

## САМОНАСТРАИВАЮЩИЙСЯ ПИД-РЕГУЛЯТОР С АДАПТАЦИЕЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

БОДЯНСКИЙ Е.В., КОЛОДЯЖНЫЙ В.В.,  
КОТЛЯРЕВСКИЙ С.В.

В статье предложен многомерный самонастраивающийся регулятор для стохастического объекта, имеющий пропорционально-интегрально-дифференциальную структуру. Предлагаемый регулятор сочетает в себе способность к самонастройке параметров в реальном времени, т.е. свойства, присущие адаптивным системам, и традиционную ПИД-структуру, получившую наиболее широкое распространение в промышленных приложениях. Отличительной особенностью регулятора является введение дополнительного контура настройки параметров целевой функции, что обеспечивает устойчивость системы управления в целом и удержание управляющих и выходных переменных в требуемых границах.

Приводятся практические результаты, полученные в ходе численного эксперимента с использованием разработанной моделирующей программы. Полученные результаты подтверждают эффективность предлагаемого подхода.

### Введение

Последние годы характеризуются бурным развитием теории и техники адаптивного управления многомерными стохастическими объектами. После основополагающей работы У. Боррисона [1] появились сотни работ [2, 11, 12, 19], посвященных проблеме синтеза многомерных самонастраивающихся регуляторов, при этом необходимо отметить, что в этом потоке число публикаций, посвященных конкретным практическим приложениям, весьма невелико. Одна из причин этого явления, возможно, состоит в том, что большинство из предложенных регуляторов реализуют так называемые структурно оптимизируемые алгоритмы [2, 20], хотя в промышленных приложениях наиболее широкое распространение получили параметрически оптимизируемые алгоритмы, к которым относятся прежде всего пропорциональные (П), пропорционально-интегральные (ПИ) и наиболее часто используемые пропорционально-интегрально-дифференциальные (ПИД) регуляторы.

ПИД-регуляторы обладают рядом достоинств, делающих их весьма популярными в промышленных приложениях. Их широкое использование объясняется недостаточной изученностью промышленных объектов, что зачастую не позволяет синтезировать оптимальные законы управления. Необходимо отметить также свойства робастности этих регуляторов, их относительно дешевизну и, наконец, просто привычку инженеров-практиков к традиционным структурам.

Известно, что современный этап автоматизации производства характеризуется переходом от систем с

централизованной структурой управления к системам с децентрализованной структурой, в которой функции управления распределены между отдельными блоками. При этом для каждой из подсистем сложного технологического комплекса синтезируется свой локальный регулятор. Поскольку каждая из взаимодействующих технологических подсистем может иметь свою физическую природу и описываться математической моделью, отличной от моделей других подсистем, входящих в комплекс, структурно оптимизируемые локальные регуляторы могут существенно отличаться друг от друга. Естественно, что в этих условиях целесообразно использование однотипных унифицированных законов управления (например, ПИД-регуляторов), подстраивающих свои параметры под конкретный объект с учетом принятой цели управления. Подобные самонастраивающиеся ПИД-регуляторы могли бы стать базой для широкого класса систем управления.

Первый промышленный адаптивный ПИД-регулятор был, по-видимому, создан в 1980 году [3]. Он идентифицировал экстремумы процесса, описывающего сигнал ошибки, и настраивал параметры ПИД-алгоритма по критерию перерегулирования и затухания. Выбор параметров этого и других подобных ему регуляторов не был связан с каким-либо аналитическим критерием оптимизации и производился исходя из эмпирических соображений.

ПИД-регуляторы, подстраивающие свои параметры в реальном времени в соответствии с принятой моделью и целью управления, были достаточно подробно изучены в [4-6] для одномерного и в [7-10] для многомерного вариантов, хотя они и не лишены ряда существенных недостатков. Прежде всего следует отметить ограниченность порядка принятой модели объекта управления (обычно не выше второго), недостаточную изученность условий устойчивости замкнутой системы управления, отсутствие учета обязательно присутствующих в системе ограничений на перемещение объекта управления.

В настоящей статье предпринята попытка синтеза многомерного самонастраивающегося регулятора, имеющего традиционную ПИД-структуру и способного к адаптации своих параметров в реальном времени в соответствии с принятой целью управления, имеющимися ограничениями и параллельно процессу идентификации коэффициентов настраиваемой модели объекта.

### 1. Постановка задачи

Пусть объект управления описывается многомерным разностным уравнением типа ARMAX MIMO

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})w(t), \quad (1)$$

где  $y(t), u(t), w(t) - (s \times 1), (r \times 1), (s \times 1)$  векторы выходов, управлений и возмущений соответственно в дискретный момент времени  $t = 0, 1, 2, \dots$ ;  $A(q^{-1}), B(q^{-1}), C(q^{-1}) - (s \times s), (s \times r), (s \times s) - 1$ -матрицы степени  $n_A, n_B, n_C$  соответственно;  $d \geq 1$  - время чистого запаздывания по каналам управления;  $q^{-1}$  - оператор сдвига назад.

