Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

Кафедра прикладної математики
(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Застосування теорії ігор для оцінки ядерної зброї
(тема)

Виконав:
здобувач 2 року навчання, групи САУм-24-1
Михайло МАЗНИЧКО
(Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)
Спеціальність
124 Системний аналіз
(код і повна назва спеціальності)
Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма
Системний аналіз і управління
(повна назва освітньої програми)
Керівник доц. Ольга МАТВІЄНКО
(посада, Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

Допускається до захисту

Завідувач кафедри ПМ ____________ (підпис) Максим СИДОРОВ (Власне ім'я, ПРІЗВИЩЕ)

2025 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
Кафедра прикладної математики
Рівень вищої освіти другий (магістерський)
Спеціальність 124 Системний аналіз
(код і повна назва)
Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма Системний аналіз і управління
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Завідувач кафедри ____________
(підпис)
“ 10 ” листопада 2025 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Мазничку Михайлу Володимировичу
(прізвище, ім’я, по батькові)

1. Тема роботи Застосування теорії ігор для оцінки ядерної зброї

затверджена наказом по університету від 10 листопада 2025 р. № 1027 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 18 грудня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель для оцінки ядерної зброї

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі
    1. Системний аналіз предметної області
    2. Вибір і обґрунтування методу розв’язання
    3. Програмна реалізація
    4. Результати обчислювального експерименту
    5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп’ютерних ілюстрацій

1. Актуальність теми роботи
2. Постановка задачі
3. Системний аналіз предметної області
4. Метод чисельного аналізу
5. Результати обчислювального експерименту

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	10 – 16 листопада 2025 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	17 – 23 листопада 2025 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	24 – 30 листопада 2025 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	01 – 07 грудня 2025 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	08 – 17 грудня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	18 грудня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання _10_ листопада 2025 р.

Здобувач ____________________________________
(підпис)

Керівник роботи _________________ доц. Ольга МАТВІЄНКО
(підпис) (посада, Власне ім’я, ПРІЗВИЩЕ)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 83 с., 11 табл., 13 рис., 1 дод., 31 джерело.

МАТРИЧНІ ІГРИ, МОДЕЛЮВАННЯ, ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ, РІВНЯННЯ ЛАНЧЕСТЕРА, СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ, СТРАТЕГІЧНА ВЗАЄМОДІЯ, ТЕОРІЯ ІГОР, ЯДЕРНА ЗБРОЯ.

Об’єкт дослідження – задача оцінки ефективності ядерної зброї.

Мета роботи – дослідження математичної моделі оцінювання ядерної зброї на основі поєднання рівнянь Ланчестера та апарату теорії ігор для визначення оптимальних стратегій сторін.

Методи дослідження – методи системного аналізу, математичного та комп’ютерного моделювання, методи теорії ігор, методи прийняття рішень.

Актуальність дослідження, зумовлена сучасними глобальними викликами у сфері міжнародної безпеки та зростанням ризиків, пов’язаних із можливим застосуванням ядерної зброї. В роботі використовується теорія ігор як математичний інструмент аналізу стратегічної взаємодії сторін у конфліктах із високим рівнем невизначеності.

У роботі проаналізовано теоретичні засади теорії ігор, розглянуто можливості використання рівнянь Ланчестера для опису сценаріїв збройного протистояння та обґрунтовано ефективність їх комбінованого застосування з матричними іграми. Запропоновано підхід до побудови моделі оцінки ядерної зброї, який дозволяє визначати оптимальні стратегії сторін та оцінювати наслідки прийняття стратегічних рішень.

Результати роботи можуть бути використані для аналітичної підтримки процесів прийняття рішень у сфері стратегічної безпеки, а також у наукових дослідженнях з системного аналізу.

ABSTRACT

Introductory note: 83 pages, 11 tables, 13 figures, 1 appendixes, 31 sources.

DECISION MAKING, GAME THEORY, LANCASTER EQUATIONS, MATRIX GAMES, MODELING, NUCLEAR WEAPONS, STRATEGIC INTERACTION, SYSTEM ANALYSIS.

Object of research – the problem of evaluating the effectiveness of nuclear weapons.

Purpose of work – development and substantiation of a mathematical model for nuclear weapons assessment based on the combination of Lancaster equations and game theory methods to determine optimal strategies of the parties.

Methods of research – system analysis methods, mathematical and computer modeling, game theory methods, decision-making methods.

The relevance of the research is determined by contemporary global challenges in the field of international security and the growing risks associated with the possible use of nuclear weapons. Game theory is used in the work as a mathematical tool for analyzing the strategic interaction of parties in conflicts with a high level of uncertainty.

The theoretical foundations of game theory are analyzed in the work, the possibilities of using Lanchester equations to describe scenarios of armed confrontation are considered, and the effectiveness of their combined application with matrix games is substantiated. An approach to constructing a model for evaluating nuclear weapons is proposed, which allows for determining the optimal strategies of the parties and assessing the consequences of strategic decision-making.

The results of the work can be used for analytical support of decision-making processes in the field of strategic security, as well as in scientific research on systems analysis and modeling of complex conflict systems.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Сучасний стан міжнародної безпеки характеризується зростанням рівня стратегічної невизначеності, загостренням міждержавних протиріч та підвищенням ризиків ескалації конфліктів із застосуванням ядерної зброї. Незважаючи на наявність міжнародних договорів у сфері контролю над озброєннями та ядерного стримування, проблема оцінки ефективності ядерної зброї та прогнозування наслідків її застосування залишається недостатньо формалізованою з позицій сучасного математичного апарату[1].

Провідними науковими установами та дослідниками здійснюються спроби аналізу ядерного стримування з використанням імовірнісних моделей, сценарного аналізу та методів теорії конфліктів. Водночас значна частина існуючих підходів має описовий або експертний характер і не забезпечує отримання формалізованих оптимальних стратегій сторін у конфлікті. Світові тенденції досліджень у цій галузі спрямовані на застосування математичного моделювання, методів теорії ігор та системного аналізу для підвищення обґрунтованості рішень у сфері стратегічної безпеки.

Актуальність даної роботи зумовлена необхідністю розроблення формалізованих моделей оцінювання ядерної зброї, які дозволяють аналізувати стратегічну взаємодію сторін, прогнозувати можливі сценарії розвитку подій та визначати оптимальні рішення в умовах конфлікту. Використання апарату теорії ігор у поєднанні з рівняннями Ланчестера відкриває можливість комплексного аналізу динаміки протистояння та ефективності застосування ядерних сил[2].

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є дослідження математичної моделі оцінювання ядерної зброї на основі поєднання рівнянь Ланчестера та апарату теорії ігор для визначення оптимальних стратегій сторін. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задачі оцінки ядерної зброї;

– дослідити теоретичні засади теорії ігор та їх застосування для оцінки загроз і сценаріїв використання ядерної зброї;

– розглянути метод Ланчестера та проаналізувати його ефективність для опису можливих сценаріїв ядерного протистояння;

– програмно реалізувати модель оцінки ядерної зброї;

– провести обчислювальні експерименти та на їх основі зробити висновки.

Об'єктом дослідження є задача оцінки ефективності ядерної зброї.

Предметом дослідження є метод комбінованого використання теорії Ланчестера та теорії ігор для вибору оптимальних стратегій у конфліктах із застосуванням ядерної зброї.

