

УДК 62.506.2

Л. М. МАЙСТРОВСКАЯ

**ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ УНИВЕРСАЛЬНОЙ
Пороговой шкалы**

Настоящее сообщение является продолжением работ [1, 2]. Предположим, что испытуемому предлагают ответить на вопрос, различает ли он пару стимулов x и y из некоторого множества, физическая природа которого позволяет отождествить это множество с отрезком $[a, b]$ вещественной оси. Пусть $p(x, y) = p(y, x)$ —

вероятность положительного ответа. Зафиксируем произвольное достаточно малое положительное число δ — уровень разрешимости. Произвольная, строго возрастающая, непрерывная на $[a, b]$ функция $f_\delta(x)$ называется δ -шкалой порогов (отвечающей семейству вероятностей $p(x, y)$), если соотношения

$$p(x, y) = \delta, \quad p(x, y) < \delta, \quad p(x, y) > \delta$$

при всех x, y из $[a, b]$ эквивалентны соотношениям

$$|f_\delta(y) - f_\delta(x)| = \varepsilon, \quad |f_\delta(y) - f_\delta(x)| < \varepsilon, \quad |f_\delta(y) - f_\delta(x)| > \varepsilon$$

соответственно (здесь $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ — какое-либо число). В [2, с. 95] показано, что для того чтобы семейство вероятностей $p(x, y)$ при всех достаточно малых δ допускало δ -шкалу, необходимо и достаточно выполнить следующие условия*:

1) $p(x, x) = 0$;

2) если $x < y < z$ или $x > y > z$, то $p(x, z) > p(x, y)$;

3) $p(x, y)$ — непрерывная функция по совокупности переменных.

Так, определенная δ -шкала, вообще говоря, зависит от δ ; разным δ соответствуют различные шкалы $f_\delta(x)$. В настоящей работе рассматривается вопрос о существовании универсальной шкалы, т. е. такой функции f , которая была бы δ -шкалой при любом достаточно малом δ .

Теорема. Для того чтобы семейство вероятностей $p(x, y)$ допускало универсальную шкалу, необходимо и достаточно выполнение условий 1)–3) и, кроме того, условия

4) если $x < y < z$, $x' < y' < z'$ и $p(x, y) = p(x', y')$, $p(y, z) = p(y', z')$, то $p(x, z) = p(x', z')$.

Отметим, что существование универсальной шкалы, очевидно, эквивалентно справедливости равенства

$$p(x, y) = s(|f(y) - f(x)|) \quad (1)$$

с какой-либо строго возрастающей функцией $s(\xi)$. При этом $\varepsilon(\xi) = s^{-1}(\xi)$. Равенство (1) можно переписать также в другой, более удобной для наших целей форме: если $x < y < z$, то

$$s^{-1}(p(x, z)) = s^{-1}(p(x, y)) + s^{-1}(p(y, z)). \quad (2)$$

Действительно, из (1) с очевидностью вытекает (2). Если же выполняется (2), то достаточно положить

$$f(x) = s^{-1}(p(a, x)) + \Theta,$$

где Θ — произвольная константа. Тогда в силу (2) при $y \geq x$

$$s^{-1}(p(x, y)) = s^{-1}(p(a, y)) - s^{-1}(p(a, x)) = f(y) - f(x),$$

откуда и вытекает (1).

* В [2, 3], как и всюду в дальнейшем, предполагается, что x, y, z такие, что величины $p(x, y)$ и $p(x, z)$ достаточно малы. Впредь это предположение, как правило, не будет оговариваться.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность.

Зафиксируем произвольную пару достаточно малых неотрицательных чисел δ_1, δ_2 и выберем произвольную тройку чисел x, y, z из $[a, b]$, лишь бы выполнялось $x \leq y \leq z$ и $p(x, y) = \delta_1, p(y, z) = \delta_2$. Тогда, как следует из условия 4) величина $p(x, z)$ однозначно определяется числами δ_1, δ_2 и не зависит от выбора точек x, y, z , т. е.

$$p(x, z) = \Phi(p(x, y), p(y, z)), \quad (3)$$

где $\Phi(u, v)$ — функция, определенная при $u, v \in I$, со значениями на E (здесь $I = [0, \delta_0]$, $E = [0, \Delta_0]$, а δ_0, Δ_0 достаточно малые положительные числа: $\delta_0 < \Delta_0$).

Выведем существование шкалы из следующего утверждения, вытекающего из одного общего предположения об измерении величин [3, с. 114].