Относительно объекта (1) принимаются следующие допущения:

$$A(q^{-1}) = I + A_1 q^{-1} + \dots + A_{n_A} q^{-n_A} = I + \tilde{A}(q^{-1}), \quad (2)$$

(здесь  $I - (s \times s)$  – единичная матрица);

$$B(q^{-1}) = B_0 + B_1 q^{-1} + \dots + B_{n_B} q^{-n_B} = B_0 + \tilde{B}(q^{-1}), \quad (3)$$

$$\text{rank } B = \min\{s, r\}$$

$$C(q^{-1}) = I + C_1 q^{-1} + \dots + C_{n_C} q^{-n_C} = I + \tilde{C}(q^{-1}) \quad (4)$$

при этом нули полинома  $\det C(q^{-1})$  лежат внутри единичного круга

$$M\{w(t)|F_{t-1}\} = 0, M\{w(t)w^T(t)|F_{t-1}\} = P_w < \infty, \quad (5)$$

где  $M\{\cdot\}$  – символ условного математического ожидания,  $F_{t-1}$  – последовательность возрастающих  $s$ -алгебр, порождаемых  $\{w(0), w(1), \dots, w(t)\}$  такая, что  $F_0 \subset F_t \subset F$  для всех  $t > 0$ . Заметим также, что описание (1) содержит  $\text{ssn}_A + \text{sr}(n_B + 1) + \text{ssn}_C$  параметров, в общем случае неизвестных.

Цель управления задается критерием типа многомерной обобщенной дисперсии [1, 2]

$$I_t = M\left\{\|y^*(t+d) - y(t+d)\|_{Q_1}^2 + \|u(t)\|_{Q_2}^2 | F_t\right\}, \quad (6)$$

где  $y^*(t+d)$  – известный  $s$ -мерный внешний задающий сигнал;  $Q_1$  и  $Q_2$  – весовые  $(s \times s)$  и  $(r \times r)$  симметрические положительно определенная и неотрицательно определенная матрицы соответственно, а структура алгоритма управления совпадает с многомерным цифровым ПИД-регулятором в скоростной форме

$$u(t) = u(t-1) + K_0 v_c(t) + K_1 v_c(t-1) + K_2 v_c(t-2) = u(t-1) + K v_c(t) \quad (7)$$

Здесь  $K_i (i = 0, 1, 2) - (r \times s)$  – матрицы параметров регулятора;  $K = (K_0 \ K_1 \ K_2) - (r \times 3s)$  составная матрица параметров;  $v_c(t) = y^*(t) - y(t) - (s \times 1)$  – вектор ошибок управления на  $t$ -ом такте;  $V_C(t) = (v_c^T(t), v_c^T(t-1), v_c^T(t-2))^T - (3s \times 1)$  – составной вектор ошибок.

Задача состоит в нахождении процедуры настройки матрицы  $K$  параметров регулятора (7), обеспечивающей минимум критерия управления (6) при ограничениях на входные и выходные переменные объекта.

## 2. Синтез настраиваемого упреждителя

Поскольку модель объекта содержит запаздывание, необходимо построить настраиваемый упреждитель. Для этого с использованием теоремы о делении  $\lambda$ -матриц для объекта (1) введем следующие соотношения [1]:

$$C(q^{-1}) = A(q^{-1})F(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1}), \quad (8)$$

где

$$F(q^{-1}) = I + F_1 q^{-1} + \dots + F_{d-1} q^{-d+1}, G(q^{-1}) = G_0 + G_1 q^{-1} + \dots + G_{n_A-1} q^{-n_A+1}$$

Существуют матрицы  $F'(q^{-1}), C'(q^{-1})$  (не обязательно единственные) такие, что [1, 11]

$$F'(q^{-1})G(q^{-1}) = G'(q^{-1})F(q^{-1}), F'(0) = I, \det F'(q^{-1}) = \det F(q^{-1}), \quad (9)$$

$$C'(q^{-1})F(q^{-1}) = F'(q^{-1})C(q^{-1}), C'(0) = I, \det C'(q^{-1}) = \det C(q^{-1}) \quad (10)$$

при этом справедливо выражение

$$C'(q^{-1}) = F'(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}G'(q^{-1}). \quad (11)$$

Очевидны следующие преобразования:

$$F'(q^{-1})A(q^{-1})y(t) = F'(q^{-1})B(q^{-1})u(t-d) + F'(q^{-1})C(q^{-1})w(t), \quad (12)$$

$$(C'(q^{-1}) - q^{-d}G'(q^{-1}))y(t) = F'(q^{-1})B(q^{-1})u(t-d) + F'(q^{-1})C(q^{-1})w(t), \quad (13)$$

$$C'(q^{-1})y(t) - C'(q^{-1})F(q^{-1})w(t) = G'(q^{-1})y(t-d) + F'(q^{-1})B(q^{-1})u(t-d), \quad (14)$$

$$C'(q^{-1})y(t) - C'(q^{-1})F(q^{-1})w(t) - C'(q^{-1})\hat{y}(t|t-d) = G'(q^{-1})y(t-d) + F'(q^{-1})B(q^{-1})u(t-d) - \hat{y}(t|t-d) - \tilde{C}'(q^{-1})\hat{y}(t|t-d) \quad (15)$$