Методи дослідження. У кваліфікаційній роботі використовуються методи системного аналізу, математичного та комп'ютерного моделювання, методи теорії ігор, а також методи прийняття рішень.

Публікації. Результати, отримані у роботі, було представлено на IX Міжнародній науково-технічній конференції «Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем КМОСС–2025» (м. Дніпро, 5 – 7 листопада) [2].

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз задачі застосування теорії ігор в оцінці ядерної зброї

1.1.1 Вербальна модель системи оцінки ядерної зброї

Об’єкт аналізу – «задача оцінки ефективності ядерної зброї».

Предмет аналізу – «метод комбінованого використання рівнянь Ланчестера та теорії ігор для вибору оптимальних стратегій у битвах із застосуванням ядерної зброї».

Точка зору: дослідник (системний аналітик).

Призначення системи: формалізація конфліктної взаємодії сторін із урахуванням «нульової ітерації» (ядерного удару), моделювання подальшого бою за рівняннями Ланчестера, обчислення ігрових виплат (кількість вцілілих/час знищення) та підтримка вибору раціональних/оптимальних стратегій застосування і протидії. Система включає побудову сценаріїв, чисельне моделювання (Python), аналіз чутливості [3] та інтерпретацію результатів для прийняття рішень.

Метою системи є оцінювання результатів протистояння за допомогою моделі Ланчестера з ігровою інтерпретацією виплат, визначення умов стратегічної переваги однієї зі сторін і формування практичних рекомендацій щодо вибору стратегій у ситуаціях із потенційним застосуванням ядерної зброї.

Розглядувану систему можна класифікувати як:

– штучну, адже її створено людиною як інструмент підтримки рішень;

– абстрактну (символічну), оскільки складається з математичних моделей, алгоритмів і припущень;

– механічну (неживу) за природою походження;

– децентралізовану, бо модулі «нульова ітерація», Ланчестер, ігрова постановка та чисельна реалізація працюють узгоджено без жорсткої ієрархії, а зміни параметрів у кожному впливають на результат;

– гетерогенну (різнорідну), оскільки поєднує диференціальні рівняння, ігрові моделі та обчислювальні алгоритми; відсутність будь-якого з компонентів унеможливлює розв'язання;

– нелінійну, адже зв'язки між входами й виходами описуються нелінійними залежностями;

– каузальну, бо поведінка визначається поставленою метою, сценаріями та зовнішніми умовами;

– велику, оскільки охоплює багато параметрів, сценаріїв і методів оцінювання;

– складну, через наявність багатокрокових алгоритмів і численних взаємозалежностей;

– відкриту, оскільки взаємодіє із зовнішнім середовищем (дані, нормативні обмеження, обчислювальні ресурси);

– неієрархічну, тому що аналітичні модулі є рівноправними;

– керовану ззовні, бо параметри та сценарії задає дослідник;

– динамічну, адже склад сценаріїв і значення параметрів можуть змінюватися з часом.

Система моделюється як відкрита, що активно взаємодіє із зовнішнім середовищем. Її функціонування підтримується технічними ресурсами (обчислювальна платформа Python, бібліотеки інтегрування диференціальних рівнянь, оптимізації та візуалізації), інформаційними ресурсами (параметри «основних груп», коефіцієнти виживання після нульової ітерації, припущення щодо вогневої потужності та тактик), регулятивними й етичними обмеженнями (рамки припустимості сценаріїв) та соціально-політичним контекстом (можливі сценарії застосування). Використання цих ресурсів генерує вихід у вигляді оцінок втрат/вцілілих, часу знищення, ігрових виплат і рекомендацій щодо стратегій.

Отримані результати можуть впливати на подальшу постановку сценаріїв і уточнення параметрів, формуючи цикл зворотного зв'язку, що підвищує адаптивність моделі до змін зовнішніх умов (рис. 1.1).

Рисунок 1.1 – Зовнішнє середовище системи

У рамках системного аналізу розглянута система моделюється як «чорна скриня». Фокус зосереджено на елементах зовнішнього середовища, насамперед на входах та виходах системи; внутрішня структура, обмін між підсистемами та обчислювальні процедури залишаються поза увагою дослідника.

На вхід подається простір стратегій сторін: скільки «основних» груп формує наступ, як розподіляється їх чисельність, який тип і кількість ядерних боєприпасів обирає оборона та яку програму прицілювання застосовує. Усередині «скрині» виконується початковий ядерний удар (нульова ітерація) за фіксованими припущеннями: помилки наведення відсутні, вогнева потужність бійців сторін вважається однаковою, початкові чисельності задані. Далі моделюється бій і обчислюються «виплати» для пар стратегій. На основі цих результатів формується та розв’язується ігрова задача з можливістю змішаних стратегій.

Вихід системи – рекомендована оптимальна стратегія (рис. 1.2).

Рисунок 1.2 – Модель типу «чорний ящик»

1.1.2 Функціональна модель системи

У ході свого життєвого циклу кожна система виконує певну низку функцій – дій, які вона робить згідно зі своїм призначенням. Шляхом реалізації функцій система досягає мети свого існування. Для глибинного дослідження функціональних можливостей системи часто будуються графічні моделі, що легко сприймаються за рахунок своєї наочності. Однією з найбільш популярних методологій графічного опису функцій системи є IDEF0. За нею модель системи складається з набору діаграм, де функції зображуються у вигляді прямокутників (робіт), а взаємозв'язки між ними (входи та виходи) – у вигляді дуг.

Ієрархічні зв'язки між блоками моделі показуються за допомогою нумерації відповідно до їх рівня. Першою завжди будується діаграма рівня A-0, яка називається контекстною. Вона відображає функцію цілі системи та ресурси, що забезпечують її реалізацію. Стрілки входу розташовуються зліва та показують об'єкти, що перетворюються системою у ході виконання її цільової функції. Результати діяльності системи утворюють її виходи, які зображуються з правої сторони роботи. Стрілки, направлені зверху до блоку, позначають засоби контролю, наприклад, стандарти, закони чи інструкції, що строго регламентують функціонування системи. До нижньої межі спрямовані стрілки механізмів – людських, технічних та інших ресурсів, використаних для виконання цільової функції.

На рисунку 1.3 представлено контекстну діаграму для задачі оцінки ядерної зброї за допомогою теорії ігор.

