УДК 621.396.2.: 621.316.2

В. А. ТИХОНОВ, канд. техн. наук, К. В. НЕТРЕБЕНКО

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ-СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО ТРЕТЬЕГО РАНГА НЕГАУССОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Введение. При решении многих прикладных задач возникает необходимость анализировать негауссовы случайные процессы [1–3]. Дальнейшее совершенствование методов обработки таких процессов направлено на использование их негауссовых свойств [4 – 5]. Синтез структур обработки негауссовых процессов, а также генерация негауссовых имитационных процессов требуют создания конструктивных статистических моделей таких процессов. Для этих целей можно применять модели линейного предсказания [6].

Смешанная модель линейного предсказания авторегрессии-скользящего среднего (АРСС) наиболее точно описывает случайные процессы, спектры которых содержат острые пики и имеют глубокие впадины. Параметры модели АРСС рассчитывают по значениям функции корреляции. Таким образом, эта модель описывает негауссов случайный процесс в рамках корреляционной теории. Поэтому актуальной является проблема создания моделей линейного предсказания, которые учитывали бы и негауссовы характеристики случайных процессов.

Для того чтобы в модели АРСС учесть статистические связи высших порядков, необходимо обобщение модели на основе моментных функций порядка больше двух [7]. Ниже будет предложена модель обобщенной авторегрессии-скользящего среднего (ОАРСС), позволяющая более полно описывать негауссовы случайные процессы со смешанным спектром. Данная модель может быть использована для синтеза обеляющих фильтров для негауссовых радиолокационных и других помех, при распознавании негауссовых сигналов, для оценки спектров сигналов на фоне гауссовых помех и при решении других задач.

Целью работы является получение разностного уравнения ОАРСС, вывод уравнений для расчета параметров модели по моментным функциям третьего порядка, анализ примеров построения модели.

Обобщенная модель авторегрессии-скользящего среднего третьего ранга. Пусть моделируемый процесс $x[t]$ представляет собой стационарный негауссов эргодический случайный процесс со смешанным спектром. Будем полагать, что статистические связи высших порядков отсчетов негауссова случайного процесса описываются уравнениями, аналогичными уравнению обычной модели АРСС, учитывающему только корреляционные связи. Тогда обобщенная модель АРСС третьего ранга описывается разностным уравнением:

$$\begin{aligned} x[t] &= \Phi^l_3[1]x[t-1] + \Phi^l_3[2]x[t-2] + \ldots + \Phi^l_3[p_l]x[t-p_l] - \\ &- Q^l_3[1]a^l_3[t-1] - Q^l_3[2]a^l_3[t-2] - \ldots - Q^l_3[q_l]a^l_3[t-q_l] + a^l_3[t] \ , \end{aligned} \qquad (1)$$

где $\Phi^l_3[i]$ - коэффициенты авторегрессии; $Q^l_3[i]$ - коэффициенты скользящего среднего для фиксированного сдвига моментной функции $l \geq 0$. Эти коэффициенты описывают статистические связи второго порядка негауссова процесса в отличие от коэффициентов авторегрессии - скользящего среднего обычной модели АРСС, описывающих статистические связи первого порядка. Как правило, полагают, что коэффициенты авторегрессии должны удовлетворять условию стационарности, а коэффициенты скользящего среднего - условию обратимости процесса [6]. Ошибка предсказания $a^l_3[t]$ является стационарным случайным негауссовым процессом типа белого шума с нулевым средним и удовлетворяет условию статистической независимости второго порядка:

$$\mathrm{E}\{a^l_3[t]a^l_3[t-j]a^l_3[t-l]\} = 0, j > 0. \qquad (2)$$

Выражение для моментной функции третьего порядка процесса ОАРСС можно получить, если умножить левую и правую части (1) на $x[t-j]x[t-l]$ и взять математическое ожидание:

$$\begin{aligned} m_3[\,j,j-l\,] &= \Phi_3^l[1]m_3[\,j-1,j-l\,]+\Phi_3^l[2]m_3[\,j-2,j-l\,]+\ldots+\Phi_3^l[\,p_l\,]m_3[\,j-p_l,j-l\,]- \\ &-Q_3^l[1]m_{3xxa}[-j,-l,-1]-\ldots-Q_3^l[\,q_l\,]m_{3xxa}[-j,-l,-q_l\,]+m_{3xxa}[-j,-l,0\,]\,, \end{aligned} \quad (3)$$