где  $\hat{y}(t|t-d) = M\{y(t)|F_{t-d}\}$  оптимальный относительно  $F_{t-d}$  прогноз выходной последовательности  $y(t)$ . Тогда оптимальный прогноз на момент  $t+d$ , сделанный в момент времени  $t$ , будет иметь вид

$$\hat{y}(t+d|t) = G'(q^{-1})y(t) + F'(q^{-1})B(q^{-1})u(t) - \tilde{C}'(q^{-1})\hat{y}(t+d|t), \quad (16)$$

а ошибка прогнозирования

$$v_p(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-d) = F(q^{-1})w(t) = \tilde{w}(t)$$

характеризуется ковариационной матрицей

$$M\{v_p(t)v_p^T(t)|F_{t-d}\} = F(q^{-1})P_w F^T(q^{-1}) = \tilde{P}_w. \quad (17)$$

Выражение (16) описывает многошаговый оптимальный упреждитель, соответствующий объекту (1), и содержит  $\text{ssn}_A + \text{sr}(n_B + d) + \text{ssn}_C$  параметров, что на  $(d-1)\text{sr}$  больше, чем в описанном объекте управления. Для удобства дальнейших преобразований введем обобщенный вектор входов

$$\phi(t+d) = (u^T(t), u^T(t-1), \dots, u^T(t-d-n_B+1), y^T(t), \dots, y^T(t-n_A+1), -\hat{y}^T(t+d-1|t-1), \dots, -\hat{y}^T(t+d-n_C|t-n_C))^T = (u^T(t), \psi^T(t))^T$$

и составную матрицу параметров упреждителя

$$\tilde{L} = (B_0, F'_1 B_0, \dots, F'_{d-1} B_{n_B}, G'_0, \dots, G'_{n_A-1}, C'_1, \dots, C'_{n_C}) = (B_0, L)$$

после чего перепишем (16) в форме

$$\hat{y}(t+d|t) = \tilde{L}\phi(t+d) = B_0 u(t) + L\psi(t). \quad (18)$$

которая в дальнейшем будет использована для синтеза закона управления.

Поскольку параметры оптимального упредителя, входящие в матрицу  $\hat{L}$ , в общем случае неизвестны, они должны быть определены с помощью процедуры адаптивной идентификации, для чего в соответствии (18) ставится настраиваемая модель вида

$$\hat{y}(t+d) = \hat{L}(t)\varphi(t+d) = \hat{B}_0(t)u(t) + \hat{L}(t)\psi(t), \quad (19)$$

где  $\hat{y}(t+d)$  – настраиваемый многошаговый прогноз,  $\hat{L}(t), \hat{B}_0(t), \hat{L}(t)$  – матрицы оценок, полученные по данным, имеющимся в момент времени  $t$ .

Вводя матрицу обобщенных входов

$$X(t+d) = I \otimes \varphi(t+d) \quad (20)$$

(здесь  $\otimes$  – символ тензорного произведения), можно записать выражения для оптимального (21) и настраиваемого (22) упредителей

$$\hat{y}(t+d|t) = X^T(t+d)\theta, \quad (21)$$

$$\hat{y}(t+d) = X^T(t+d)\hat{\theta}(t) \quad (22)$$

(здесь  $\theta$  и  $\hat{\theta}(t) - (ssn_A + sr(n_B + d) + ssn_C) \times 1$  – векторы параметров и оценок соответственно), после чего для настройки вектора оценок  $\hat{\theta}(t)$  применить алгоритм идентификации, предложенный и исследованный в [12, 13]

$$\begin{cases} \hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{a}{r(t)} X(t)(y(t) - X^T(t)\hat{\theta}(t-1)), & (23a) \\ r(t) = r(t-1) + s^{-1} \text{Tr}(X^T(t)X(t)), & (23b) \\ 0 < a < 2, r(0) = 1. \end{cases}$$

В [12–14] показано, что при принятых допущениях относительно объекта (1), адаптивная процедура идентификации (23) обеспечивает сходимость оценок  $\hat{\theta}(t)$  к оптимальным параметрам упредителя (21).

### 3. Синтез алгоритма настройки параметров регулятора

Теперь перейдем непосредственно к разработке алгоритма настройки параметров многомерного ПИД-регулятора. Критерий управления (6)

$$\begin{aligned} I_t &= M\left\{ \|y^*(t+d) - y(t+d)\|_{Q_1}^2 + \|u(t)\|_{Q_2}^2 \middle| F_t \right\} = \\ &= M\left\{ \|y^*(t+d) - \hat{y}(t+d|t) - \tilde{w}(t+d)\|_{Q_1}^2 + \right. \\ &\left. + \|u(t)\|_{Q_2}^2 \middle| F_t \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