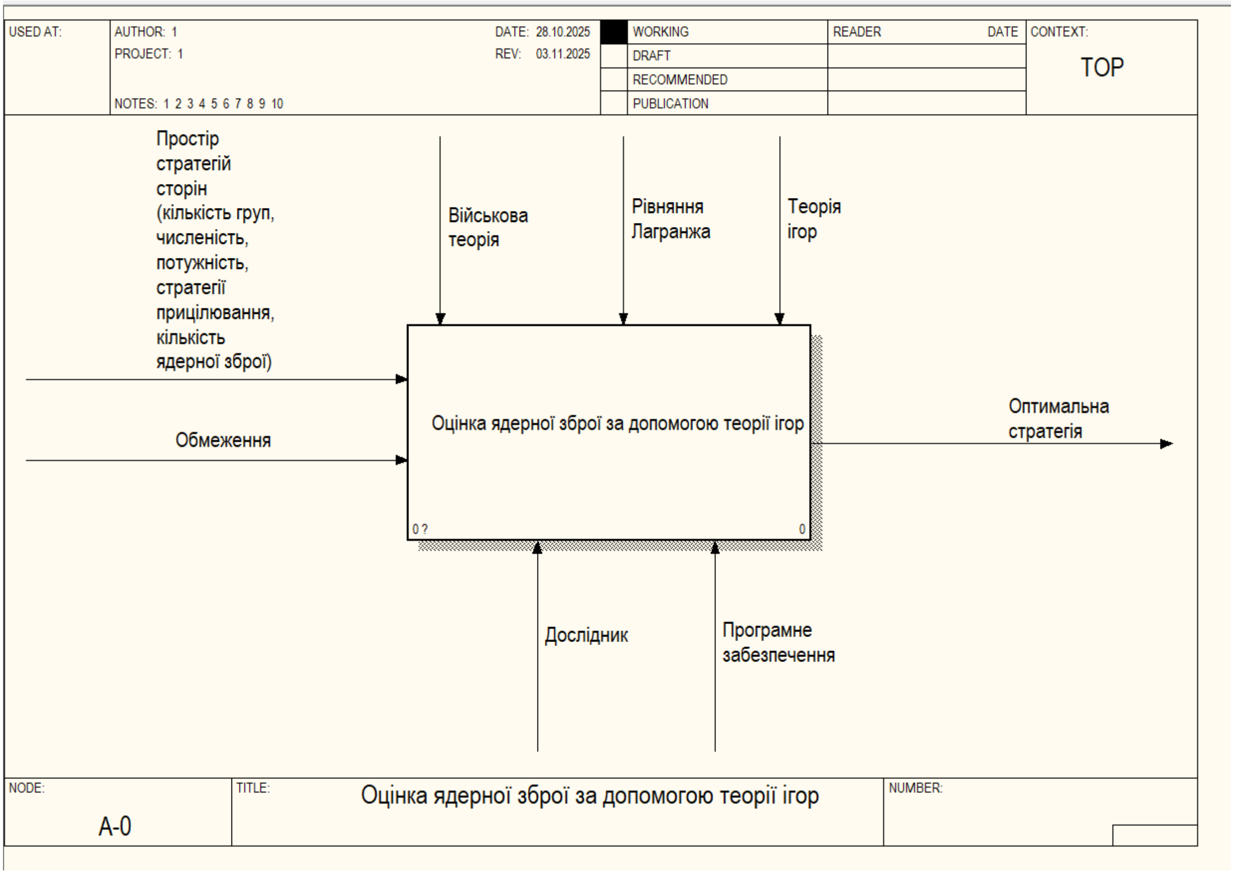

Рисунок 1.3 – Контекстна діаграма рівня А-0

У розглядуваній системі вхідними даними є простір стратегій сторін, що включає кількість груп, чисельність, потужність, стратегії прицілювання та кількість ядерної зброї, а також визначені обмеження. Для формування вихідних результатів система використовує військову теорію, рівняння Лагранжа та методи теорії ігор. У результаті реалізації функцій системи відбувається перетворення початкових даних у вихід – оптимальну стратегію застосування або оцінювання ядерного потенціалу, визначену за критеріями рівноваги та оптимальності.

Для встановлення основних функцій системи виконується декомпозиція контекстної діаграми. Деталізація діаграми рівня А-0 дає змогу розглянути ключові процеси, що забезпечують оцінку ядерної зброї засобами теорії ігор, та отримати цілісне уявлення про роботу системи.

Декомпозуємо основний блок «Застосування теорії ігор для оцінки ядерної зброї» (рис. 1.4).

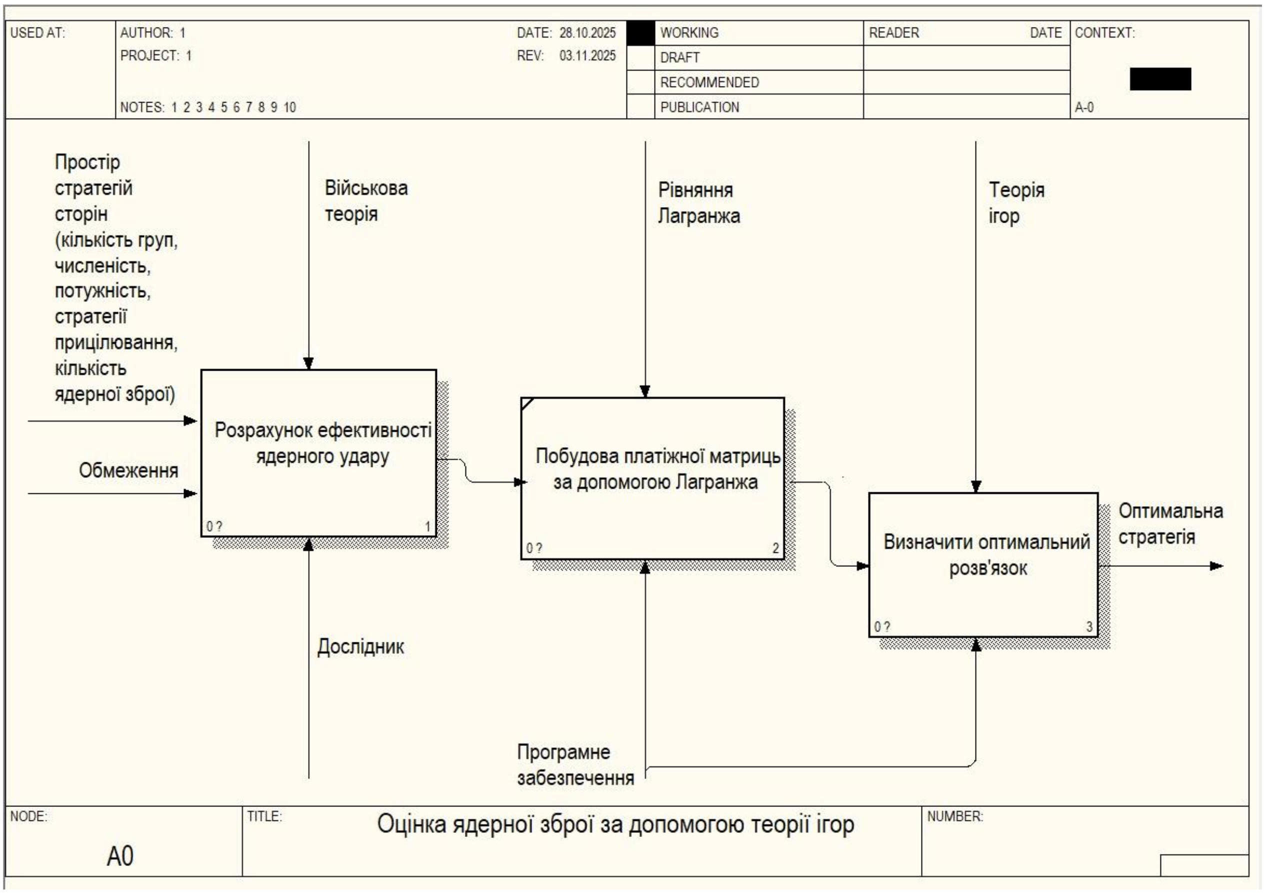

Рисунок 1.4 – Контекстна діаграма рівня А-0

Побудуємо діаграму рівня А1 (рис. 1.5).