где $m_3[\,j,j-l\,]$ - моментная функция процесса $x[t]$; $m_{3xxa}[-j,-l,-i,]$ - взаимная моментная функция случайных процессов $x[t]$ и $a_3^l[t]$, для которой справедливы соотношения:

$$m_{3xxa}[-j,-l,-i] = E\{\,x[t-j\,]x[t-l\,]a_3^l[t-i\,]\} = m_{3a}^l \quad (4)$$

при $j=i=l$. Взаимная моментная функция $m_{3xxa}[-j,-l,-i]$ удовлетворяет соотношениям, которые являются следствием (4):

$$m_{3xxa}[-j,-l,-i] = 0,\ \ j>i,\, l>i, \quad (5а)$$

$$m_{3xxa}[-j,-l,-i] \neq 0,\ \ j\le i,\, l\le i. \quad (5б)$$

Частным случаем (3) является уравнение, полученное при условии, что все взаимные моментные функции $m_{3xxa}[-j,-l,-i]$, в силу (5а), равны нулю:

$$\begin{aligned} m_3[\,j,j-l\,] &= \Phi_3^l[1]m_3[\,j-1,j-l\,]+\Phi_3^l[2]m_3[\,j-2,j-l\,]+\ldots+ \\ &+\Phi_3^l[\,p_l\,]m_3[\,j-p_l,j-l\,]\,, \quad j\ge q_l+1\,. \end{aligned} \quad (6)$$

Выражение для третьего момента процесса $x[t]$ можно получить из (1), если умножить его левую и правую части на $x[t]x[t]$ и взять математическое ожидание:

$$\begin{aligned} m_3 &= \Phi_3^l[1]m_3[1,1]+\Phi_3^l[2]m_3[2,2]+\ldots+\Phi_3^l[\,p_l\,]m_3[\,p_l,p_l\,]-Q_3^l[1]m_{3xxa}[0,0,-1]- \\ &-Q_3^l[2]m_{3xxa}[0,0,-2]-\ldots-Q_3^l[\,q_l\,]m_{3xxa}[0,0,-q_l\,]+m_{3a}^l\,. \end{aligned} \quad (7)$$

В качестве примера построения модели рассмотрим модель ОАРСС(1,1) третьего ранга для произвольного l:

$$x[t] = \Phi_3^l[1]x[t-1]-Q_3^l[1]a_3^l[t-1]+a_3^l[t]. \quad (8)$$

Моментная функция процесса удовлетворяет уравнению

$$m_3[\,j,j-l\,] = \Phi_3^l[1]m_3[\,j-1,j-l\,]-Q_3^l[1]m_{3xxa}[-j,-l,-1]+m_{3xxa}[-j,-l,0]. \quad (9)$$

Система уравнений, описывающая модель ОАРСС(1,1), имеет вид

$$\begin{aligned} m_3 &= \Phi_3^l[1]m_3[1,1]-Q_3^l[1]m_{3xxa}[0,0,-1]+m_{3a}^l\,, \\ m_3[1,1-l\,] &= \Phi_3^l[1]m_3[0,1-l\,]-Q_3^l[1]m_{3xxa}[-1,-l,-1]\,, \\ m_3[\,j,j-l\,] &= \Phi_3^l[1]m_3[\,j-1,j-l\,]\,,\ j>1\,. \end{aligned} \quad (10)$$

Чтобы получить полную систему уравнений модели АРСС(1,1), необходимо задать значение индекса l. Для $l=0$ из (10) получим:

$$m_3 = \Phi_3^0[1]m_3[1,1] - Q_3^0[1]m_{3xxa}[0,0,-1] + m_{3a}^0,$$
$$m_3[1,1] = \Phi_3^0[1]m_3[0,1] - Q_3^0[1]m_{3xxa}[-1,0,-1], \tag{11}$$
$$m_3[j,j] = \Phi_3^0[1]m_3[j-1,j], \; j>1.$$

Взаимную моментную функцию $m_{3xxa}[0,0,-1]$ можно найти, умножив (8) на $x[t-1]a_3^0[t-1]$ и перейдя к математическим ожиданиям:

$$m_{3xxa}[0,0,-1] = \Phi_3^0[1]m_{3xxa}[0,-1,-1] - Q_3^0[1]m_{3xaa}[0,-1,-1]. \tag{12}$$