с учетом некоррелированности  $\tilde{w}(t+d)$  с  $u(t)$ ,  $y^*(t+d)$  и  $\psi(t)$  можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} I_t &= M\left\{ \|y^*(t+d) - B_0u(t) - L\psi(t) - \tilde{w}(t+d)\|_{Q_1}^2 + \|u(t)\|_{Q_2}^2 \middle| F_t \right\} = \\ &= M\left\{ \|y^*(t+d) - B_0u(t-1) - B_0KV_C(t) - L\psi(t) - \tilde{w}(t+d)\|_{Q_1}^2 + \right. \\ &\left. + \|u(t-1) + KV_C(t)\|_{Q_2}^2 \middle| F_t \right\} = V_C^T(t)K^T(B_0^TQ_1B_0 + Q_2)KV_C(t) - \\ &- 2y^{*T}(t+d)Q_1B_0KV_C(t) + 2u^T(t-1)B_0^TQ_1B_0KV_C(t) + \\ &+ \psi^T(t)L^TQ_1B_0KV_C(t) + 2u^T(t-1)Q_2KV_C(t) + \varepsilon(t), \end{aligned} \quad (25)$$

где  $\varepsilon(t)$  – члены, не зависящие от матрицы коэффициентов  $K$ .

Решая далее систему уравнений  $\partial I_t / \partial K = 0$ , получаем, что на  $t$ -ом такте управления матрица коэффициентов многомерного ПИД-регулятора задается выражением

$$K(t) = (B_0^TQ_1B_0 + Q_2)^{-1}(B_0^TQ_1(y^*(t+d) - B_0u(t-1) - L\psi(t)) - Q_2u(t-1))V_C^+(t), \quad (26)$$

где  $V_C^+(t)$  – вектор-строка, псевдообратная к вектору  $V_C(t)$ , причем, если не все компоненты  $V_C(t)$  равны нулю, то  $V_C^+(t) = V(t)\|V_C(t)\|^{-2}$  [15].

Поскольку в рамках рассматриваемой задачи корректен принцип стохастической эквивалентности (ЛКП-задача), то, заменяя неизвестные параметры оптимального упредителя их оценками, полученными в контуре идентификации с помощью алгоритма (23), запишем алгоритм работы самонастраивающегося многомерного ПИД-регулятора в виде

$$\begin{cases} \hat{u}(t) = \hat{u}(t-1) + \hat{K}(t)V_C(t), & (27a) \\ \hat{K}(t) = (\hat{B}_0^T(t)Q_1\hat{B}_0(t) + Q_2)^{-1} \times \\ \times \{ \hat{B}_0^T(t)Q_1[y^*(t+d) - \hat{B}_0(t)u(t-1) - \\ - \hat{L}(t)\psi(t)] - Q_2u(t-1) \} V_C^+(t). & (27b) \end{cases}$$

При этом, однако, необходимо уточнить, что алгоритм (27a), (27b) минимизирует, как впрочем и все системы, основанные на принципе стохастической эквивалентности, не критерий (6) или (24), в основе которого лежит ошибка

$V_C(t) = y^*(t+d) - y(t+d)$ , а целевую функцию  $\hat{I}_t$ , основанную на ошибке слежения адаптивной системы  $\hat{v}_C(t) = y^*(t+d) - \hat{y}(t)$ . По мере стремления оценок

$\hat{\theta}(t)$  к своим оптимальным значениям  $\theta$ , качество управления, обеспечиваемое алгоритмом (27a), (27b), стремится к качеству, обеспечиваемому регулятором (6) или алгоритмом настройки (26). Для того, чтобы все же оценить это качество, преобразуем (27) к виду

$$\begin{aligned} \hat{K}(t) &= (\hat{B}_0^T(t)Q_1\hat{B}_0(t) + Q_2)^{-1} \hat{B}_0^T(t)Q_1 \times \\ &\times (y^*(t+d) - \hat{L}(t)\psi(t))V_C^+(t) - \\ &- (\hat{B}_0^T(t)Q_1\hat{B}_0(t) + Q_2)^{-1} (\hat{B}_0^T(t)Q_1\hat{B}_0(t)u(t-1) + \\ &+ Q_2u(t-1))V_C^+(t) = u^*(t)V_C^+(t) - u(t-1)V_C^+(t) = \\ &= (u^*(t) - u(t-1))V_C^+(t), \\ u^*(t) &= (\hat{B}_0^T(t)Q_1\hat{B}_0(t) + Q_2)^{-1} \hat{B}_0^T(t)Q_1 \times \\ &\times (y^*(t+d) - \hat{L}(t)\psi(t)), \end{aligned} \quad (28)$$

есть выражение (29) представляет собой многомерный самонастраивающийся алгоритм управления ARMAX MIMO объектом, предложенный и исследованный в [11], и являющийся обобщением широко известного алгоритма У.Боррисона [1].

Подставляя далее (28) в (27), несложно видеть, что

$$\hat{u}(t) = u(t-1) + \frac{(u^*(t) - u(t-1))V_C^T(t)}{\|V_C(t)\|^2} V_C(t) = u^*(t), \quad (30)$$

т.е. предлагаемый алгоритм обеспечивает качество управления такое же, как и известные адаптивные системы [1, 2, 11], сохраняя при этом свою ПИД-структуру. Данное обстоятельство важно в случае, когда на технологическом объекте уже установлен цифровой ПИД-регулятор, коэффициенты которого с помощью микропроцессорного контроллера могут быть вычислены на основании соотношения (27).