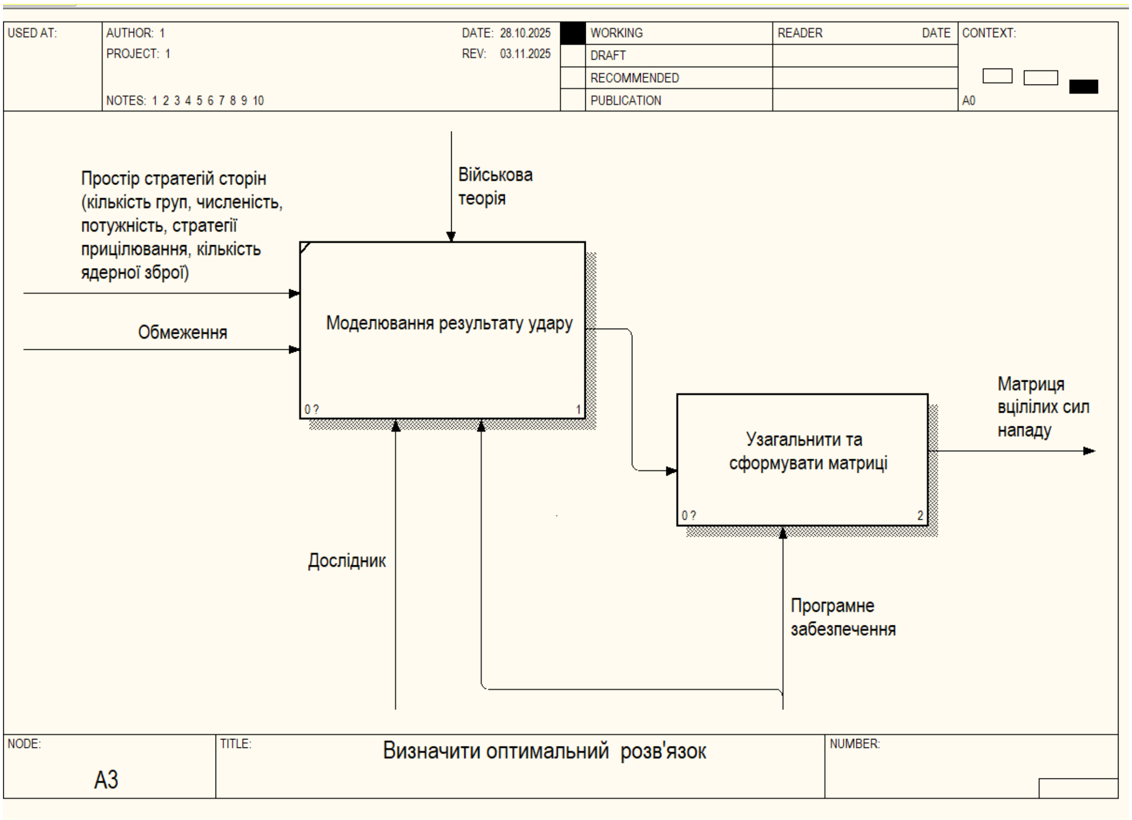

Рисунок 1.5 – Діаграма рівня А1 для функції «Застосування теорії ігор для оцінки ядерної зброї»

1.1.3 Інформаційна модель системи

Під час функціонування розглядуваної системи всередині неї відбувається обмін великою кількістю інформації. Змоделюємо його графічно, побудувавши DFD-діаграми. Для зображення процесів, джерел, сховищ інформації використовують геометричні фігури: прямокутники або круги (залежно від застосованої нотації), а потоки даних між зазначеними об’єктами у системі подаються у вигляді стрілок.

DFD-діаграми складаються з елементів 4 типів. Головним елементом будь-якої інформаційної моделі є процес. Він позначає певну дію у системі, яка перетворює інформацію, формуючи нові дані на виході. Джерела та приймачі інформації, що передається у системі, називаються зовнішніми сутностями. Вони подаються прямокутниками. Під час діяльності системи вхідні та вихідні дані накопичуються, і часто вони потребують збереження на окремих носіях – сховищах даних. На діаграмі потоків даних ці елементи мають вигляд прямокутників, розділених на 2 частини вертикальною лінією. Дані, які передаються між процесами, зовнішніми сутностями та сховищами, формують інформаційні потоки системи. У будь-якій нотації DFD-діаграми їх подають стрілками. Побудуємо DFD-діаграму розглядуваної системи за методом Гейна-Сарсона (рис. 1.6).

Розглянемо детальніше створену діаграму потоків даних. Її центральним елементом є процес – розрахунок ефективності ядерного удару з використанням методів теорії ігор. Згідно з методологією DFD будь-який процес потребує вхідних потоків інформації, які він трансформує та генерує виходи. За рисунком 1.6 бачимо, що вхідними даними виступають вхідні параметри та обмеження, які формує дослідник. Ці параметри визначають кількісні та якісні характеристики сторін, умови сценарію, наявні ресурси та допустимі межі застосування ядерної зброї.

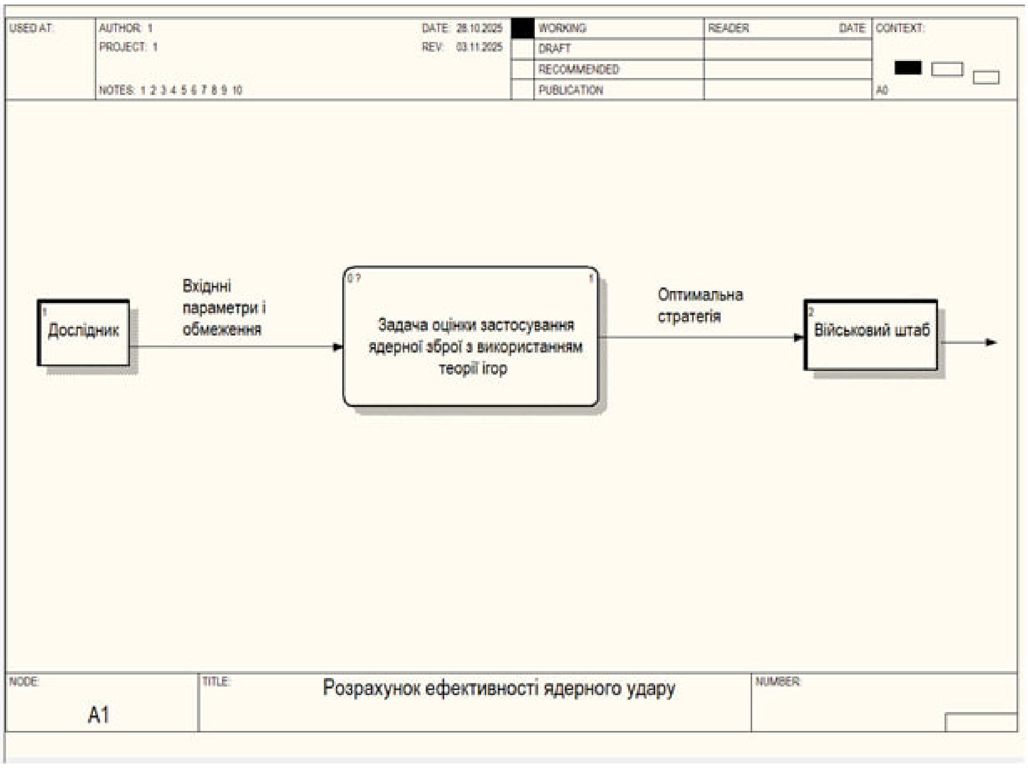

Рисунок 1.6 – DFD-діаграма системи «Задача оцінки ядерної зброї за допомогою теорії ігор»

Усередині процесу здійснюється оцінка ефективності ядерної зброї на основі теорії ігор, що передбачає моделювання стратегічної взаємодії між сторонами конфлікту з урахуванням заданих обмежень. Розрахунки виконуються із застосуванням математичних алгоритмів та відповідного програмного забезпечення.

