною рушійною силою інтенсивного розвитку фізики плазми стали перспективи оволодіння в мирних цілях енергією термоядерного синтезу, яка (як вважається) є необмеженою за своїми запасами і з цієї причини дешевою. У зв'язку з проблемою керованого термоядерного синтезу, а також і незалежно від неї, виконані великі науково-технічні розробки, створено ряд плазмових установок, ведуться численні дослідження плазмових процесів [1]. Отже, актуальною є задача розширення спектру засобів математичного моделювання зазначених процесів і систем.

Задачі плазмостатики історично виникли як складова частина програми керованого термоядерного синтезу. У центрі уваги плазмостатики знаходиться розрахунок рівноважних конфігурацій плазми і магнітного поля, що її утримує. Технічні конструкції, які реалізують рівноважні конфігурації, називаються магнітними пастками.

У двовимірних задачах плазмостатики з циліндричною геометрією та гвинтовим магнітним полем рівняння магнітної гідродинаміки зводяться до одного диференціального рівняння типа Грета-Шафранова [1]:

$$\Delta^{**}\psi = -j_z^{ex} - p'(\psi) + \frac{2\alpha}{v^2}I - \frac{I}{v}I'(\psi), \quad (1)$$

де α – крок гвинта,

$$\Delta^{**}\psi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \equiv \nabla \left(\frac{\nabla \psi}{\eta} \right), \quad \eta \equiv 1 + \alpha^2 r^2.$$

Тут I і ψ – компоненти магнітного поля \mathbf{H} та його векторного потенціалу Ψ у напрямку гвинтових ліній $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$.

Струм заданих провідників j_z^{ex} у правій частині рівняння (1) представлено осьовою компонентою, яка пов'язана з гвинтовою співвідношенням $j_l^{ex} = j_z^{ex}$.

Задачі з нелінійним еліптичним рівнянням (1) мають визначати функ-

цію магнітного потоку ψ , якщо припустити, що відомими є залежності $p(\psi)$ і $I(\psi)$. У розглядуваній задачі їх обирають так:

$$I(\psi) \equiv \frac{\alpha}{2\pi}, \quad p(\psi) = p_0 e^{-\frac{\psi^2}{q^2}}. \quad (2)$$

Крайова задача для рівняння (1) розглядається в області Ω (часто це круг $\Omega = \{r < R\}$) з крайовою умовою:

$$\psi|_{\partial\Omega} = C = \text{const}, \quad (3)$$

яке означає, що межа циліндра є магнітною поверхнею.

Стала C є невідомою її потрібно визначати з деякого додаткового співвідношення. Наприклад, сталу C рекомендують вибрати так, щоб $\psi|_{\rho=0} = 0$. Така умова забезпечить максимум тиску $p(\psi)$ на осі циліндра.

Основними чисельними методами, які на сьогодні застосовуються при розв'язанні задач плазмостатики, є метод скінченних різниць та метод скінченних елементів. Незважаючи на їх поширеність, вони мають певні недоліки, пов'язані перш за все з тим, що не завжди можуть аналітично врахувати у своїх алгоритмах геометричну інформацію, яка міститься у постановці задачі. Точне урахування усіх видів інформації (як аналітичного, так і геометричного характерів) можливо за допомогою структурного методу (методу R-функцій), запропонованого академіком НАН України В.Л. Рвачовим [2]. Суть цього методу полягає у побудові жмутків функцій (структур розв'язку), які залежать від невизначених компонент і незалежно від їх вибору точно задовольняють всім крайовим умовам задачі. Для нашої задачі структура розв'язку може бути обраною у вигляді $\psi = C + \omega\Phi$, де $\omega = 0$ – рівняння межі $\partial\Omega$, Φ – невизначена компонента.

Для апроксимації невизначеної компоненти Φ можна скористатися, наприклад, варіаційними методами [3].

Обчислювальний експеримент було проведено для випадку кругової області Ω і п'яти провідників, занурених у плазму. Щільність струмів провідників, була обрана у вигляді $j_z^{ex} = \frac{1}{5} \sum_{l=0}^4 \frac{1}{\rho} \delta\left(\rho - \rho_0, \omega - \frac{2\pi l}{5}\right)$. Було обрано також $R = 3$, $\rho_0 = 1$, $\alpha = 1,5$, $p_0 = 0,75 \cdot 10^{-3}$, $q = 0,05$.

Список використаних джерел:

1. Брушлинский, К. В. (2009). *Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики*. БИНОМ. Лаборатория знаний.
2. Рвачев В. Л. (1982). *Теория R-функций и некоторые её приложения*. Наукова думка.
3. Михлин С. Г. (1970). *Вариационные методы в математической физике*. Наука.