#### 4. Адаптация параметров целевой функции

Выбор матриц  $Q_1$  и  $Q_2$  в критерии (6), как правило, неформален и производится либо на интуитивном уровне, либо в процессе экспериментирования с моделью объекта. Между тем, значение правильного выбора этих матриц трудно переоценить. Соответствующим выбором весовых матриц можно добиться высокого качества управления неминимально фазовым и неустойчивым объектом [17, 18], поскольку эти матрицы существенным образом влияют на расположение нулей и полюсов замкнутой системы управления. Так, например, при возрастании элементов  $Q_2$  уменьшается амплитуда управляющих воздействий, но возрастает ошибка управления, и наоборот.

Вводя ограничения на сигналы управления и ошибки и организовав специальным образом процесс адаптации  $Q_1$  и  $Q_2$ , можно добиться требуемого качества управления и устойчивости замкнутой системы в целом, даже если объект (1) неустойчив.

Пусть на каждую компоненту управляющего сигнала  $\hat{u}(t)$  и ошибки  $\hat{v}_c(t)$  наложены ограничения вида

$$\begin{cases} \hat{v}_{c,i}^2(t+d) = (y^*(t+d) - \hat{y}(t+d))_i^2 \leq C_{v,i}^2, \\ i = 1, 2, \dots, s, \\ \hat{u}_j^2(t) = (\hat{u}(t-1) + \hat{K}(t)V_c(t))_j^2 \leq C_{u,j}^2, \\ j = 1, 2, \dots, r, \end{cases} \quad (31)$$

где  $(\bullet)_k^2$  обозначает квадрат  $k$ -ой компоненты соответствующего вектора. Система неравенств (31) имеет смысл энергетических ограничений на соответствующие сигналы, а их выполнение автоматически обеспечивает устойчивость системы управления.

Теперь можно записать функцию Лагранжа, вводя векторы ограничений  $C_v = (c_{v,1}, c_{v,2}, \dots, c_{v,s})^T$  и  $C_u = (c_{u,1}, c_{u,2}, \dots, c_{u,r})^T$ ,

$$\begin{aligned} L_t &= \hat{J}_t + \\ &+ \left\| (y^*(t+d) - \hat{B}_0(t)u(t-1) - \hat{L}(t)\psi(t) - \hat{B}_0(t)\tilde{K}(t)V_c(t)) \right\|_{\Lambda_1}^2 - \\ &- \|C_v\|_{\Lambda_1}^2 + \|u(t-1) + \tilde{K}(t)V_c(t)\|_{\Lambda_2}^2 - \|C_u\|_{\Lambda_1}^2 = \quad (32) \\ &= V_c^T(t)\tilde{K}^T(t)(\hat{B}_0^T(t)(Q_1 + \Lambda_1(t))\hat{B}_0(t) + Q_2 + \Lambda_2(t))\tilde{K}(t)V_c(t) - \\ &- 2(y^*(t+d) - \hat{B}_0(t)u(t-1) - \hat{L}(t)\psi(t))^T(Q_1 + \Lambda_1(t)) - \\ &- u^T(t-1)(Q_2 + \Lambda_2(t))\tilde{K}(t)V_c(t) + \varepsilon(t), \end{aligned}$$

где  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  -  $(s \times s)$  и  $(r \times r)$  диагональные матрицы неотрицательных неопределенных множителей Лагранжа.

Применяя для поиска седловой точки функции (32) стандартную процедуру Эрроу-Гурвица-Удзавы [16], запишем процедуру настройки матриц  $\tilde{K}(t)$ ,  $Q_1$  и  $Q_2$ :

$$\tilde{K}(t) = (\hat{B}_0^T(t)\tilde{Q}_1(t)\hat{B}_0(t) + \tilde{Q}_2(t))^{-1}(\hat{B}_0^T(t)\tilde{Q}_1(t)(y^*(t+d) - \hat{B}_0(t)u(t-1) - \hat{L}(t)\psi(t)) - \tilde{Q}_2(t)u(t-1))V_c^+(t), \quad (33a)$$

$$\tilde{Q}_1(t) = Q_1 + \Lambda_1(t), \quad (33b)$$

$$\lambda_{1,i}(t+1) = \lambda_{1,i}(t) + \frac{\mu_{1,i}(t+1)\lambda_{1,i}(t)}{C_{v,i}^2}(\hat{v}_{c,i}^2(t+d) - C_{v,i}^2), \quad (33c)$$

$$i = 1, 2, \dots, s; 0 < \mu_{1,i}(t+1) < 1, \quad (33d)$$

$$\tilde{Q}_2(t) = Q_2 + \Lambda_2(t), \quad (33e)$$

$$\lambda_{2,j}(t+1) = \lambda_{2,j}(t) + \frac{\mu_{2,j}(t+1)\lambda_{2,j}(t)}{C_{u,j}^2}(u_j^2(t) - C_{u,j}^2), \quad (33e)$$

Несложно видеть, что выражение (33a) отличается от (27b) только перестраиваемыми матрицами  $\tilde{Q}_1(t)$  и  $\tilde{Q}_2(t)$ , уточнение которых производится с помощью простых соотношений (33b) - (33e), являющихся по своей сути процедурами вычисления неопределенных множителей Лагранжа. Введение дополнительного контура настройки весовых матриц критерия позволяет достаточно просто учесть наличие имеющихся ограничений на переменные объекта и обеспечить устойчивость системы.