У результаті роботи процесу формується вихідний потік інформації – оптимальна стратегія, що містить рекомендації щодо найефективнішого застосування сил і засобів. Отримані в ході моделювання дані стають фундаментом для подальшої роботи професійних військових аналітиків. Вони в офіційному порядку передаються до відповідного військового штабу, де проходять етап додаткової верифікації та всебічного критичного розгляду. Такий підхід дозволяє трансформувати теоретичні розрахунки у практичну площину, забезпечуючи командування надійною базою для прийняття стратегічних рішень, мінімізації ризиків та досягнення максимальної переваги над супротивником.

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі оцінки застосування ядерної зброї

На сьогоднішній день застосування математичного апарату теорії ігор відкриває надзвичайно широкі горизонти для розв’язання різного спектру прикладних задач. Особливого значення вона набуває у таких критично важливих сферах, як сучасна військова аналітика, стратегічне оборонне планування, а також комплексне оцінювання ефектів, що виникають внаслідок безпосереднього застосування різних видів озброєнь.

Завдяки високому рівню універсальності та гнучкості цього наукового підходу, протягом тривалого часу було розроблено та впроваджено численну кількість різноманітних алгоритмів, призначених спеціально для пошуку оптимальних розв’язків. Кожен із таких алгоритмів має свої особливості та логіку функціонування.

Водночас процес вибору найбільш придатного та ефективного методу серед усієї наявної сукупності інструментів часто перетворюється на досить складну та багатогранну проблему для дослідника. Це зумовлено тим, що успішність застосування того чи іншого підходу безпосередньо залежить від цілої низки специфічних умов конкретної моделі. Далі детальніше розглянемо три методи, що спираються на різні принципи отримання оптимальних змішаних стратегій: метод Лагранжа, метод Крамера та метод оберненої матриці.

Ідея методу Лагранжа полягає у зведенні задачі пошуку оптимальних змішаних стратегій до оптимізаційної задачі з обмеженнями: максимізація (для наступаючої сторони) мінімального гарантованого. Складається лагранжіан, виводяться необхідні та достатні умови Каруша-Куна-Таккера (ККТ), що описують підтримку активних обмежень і дозволяють знайти ціну гри та ймовірності. Популярність цього методу пояснюється його загальністю (придатний для), можливістю перевіряти комплементарність і працювати з нерівностями без попереднього фіксування підтримки стратегій. Водночас потреба у коректній постановці та перевірках ККТ підвищує формальну складність реалізації; чисельна складність зазвичай середня і добре масштабується, зокрема через еквівалент до задач лінійного програмування.

Метод Крамера базується на розв’язанні системи лінійних рівнянь для активної підматриці платіжної матриці гри. Згідно з теоремою про активні стратегії, за відсутності сідлової точки та свідомо невигідних стратегій оптимальні ймовірності визначаються з рівнянь рівноваги для підматриці, елементи якої беруть участь у рішенні. Для малих розмірів (передусім 2×2 і інколи 3×3) правило Крамера дозволяє отримати формули для стратегій та ціни гри. Переваги: висока швидкість ручних обчислень і наочність. Недоліки: різка втрата чисельної стійкості у випадку близьких рядків/стовпців (малі визначники) та практична непридатність для більших розмірів через обчислювальну складність визначників.

Метод оберненої матриці також застосовується до задач із квадратною і невиродженою матрицею. Система умов рівноваги [4] записується у векторно-матричній формі, після чого оптимальні ймовірності виражаються через B^{-1} (де

B – активна підматриця), а ціна гри – через відповідні нормувальні співвідношення. Переваги методу: простота алгебраїчних кроків і прозорість логіки розв’язання. Недоліки: необхідність попередньої редукції до активної підматриці та чутливість до погано обумовлених задач.

Оберемо метод найбільш придатний для розв’язання поставленої задачі за допомогою методу аналізу ієрархій (МАІ) Сааті. Визначаємо критерії порівняння методів:

– критерій 1 (К1): застосовність і умови коректності (вимоги до активних $m \times n$ стратегій, відсутності сідлової точки);

– критерій 2 (К2): рівень обчислювальної складності;

– критерій 3 (К3): числова стійкість до збурень у матриці платежів;

– критерій 4 (К4): складність математичної концепції та реалізації.

Обираємо метод розв’язання серед наступних альтернатив:

– альтернатива 1 (А1): метод Лагранжа (ККТ);

– альтернатива 2 (А2): метод Крамера;

– альтернатива 3 (А3): метод оберненої матриці.

На рисунку 1.7 наведемо ієрархічну структуру проблеми вибору.

Спочатку складаємо матрицю попарних порівнянь важливості критеріїв. Знаємо, що:

– застосовність і умови коректності (К1) слабко чи істотно важливіша за рівень обчислювальної складності (К2), однаково чи слабко важливіша, ніж числова стійкість до збурень у матриці платежів (К3), та очевидно важливіша, ніж складність математичної концепції та реалізації (К4);

– рівень обчислювальної складності (К2) істотно важливіший, ніж складність математичної концепції та реалізації (К4);

– числова стійкість до збурень у матриці платежів (К3) істотно важливіша, ніж рівень обчислювальної складності (К2), та істотно чи очевидно важливіша, ніж складність математичної концепції та реалізації (К4).

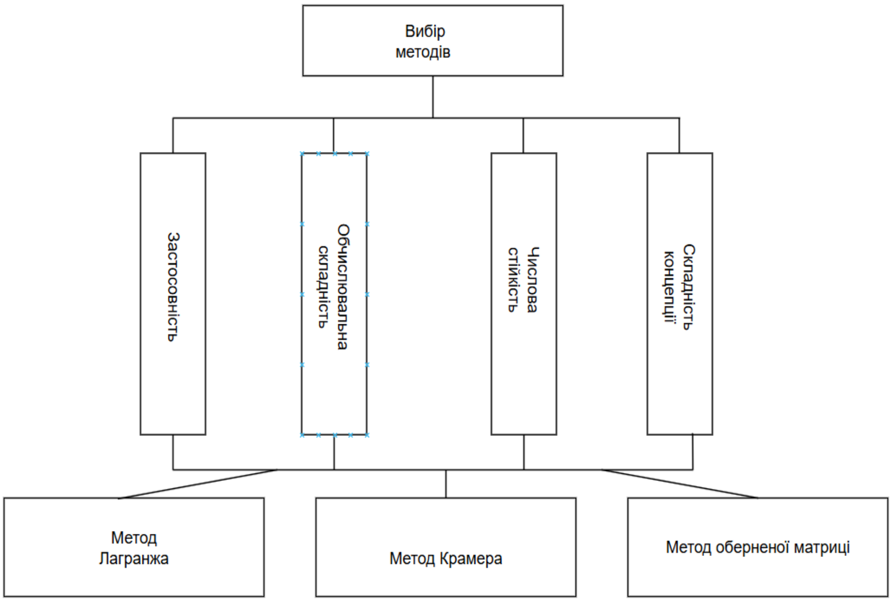

Рисунок 1.7 – Ієрархічна структура проблеми вибору методів для розв’язання задачі

Перейдемо від якісного попарного порівняння критеріїв до еквівалентного йому чисельного за шкалою Сааті. Отриману матрицю попарних порівнянь наведено у табл. 1.1.