Пусть $(u, v) \rightarrow uv$ — закон композиции в E , определенный для всех $u \in I, v \in I$ и удовлетворяющий условиям:

(GR_I) . $\Phi(0, u) = \Phi(u, 0) = 0$ для любого $u \in I$ и закон композиции ассоциативен: если $u \in I, v \in I, w \in I, \Phi(u, v) \in I$ и $\Phi(v, w) \in I$, то $\Phi(u, \Phi(v, w)) = \Phi(\Phi(u, v), w)$.

(GR_{II}) . Если $u \in I, v \in I, w \in I$ и $u < v$, то $\Phi(u, w) < \Phi(v, w)$ и $\Phi(w, u) < \Phi(w, v)$.

(GR_{III_a}) . Каковы бы ни были $u, v \in I$ такие, что $u < v$, существует $w \in I$ такое, что $\Phi(u, w) = v$.

Тогда существует строго возрастающее отображение $\varepsilon(\delta)$ на некоторый отрезок числовой прямой с началом 0 такое, что

$$\varepsilon(0) = 0; \quad \varepsilon(\Phi(u, v)) = \varepsilon(u) + \varepsilon(v). \quad (4)$$

Таким образом, если Φ удовлетворяет условиям $(GR_I), (GR_{II})$ и (GR_{III_a}) , то из (3) и (4) вытекает (2) с $s = \varepsilon^{-1}$, а следовательно, и существование универсальной шкалы.

Проверим выполнение условий $(GR_I), (GR_{II}), (GR_{III_a})$. Пусть $u \in I$. Возьмем произвольную пару точек x, y при условии $p(x, y) = u$. Тогда в силу (3) $p(x, y) = \Phi(p(x, x), p(x, y)) = \Phi(0, p(x, y))$, т. е. $\Phi(0, u) = u$. Аналогично $\Phi(u, 0) = u$. Далее пусть $u, v, w, \Phi(u, v), \Phi(v, w) \in I$. Выберем на $[a, b]$ числа x, y, z, h так, чтобы $x \leq y \leq z \leq h$ и $p(x, y) = u, p(y, z) = v, p(z, h) = w$. Такой выбор возможен, так как функция $p(x, y)$ при фиксации x в силу 2)–3) является монотонно возрастающей непрерывной функцией от y , а отрезок I достаточно мал. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(u, \Phi(v, w)) &= \Phi(u, \Phi(p(y, z), p(z, h))) = \Phi(u, \Phi(p(y, h))) = \\ &= \Phi(p(x, y), p(y, h)) = \Phi(p(x, h)). \end{aligned}$$

Аналогично $\Phi(\Phi(u, v), w) = \Phi(p(x, h))$. Таким образом, свойство (GR_I) проверено.

Пусть $u, v, w \in I$ и $u < v$. Выберем на I точки x, y, z так, чтобы $x < y \leq z$ и $p(x, y) = v, p(y, z) = w$. В силу 1)–3) найдется точка $h \in (x, y)$ и такая, что $p(h, y) = u$. Тогда

$$\Phi(u, w) = \Phi(p(h, y), p(y, z)) = p(h, z);$$

$$\Phi(v, w) = \Phi(p(x, y), p(y, z)) = p(x, z).$$

Однако в силу 2) $p(h, z) < p(x, z)$. Следовательно, $\Phi(u, w) < \Phi(v, w)$. Аналогично выводится неравенство $\Phi(u, w) < \Phi(v, w)$. Следовательно, (GR_{II}) выполняется.

Пусть $u, v \in I$ и $u < v$. Выберем на $[a, b]$ точки x, y, z так, чтобы $x < y < z$ и $p(x, y) = u, p(x, z) = v$. Положим $w = p(y, z)$. Тогда

$$\Phi(u, w) = \Phi(p(x, y), p(y, z)) = p(x, z) = v.$$

Итак, свойство (GR_{III}) также проверено. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Майстровская Л. М., Ольховский Ю. Г., Шабанов-Кушнаренко Ю. П. Условия существования пороговых шкал. — В сб.: Проблемы бионики. Вып. 9, Харьков, 1972, с. 3—9.
2. Майстровская Л. М. О шкалах дифференциальных порогов. — В кн.: Материалы VI Всесоюзного симпозиума по кибернетике. Тбилиси, 1972, с. 95—98.
3. Бурбак Н. Общая топология, числа и связанные с ними группы и пространства. М., Физматгиз, 1959. 247 с.