Функцию $m_{3xxa}[0,-1-1]$, входящую в выражение (12), найдем, умножив (8) на $x[t-1]a_3^0[t-1]$ и взяв математическое ожидание

$$m_{3xxa}[0,-1,-1] = \Phi_3^0[1]m_{3xxa}[-1,-1,-1] - Q_3^0[1]m_{3xaa}[-1,-1,-1]. \tag{13}$$

Взаимные моментные функции в (13)

$$m_{3xxa}[-1,-1,-1] = E\{x[t-1]x[t-1]a_3^0[t-1]\} = m_{3a}^0,$$
$$m_{3xaa}[-1,-1,-1] = E\{x[t-1],a_3^0[t-1],a_3^0[t-1]\} = m_{3a}^0. \tag{14}$$

Тогда с использованием соотношения (14), выражение (13) приведем к виду

$$m_{3xxa}[0,-1,-1] = (\Phi_3^0[1] - Q_3^0[1])m_{3a}^0. \tag{15}$$

Для нахождения $m_{3xaa}[0,-1,-1]$, входящего в выражение (12), умножим (8) на $a_3^0[t-1]a_3^0[t-1]$ и перейдем к математическим ожиданиям. Используя (14), получим

$$m_{3xaa}[0,-1,-1] = (\Phi_3^0[1] - Q_3^0[1])m_{3a}^0. \tag{16}$$

Подставляя найденные взаимные моментные функции (15) и (16) в (12), приходим к выражению

$$m_{3xxa}[0,0,-1] = (\Phi_3^0[1] - Q_3^0[1])^2 m_{3a}^0. \tag{17}$$

Учитывая значения взаимных моментных функций (15) и (17), систему уравнений (11) можно преобразовать следующим образом:

$$m_3 = \Phi_3^0[1]m_3[1,1] - Q_3^0[1](\Phi_3^0[1] - Q_3^0[1])^2 m_{3a}^0 + m_{3a}^0,$$
$$m_3[1,1] = \Phi_3^0[1]m_3[0,1] - Q_3^0[1](\Phi_3^0[1] - Q_3^0[1])m_{3a}^0, \tag{18}$$
$$m_3[j,j] = \Phi_3^0[1]m_3[j-1,j], \; j>1.$$

Решая систему уравнений (18), можно определить параметры $\Phi_3^0[1]$ и $Q_3^0[1]$ и третий момент ошибки предсказания m_{3a}^0. Полученные выражения показывают, что параметры моделей ОАРСС третьего ранга могут быть оценены на основе полных систем уравнений.

Выводы. Предложенные принципы обобщения позволят решить проблему построения моделей линейного предсказания ОАРСС по моментным функциям любого порядка. Анализ полученных выражений показывает их сходство с обычными моделями, которые являются частными случаями обобщенных моделей. Отличие состоит в том, что обобщенные модели могут иметь другие порядки и коэффициенты авторегрессии - скользящего среднего, отражающие негауссовы характеристики моделируемых процессов. Использование негауссовых моделей позволяет существенно дополнить результаты, полученные в рамках корреляционной теории.

Применение предложенных обобщенных моделей также дает возможность решать задачи, которые невозможно решить с использованием обычных моделей линейного предсказания. Дальнейшие исследования предложенной модели могут быть направлены на синтез фильтров на основе параметров модели, построение статистических моделей ОАРСС реальных негауссовых сигналов и процессов.

Список литературы: 1. *Журбенко И.Г.* Анализ стационарных и однородных случайных систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. 240 с. 2. *Леонов В.П.* Некоторые применения старших семиинвариантов в теории стационарных случайных процессов. М.: Наука, 1964. 124 с. 3. *Бриллинджер Д.Р.* Временные ряды. Обработка данных и теория. М.: Мир, 1980. 536 с. 4. *Кунченко Ю.П.* Нелинейная оценка параметров негауссовских радиотехнических сигналов. К.: Выща шк., 1987. 191с. 5. *Валеев В.Г., Данилов В.А.* Оптимальное обнаружение сигналов на фоне негауссовских коррелированных радиопомех // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1991. №7. С. 30—34. 6. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов/ Пер. с. англ. М.: Мир, 1974. Вып. 1. 406 с. 7. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. Радио, 1978. 376 с.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 23. 04. 2004