Таблиця 1.1 – Матриця попарних порівнянь критеріїв

	К1	К2	К3	К4
К1	1	5	2	7
К2	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	5
К3	$\frac{1}{2}$	5	1	7
К4	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	1

Розраховуємо компоненти вектора локальних пріоритетів критеріїв (табл. 1.2).

Таблиця 1.2 – Розрахунок вектора локальних пріоритетів критеріїв

	К1	К2	К3	К4	Середнє геометричне по рядках	Вектор локальних пріоритетів
К1	1	5	2	7	$x_1 = \sqrt[4]{1 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7} = 2{,}8926$	$p_1^K = \frac{x_1}{\sum_{i=1}^{4} x_i} = 0{,}494$
К2	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	5	$x_2 = \sqrt[4]{\frac{1}{5} \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} \cdot 5} = 0{,}6679$	$p_2^K = \frac{x_2}{\sum_{i=1}^{4} x_i} = 0{,}114$
К3	$\frac{1}{2}$	5	1	7	$x_3 = \sqrt[4]{\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 \cdot 7} = 2{,}0470$	$p_3^K = \frac{x_3}{\sum_{i=1}^{4} x_i} = 0{,}349$
К4	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	1	$x_4 = \sqrt[4]{\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdot 1} = 0{,}2526$	$p_4^K = \frac{x_4}{\sum_{i=1}^{4} x_i} = 0{,}043$
					$\sum_{i=1}^{4} x_i = 5{,}8601$	$\sum_{i=1}^{4} p_i^K = 1{,}000$

Для того, щоб знайти індекс узгодженості CI^K, обчислюємо суми елементів матриці за стовпцями табл. 1.2 та її найбільше власне значення $\lambda_{\max}^K$:

$$y_1 = 1{,}8429,\ y_2 = 11{,}2000,$$

$$y_3 = 3{,}3429,\ y_4 = 20{,}0000,$$

$$\lambda_{\max}^K \approx \sum_{i=1}^{4} y_i p_i^k = 4{,}216.$$

Оскільки матриця попарних порівнянь критеріїв має розмірність 4×4, то випадковий індекс $RI^K = 0{,}90$, тож індекс узгодженості CI^K та відношення узгодженості CR^K дорівнюють:

$$CI^K = 0,072 \,,\; CR^K = 0,080 \,.$$

Величина $CR^K < 0,2$, тож можна вважати, що матрицю парних порівнянь критеріїв побудовано вірно. Вектор локальних пріоритетів критеріїв відносно проблеми вибору має наступний вигляд:

$$\vec{p}^K = \begin{pmatrix} 0,494 \\ 0,114 \\ 0,349 \\ 0,043 \end{pmatrix}.$$

Далі складаємо матриці попарних порівнянь альтернатив – методів кластеризації для розв’язання задачі – за кожним критерієм (табл. 1.3 – 1.6).

Таблиця 1.3 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за критерієм К1

	A1	A2	A3	Середнє геометричне за рядками	Вектор локальних пріоритетів
A1	1	4	3	$x_1 = \sqrt[3]{1 \cdot 4 \cdot 3} = 2,289$	$p_1^A = \frac{x_1}{\sum_{i=1}^{3} x_i} = 0,614$
A2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{3}$	$x_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}} = 0,439$	$p_2^A = \frac{x_2}{\sum_{i=1}^{3} x_i} = 0,118$
A3	$\frac{1}{3}$	3	1	$x_3 = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 1} = 1,000$	$p_3^A = \frac{x_3}{\sum_{i=1}^{3} x_i} = 0,268$
				$\sum_{i=1}^{3} x_i = 3,66301$	$\sum_{i=1}^{3} p_i^A = 1,000$

Таблиця 1.4 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за критерієм К2 та розрахунок вектору локальних пріоритетів

	А1	А2	А3	Середнє геометричне за рядками	Вектор локальних пріоритетів
А1	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$	$x_1 = 0,292$	$p_1^A = \frac{x_1}{\sum_{i=1}^{3} x_i} = 0,070$
А2	8	1	2	$x_2 = 2,520$	$p_2^A = \frac{x_2}{\sum_{i=1}^{3} x_i} = 0,604$
А3	5	$\frac{1}{2}$	1	$x_3 = 1,357$	$p_3^A = \frac{x_3}{\sum_{i=1}^{3} x_i} = 0,325$
				$\sum_{i=1}^{3} x_i = 4,169$	$\sum_{i=1}^{3} p_i^A = 1,000$

Обчислюємо суми елементів матриці за стовпцями табл. 1.3 та її найбільше власне значення $\lambda_{\max K1}^{A}$:

$$y_1 = 1,583,\ y_2 = 8,000,\ y_3 = 4,333,$$

$$\lambda_{\max K1}^{A} \approx \sum_{i=1}^{3} y_i p_i^A = 3,078.$$

Матриця попарних порівнянь [5] альтернатив за критерієм К1 має розмірність 3×3, отже, випадковий індекс має величину $RI^A = 0,58$. Маємо, що індекс узгодженості CI_{K1}^{A} та відношення узгодженості CR_{K1}^{A} дорівнюють:

$$CI_{K1}^{A} = \frac{\lambda_{\max K1}^{A} - m}{m-1} = 0{,}039,$$

$$CR_{K1}^{A} = \frac{CI_{K1}^{A}}{RI^{A}} = 0{,}067.$$

Отримана величина $CR_{K1}^{A} < 0{,}2$, отже думки дослідника гарно узгоджені.

Таблиця 1.5 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за критерієм К3 та розрахунок вектору локальних пріоритетів

	А1	А2	А3	Середнє геометричне за рядками	Вектор локальних пріоритетів
А1	1	7	3	$x_1 = \sqrt[3]{1 \cdot 7 \cdot 3} = 2{,}759$	$p_1^A = \frac{x_1}{\sum_{i=1}^{3} x_i} = 0{,}659$
А2	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{1}{4}$	$x_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{7} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}} = 0{,}329$	$p_2^A = \frac{x_2}{\sum_{i=1}^{3} x_i} = 0{,}079$
А3	$\frac{1}{3}$	4	1	$x_3 = \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 1} = 1{,}100$	$p_3^A = \frac{x_3}{\sum_{i=1}^{3} x_i} = 0{,}262$
				$\sum_{i=1}^{3} x_i = 4{,}188$	$\sum_{i=1}^{3} p_i^A = 1{,}000$

Обчислюємо суми елементів матриці за стовпцями табл. 1.4 та її найбільше власне значення $\lambda_{\max K2}^{A}$:

$$y_1 = 14{,}000,\ y_2 = 1{,}625,\ y_3 = 3{,}200,$$

$$\lambda^A_{\max K2} \approx \sum_{i=1}^{3} y_i p_i^A = 3{,}002.$$

Матриця попарних порівнянь альтернатив за критерієм К2 має розмірність 3×3, тому беремо випадковий індекс $RI^A = 0{,}58$ та отримуємо наступні величини індексу узгодженості CI^A_{K2} та відношення узгодженості CR^A_{K2}:

$$CI^A_{K2} = \frac{\lambda^A_{\max K2} - m}{m-1} = 0{,}001,$$

$$CR^A_{K2} = \frac{CI^A_{K2}}{RI^A} = 0{,}002.$$

Отримана величина $CR^A_{K2} < 0{,}2$, отже думки дослідника гарно узгоджені.