#### 5. Практическая реализация алгоритма и результаты моделирования

Для исследования описанного выше алгоритма разработана программа моделирования, работающая с объектом, который имеет два управляющих входа  $u_1$  и  $u_2$  и два выхода  $y_1$  и  $y_2$ . На объект действует нормально распределенное возмущение. Результаты моделирования представляются в виде графиков.

Программа позволяет задавать различные матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  для объекта, количество тактов запаздывания объекта по каналам управления, матрицы  $Q_1$  и  $Q_2$  для критерия качества управления, параметры нормального распределения возмущающего воздействия, параметры и закон изменения задающих сигналов отдельно по каждому из каналов управления, начальные значения матриц  $F'$ ,  $B$ ,  $C'$  и  $G'$  упредителя.

Для обеспечения качественного управления крайне важно удачно выбрать начальные значения матриц упредителя. Программа моделирования в качестве значений этих матриц по умолчанию использует значения, экспериментально подобранные для используемого объекта.

Варьируя значения матриц  $Q_1$  (штраф за ошибку регулирования) и  $Q_2$  (штраф за перерегулирование), можно получить различные виды переходного процесса. Имеется возможность автоматической адаптивной настройки матриц  $Q_1$  и  $Q_2$  по алгоритму (33).

Численное исследование предложенного алгоритма выполнено для объекта, имеющего перекрестные связи, а также корреляцию между выходными переменными. Запаздывание по каналам управления равно двум тактам. На рис. 1, 2 показаны переходные характеристики объекта по управляющему входу  $u_1$ , на рис. 3, 4 - по входу  $u_2$ .

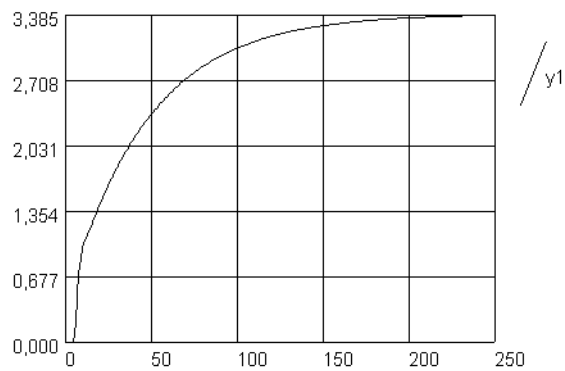


Рис. 1

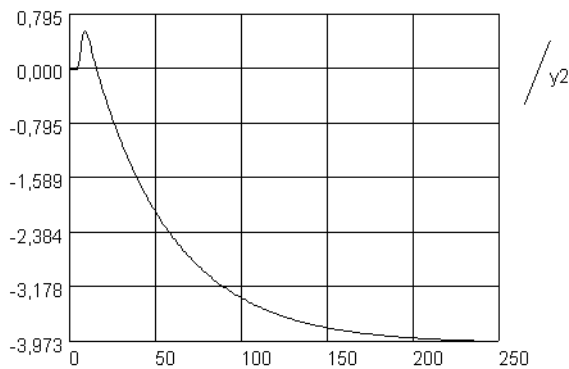


Рис. 2

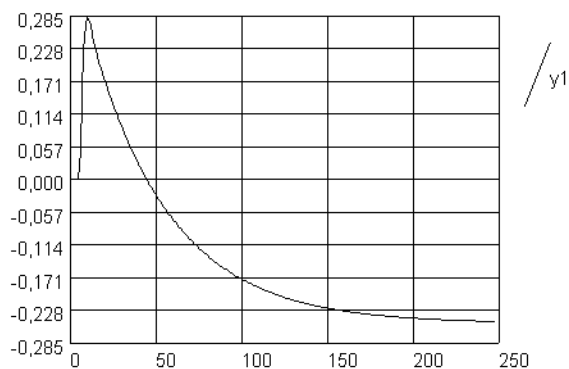


Рис. 3

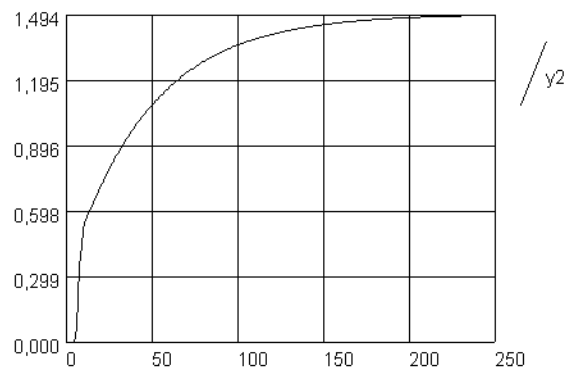


Рис. 4

На рис. 5–8 приведены результаты моделирования для данного объекта с использованием предложенного алгоритма управления (27). На объект действует нормально распределенное возмущение. Здесь  $y_{pr1}$  и  $y_{pr2}$  – предсказанные значения выходов,  $y_{ref1}$  и  $y_{ref2}$  – задающие сигналы.