Таблиця 1.6 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за критерієм К4 та розрахунок вектору локальних пріоритетів

	A1	A2	A3	Середнє геометричне за рядками	Вектор локальних пріоритетів
A1	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$x_1 = 0{,}321$	$p_1^A = \frac{x_1}{\sum_{i=1}^{3} x_i} = 0{,}083$
A2	6	1	1	$x_2 = 1{,}817$	$p_2^A = \frac{x_2}{\sum_{i=1}^{3} x_i} = 0{,}472$
A3	5	1	1	$x_3 = 1{,}710$	$p_3^A = \frac{x_3}{\sum_{i=1}^{3} x_i} = 0{,}445$
				$\sum_{i=1}^{3} x_i = 3{,}848$	$\sum_{i=1}^{3} p_i^A = 1{,}000$

Порахуємо суми елементів матриці за стовпцями табл. 1.5 та її найбільше власне значення $\lambda^A_{\max K3}$:

$$y_1 = 1,476,\ y_2 = 12,000,\ y_3 = 4,250,$$

$$\lambda^A_{\max K3} \approx \sum_{i=1}^{3} y_i p_i^A = 3,035.$$

Матриця попарних порівнянь альтернатив за критерієм К3 має розмірність 3×3, тож беремо випадковий індекс $RI^A = 0,58$, і індекс узгодженості CI^A_{K3} та відношення узгодженості CR^A_{K3} дорівнюють

$$CI^A_{K3} = \frac{\lambda^A_{\max K3} - m}{m-1} = 0,018,$$

$$CR^A_{K3} = \frac{CI^A_{K3}}{RI^A} = 0,031.$$

Отримана величина $CR^A_{K3} < 0,2$, отже думки дослідника гарно узгоджені.

Порахуємо суми елементів матриці за стовпцями табл. 1.6 та її найбільше власне значення $\lambda^A_{\max K4}$:

$$y_1 = 12,000,\ y_2 = 2,167,\ y_3 = 2,200,$$

$$\lambda^A_{\max K4} \approx \sum_{i=1}^{3} y_i p_i^A = 3,001.$$

Оскільки матриця попарних порівнянь альтернатив за критерієм К4 має розмірність 3×3, то випадковий індекс $RI^A = 0,58$. Отже, отримаємо наступні індекс узгодженості CI^A_{K4} і відношення узгодженості CR^A_{K4}:

$$CI_{K4}^{A}=\frac{\lambda_{\max K4}^{A}-m}{m-1}=0,001,$$

$$CR_{K4}^{A}=\frac{CI_{K4}^{A}}{RI^{A}}=0,002\,.$$

Отримана величина $CR_{K4}^{A}<0,2$, отже думки дослідника гарно узгоджені.

Тепер будуємо матрицю, стовпцями якої є обчислені вектори локальних пріоритетів [6] альтернатив за кожним критерієм, а також визначаємо вектор глобальних пріоритетів:

$$P^{A}=\begin{pmatrix}0,614 & 0,070 & 0,659 & 0,083\\ 0,118 & 0,604 & 0,079 & 0,472\\ 0,268 & 0,325 & 0,262 & 0,445\end{pmatrix},$$

$$\vec{p}=P^{A}\cdot\vec{p}^{K}=\begin{pmatrix}0,545\\ 0,175\\ 0,280\end{pmatrix}.$$

Індекс та відношення узгодженості для всієї ієрархії дорівнює:

$$CI=CI^{K}+(\vec{p}^{K},CI^{A})=0,103,$$

$$RI=RI^{K}+RI^{A}=1,48,$$

$$CR=\frac{CI}{RI}=0,070\,.$$

Величина $CR<0,2$, отже думки дослідника добре узгоджені.

Засновуючись на компонентах отриманого вектора глобальних пріоритетів, обираємо для розв’язання задачі оцінки застосування ядерної зброї першу альтернативу – метод Лагранжа.

1.3 Формальна та змістовна постановка задачі

Припустимо, кожен боєць має певну вогневу потужність, причому ця потужність не залежить від чисельності групи. Для обох сторін – і для оборонної, і для наступальної – існує деяка «основна» (штатна) група, чисельність якої є тактично найбільш оптимальною. Тому чисельність підрозділів, що включені до певних бойових порядків, можна вимірювати числом таких основних груп; вона є функцією загальної чисельності сил і розміру основної групи. Відповідно, можна задати величини втрат, яких зазнає кожна така основна група в результаті застосування ядерної зброї. Нехай у сторони нападника було n основних груп. Після того як оборонна сторона застосувала ядерну зброю, у кожній атакуючій групі A_i залишилося по n_i бійців, і кожен із них має вогневу силу K. Аналогічно, припустимо, що оборонна сторона складається із m основних груп, і після застосування атакуючою стороною ядерної зброї в кожній оборонній групі залишилося по m_i бійців, кожен з яких володіє вогневою силою L. Після цього залишені групи сторін A_i і D_i вступають у бій між собою. Очікувана кількість знищених бійців, як функція часу, зазвичай підпорядковується законам знищення Ланчестера, тобто якщо група A_i протистоїть групі D_i і якщо очікуване число вцілівших бійців в будь-який момент часу t дорівнює y (для сторони нападника) і x (для сторони оборони), то

$$\frac{dy}{dt} = -Lx,\ \frac{dx}{dt} = -Ky$$

при початкових умовах

$$y(0) = m_i,\ x(0) = n_i.$$

Беручи до уваги час, протягом якого групи ведуть бої, перегруповуються і т. д., багато разів повторюючи застосування цього закону, можна визначити переможця, або, точніше, можна визначити очікувану кількість бійців, що вижили в кожної зі сторін, як функцію часу. Якщо під «часом знищення» розуміти час, протягом якого одна зі сторін повністю втрачає свої війська, то в якості виплати (платежу) можна прийняти число бійців, що вижили у нападаючої сторони, або число бійців, що вижили у оборонної сторони, після настання цього часу знищення.

Обчислення, пов’язані з використанням цього загального підходу, надзвичайно складні. Тому ми припускаємо, що кількість бійців, що вижили безпосередньо після бою між двома групами, визначається розв’язком рівнянь Ланчестера для часу знищення. Крім того, передбачається, що помилки в точності при застосуванні бомб відсутні, а відношення K / L – коефіцієнтів вогневої потужності нападаючої й оборонної сторін дорівнює одиниці.

1.4 Постановка задач дослідження

За результатами здійсненого системного аналізу проблеми оцінювання впливу ядерної зброї на боєздатність військових підрозділів прийнято рішення про формалізацію цієї задачі у вигляді математичної моделі на основі рівнянь Ланчестера з урахуванням «нульової ітерації», що відображає наслідки початкового ядерного удару. Такий підхід забезпечує відтворення динаміки змін чисельності сил у часі та створює основу для застосування методів системного аналізу при оцінюванні стратегічних результатів протистояння.