На рис. 5. и рис. 6 управление осуществляется без использования алгоритма (33) адаптации весовых матриц  $Q1$  и  $Q2$  целевой функции.

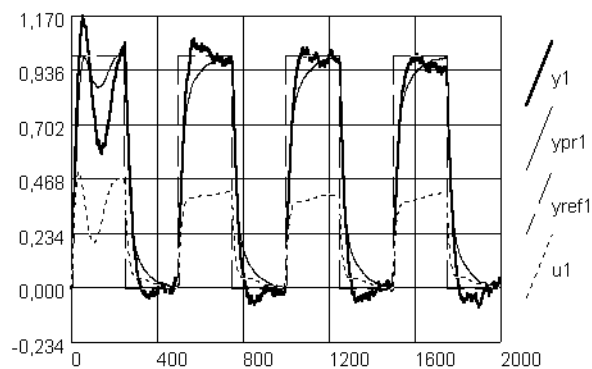


Рис. 5

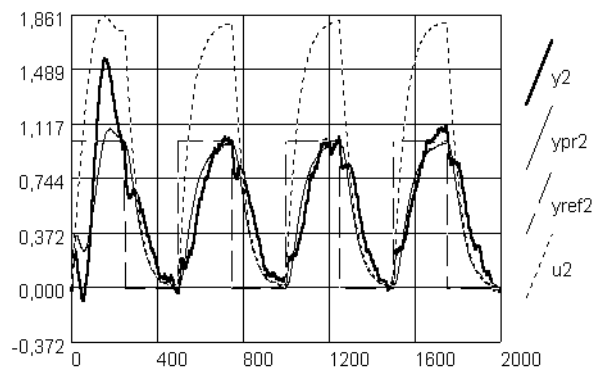


Рис. 6

На рис. 7. и рис. 8 используется алгоритм (33). Параметры моделирования те же, что и в предыдущем случае. На объект действует такая же возмущающая последовательность.

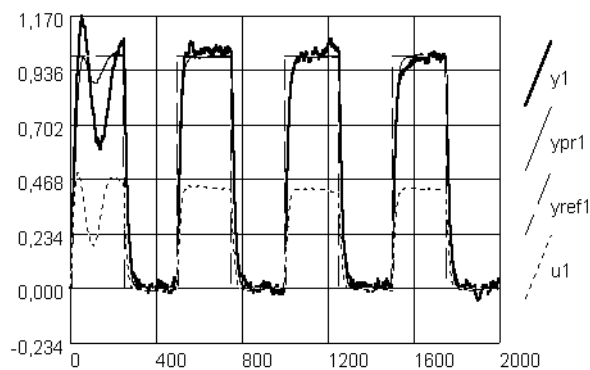


Рис. 7

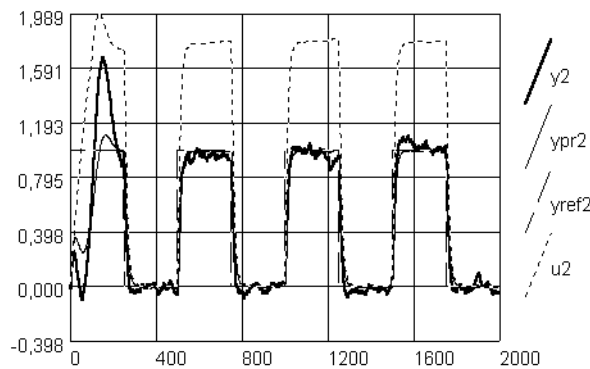


Рис. 8

Использование алгоритма адаптации параметров целевой функции приводит к улучшению качества управления, что видно из сравнения графиков на рис. 5, 6 и рис. 7, 8.

По виду графиков на рис. 5–8 можно сделать вывод, что предлагаемый регулятор позволяет достичь требуемого качества управления, задаваемого критерием (6), для многомерного стохастического объекта с запаздыванием по каналам управления.

**Литература.** 1. *Borrison U.* Self-tuning regulators for a class of multivariable systems // *Automatica*. 1979. №15. P. 209–215. 2. *Изерман Р.* Цифровые системы управления. М.: Мир, 1984. 541 с. 3. *Cheung L.S.* A new automated optimal tuning strategy for a PID controller // *ISA Trans.* 1988. 27. P. 69–75. 4. *Cameron F., Seborg D.E.* A self-tuning controller with a PID structure // *Int. J. Contr.* 1983. 38. P. 401–417. 5. *Kim J.-H., Choi K.-K.* Self-tuning discrete PID controller // *IEEE Trans. Ind. Electron.* 1987. 34. P. 268–300. 6. *Бодянский Е.В., Котляревский С.В., Ачкасов А.Е., Вороновский Г.К.* Адаптивные регуляторы пониженного порядка. Харьков: ХГАГХ, 1996. 144 с. 7. *Peltonen A., Koivo H.N.* Tuning of multivariable discrete time PI controller for unknown systems // *Int. J. Contr.* 1992. 57. P. 1387–1403. 8. *Jones A.H., Porter B.* Design of adaptive self-point tracking PID controllers incorporating recursive step-response matrix identifiers for multivariable plants // *IEEE Trans. Autom. Contr.* 1987. 32. P. 459–463. 9. *Yusof R., Omatu S.* A multivariable self-tuning PID controller // *Int. J. Contr.* 1992. 57. P. 1387–1403. 10. *Yusof R., Omatu S., Khalid M.* Self-tuning PID control: a multivariable derivation and application // *Automatica*. 1994. 30. P. 1975–1981. 11. *Bayomi M.M., Wong K.J., El-Bagouri M.A.* A self-tuning regulator for multivariable systems // *Automatica*. 1981. 17. P. 575–592. 12. *Caines P.E., Lafortune S.* Adaptive control with recursive identification for stochastic linear systems. Multivariable case // *Proc. 21-*

*st IEEE Conf. Decis. and Contr.* Orlando, Fla., Dec. 8–10, 1982, vol.3. N.Y.: 1982. P. 978–983. 13. *Caines P.E., Lafortune S.* Adaptive control with recursive identification for stochastic linear systems // *IEEE Trans. Autom. Contr.* 1984. 29. P. 312–321. 14. *Льюнг Л.* Идентификация систем. М.: Наука, 1991. 432 с. 15. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977. 224 с. 16. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с. 17. *Toivonen H.T.* Variance constrained self tuning control // *Automatica*. 1980. 19. P. 415–418. 18. *Toivonen H.T.* A self-tuning regulator with on-line cost function adaptation // *Int. J. Syst. Sci.* 1984. 27. P. 1189–1195. 19. *Xi Y.* New design method for discrete-time multi-variable predictive controller // *Int. J. Contr.* 1989. 49. P. 45–56. 20. *Куро Б.* Теория и проектирование цифровых систем управления. М.: Машиностроение, 1986. 448 с.

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. О.Г. Руденко

**Бодянский Евгений Владимирович**, д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры технической кибернетики ХТУРЭ. Научные интересы: адаптивные системы, искусственные нейронные сети. Увлечения: фелинология, японская поэзия. Адрес: 310166, Харьков, пр. Ленина, 14. Тел.: 40–98–90.

E-mail: bodya@kture.kharkov.ua

**Колодяжный Виталий Владимирович**, младший научный сотрудник ПНИЛ АСУ ХТУРЭ. Научные интересы: адаптивные системы управления. Увлечения: программирование для Win32, компьютерная графика, английский язык. Адрес: 310166, Харьков, пр. Ленина, 14. Тел.: 40–98–90

**Котляревский Сергей Владимирович**, канд. техн. наук, доцент кафедры технической кибернетики ХТУРЭ. Научные интересы: адаптивные системы управления. Увлечения: рыбная ловля, футбол. Адрес: 310166, Харьков, пр. Ленина, 14. Тел.: 40–93–37

УДК 519.85

## РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ НА ПЕРЕСТАНОВОЧНОМ МНОГОГРАННИКЕ

ГРЕБЕННИК И.В.

Рассматривается оптимизационная задача с линейной целевой функцией и линейными ограничениями-неравенствами на множестве перестановок. Находится точное решение задачи с одним ограничением на переменные. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

Рассмотрим задачу оптимизации следующего вида:

$$L(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$Cx \leq \bar{d}, \quad (2)$$

$$x \in E_{nk} \subset R^n, \quad C = [c_{ij}]_{m \times n}, \quad \bar{d} \in R^m, \quad (3)$$

где  $E_{nk}$  – множество перестановок из  $n$  элементов  $a_1, a_2, \dots, a_n, a_i \in R, i = 1, \dots, n$ , таких что  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ . При этом  $k$  элементов из  $n$  предполагаются различными.

Известно, что элементы множества  $E_{nk}$  и только они являются вершинами перестановочного многогранника  $P_{nk} = \text{conv } E_{nk}$ , структура и свойства которого подробно исследованы [1].

Подходы к решению задачи (1) – (3), предпринимавшиеся ранее, в основном связаны с реализацией различных схем ветвления и содержат перебор значительного количества вариантов. Ориентируясь на сокращение перебора и на повышение эффективности подходов к решению задачи (1) – (3), рассмотрим решение некоторых ее частных случаев.

**Задача 1.** Пусть задача оптимизации (1) – (3) содержит единственное ограничение – неравенство вида

$$l(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \leq d, \quad (4)$$

где  $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in R^n, d \in R$ .

Найдем минимум функции цели (1) с ограничениями (3), (4).

Как известно [2], безусловный минимум линейной функции  $L(x)$  на множестве  $E_{nk}$  достигается в точке  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in E_{nk}$ , такой что  $\bar{x}_{l_j} = a_j$ . При этом последовательность  $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$  такова, что  $\alpha_{l_1} \geq \alpha_{l_2} \geq \dots \geq \alpha_{l_n}$ . Предположим, что в точке  $\bar{x}$  ограничение (4) активно, т.е.  $l(\bar{x}) > d$ . Вообще, можно выделить три случая взаимного расположения гиперплоскости