Отже, метою кваліфікаційної роботи є дослідження математичної моделі оцінювання ядерної зброї на основі поєднання рівнянь Ланчестера та апарату теорії ігор для визначення оптимальних стратегій сторін. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задачі оцінки ядерної зброї;

– дослідити теоретичні засади теорії ігор та їх застосування для оцінки загроз і сценаріїв використання ядерної зброї;

– розглянути метод Ланчестера та проаналізувати його ефективність для опису можливих сценаріїв ядерного протистояння;

– програмно реалізувати модель оцінки ядерної зброї;

– провести обчислювальні експеременти та на їх основі зробити висновки.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ІГОР ДЛЯ ОЦІНКИ ЯДЕРНОЇ ЗБРОЇ

2.1 Матричні ігрові задачі

2.1.1 Загальний огляд матричних ігрових задач

Найбільшого практичного значення набули парні ігри, тому основну увагу в подальшому буде приділено саме розгляду цього класу ігор.

Розвиток гри в часі можна уявити як послідовність окремих ходів. У теорії ігор хід – це вибір однієї з дій, передбачених правилами гри, та її здійснення. Ходи поділяються на особисті та випадкові. Особистим ходом називають свідомий вибір гравцем одного з можливих варіантів дій та його виконання [7].

Випадковим ходом називається вибір однієї з можливих альтернатив, який здійснює деяке незацікавлене середовище – умовно його називають природою. Для кожного випадкового ходу правила гри визначають розподіл імовірностей можливих результатів.

Завданням теорії ігор є розроблення рекомендацій для гравців щодо вибору певних стратегій у процесі здійснення особистих ходів.

Стратегія гравця – це сукупність правил або принципів, які визначають вибір варіанта дій на кожному етапі гри, залежно від ситуації, що склалася під час її перебігу [8].

Метою теорії ігор є визначення оптимальної стратегії для кожного гравця.

Оптимальна стратегія – це така стратегія, яка при багаторазовому повторенні гри забезпечує гравцеві максимально можливий середній виграш, виходячи з припущення, що суперник, у свою чергу, намагається звести цей виграш до мінімуму. Тобто кожен учасник діє раціонально, прагнучи досягти найкращого результату для себе за умови протидії іншого.

Під час постановки ігрової задачі необхідно визначити такі основні елементи:

– сторони приймаючі рішення;

– множина всіх можливих дій;

– виграші сторін для кожної ситуації.

У тому випадку, коли цілі двох конкуруючих сторін є прямо протилежними, для них можна визначити єдиний критерій: одна зі сторін буде зацікавлена у збільшенні значення цього критерію, а інша в його зменшенні.

Розглянемо гру двох гравців, скажімо A і B, кожен з яких має кінцеву кількість стратегій. Припустимо, гравець A має m стратегій: $A_1, A_2, ..., A_m$, а гравець B – n стратегій: $B_1, B_2, ..., B_n$. Кожній парі стратегій (A_i, B_j) ставиться у відповідність число a_{ij}, що виражає виграш гравця A за рахунок гравця B (якщо $a_{ij} > 0$) або програш гравця A гравцю B (якщо $a_{ij} < 0$), коли A застосовує свою стратегію A_i, а B – стратегію B_j.

У разі єдиного критерію дана гра [9] може бути повністю описана матрицею розмірності $m \times n$, яка називається матрицею гри або платіжною матрицею (звідси походить і назва цього класу ігор – матричні ігри):

$$A = \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \cdots B_n & \\ \left(\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{matrix}\right. & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{matrix} & \left.\begin{matrix} \cdots a_{1n} \\ \cdots a_{2n} \\ \cdots \\ \cdots a_{mn} \end{matrix}\right) & \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_m \end{matrix} \end{array}.$$

Нехай матриця гри має вигляд $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ -10 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Сторона A має дві стратегії, а сторона B – три стратегії. Якщо гравець A застосовує свою стратегію A_2, а B – стратегію B_3, то відповідно, гравець A виграє 1 умовну одиницю (у.о.), а гравець B 1 у.о. програє гравцеві A. Якщо гравець A застосовує свою стратегію A_1, а B стратегію B_2, то гравець A програє 6 у.о. гравцю B, а гравець B виграє 6 у.о. у гравця A. У цій грі один гравець виграє рівно стільки, скільки програє інший, тобто сума виграшів гравців дорівнює нулю. Тому ігри цього класу називають іграми з нульовою сумою.

Ціною гри називається середній виграш гравця A.

2.1.2 Вирішення ігрових завдань у «чистих» стратегіях

У деяких випадках рівноважна ситуація може бути визначена безпосередньо. У матричних іграх ситуація є рівноважною, якщо для $\forall i \in [1, m]$ і для $\forall j \in [1, n]$ виконується співвідношення:

$$a_{ij^*} \le a_{i^* j^*} \le a_{i^* j},$$

де i^*, j^* – збалансована ситуація.

Насамперед, це стосується випадку, коли в результаті застосування відносин домінування до матриці гри залишається єдиний елемент. Номери рядка і стовпця, де цей елемент знаходиться, і визначає рівноважну ситуацію чи рішення в «чистих» стратегіях, тобто чітко вказують, які стратегії мають застосовувати обидві сторони.

Визначення сідлових точок здійснюється за такою схемою:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1^{\min} \\ a_2^{\min} \\ \cdots \\ a_m^{\min} \end{matrix} \Rightarrow \max_i \min_j a_{ij} = \beta.$$

$$\begin{matrix} a_1^{\max} & a_2^{\max} & \cdots & a_n^{\max} \end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = \beta.$$

Поставимо завдання: визначити найкращу зі стратегій сторони A за умови, що противник (сторона B) діятиме найгіршим для неї чином.

Елементи *i*-го рядка матриці A є виграшами сторони A при застосуванні нею своєї стратегії A_i. Сторона A вважає, що у відповідь на будь-яку її стратегію A_i, сторона B відповість тією стратегією, яка найменш вигідна для A, тобто дає A найменший виграш. Тому в кожному рядку знаходимо мінімальний елемент:

$$a = \max_i \min_j a_{ij},$$

і заносимо його в додатковий стовпець праворуч від матриці A.

Вибираючи якусь стратегію A_i, ми маємо розраховувати те що, що результаті розумних дій противника ми виграємо лише $a_i^{\min}$.

Звідси, сторона A повинна віддати перевагу іншій стратегії, при якій вона отримує найбільший виграш з набору гарантованих мінімумів. Позначимо це значення через α:

$$\alpha = \max_i a_i^{\min} = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Величина α називається нижньою ціною гри або максимальним виграшем, або максиміном.

Та стратегія гравця A, яка відповідає максиміну, називається максимінною стратегією. Якщо гравець A буде дотримуватися максимінної стратегії, то йому за будь-якої поведінки супротивника гарантований виграш, не менший α. Тому α – нижня ціна гри.

Розглянемо тепер гру з позицій сторони і виберемо для неї оптимальну стратегію.

Елементи *j*-го стовпця матриці A є програшами сторони при застосуванні нею своєї стратегії B_j. Сторона B вважає, що у відповідь на будь-яку її стратегію, сторона A відповість тією стратегією, яка найменш вигідна для B, тобто дає B найбільший програш [10]. Тому в кожному стовпці знаходимо максимальний елемент A B:

$$a_j^{\max} = \max_i a_{ij}$$

і заносимо його додатковий рядок знизу від матриці A.

Вибираючи стратегію B_j, сторона повинна розраховувати те що, що результаті будь-яких дій противника (сторони) вона програє трохи більше, ніж $a_j^{\max}$. Ну а далі, на користь сторони B серед інших вибрати ту стратегію, за якої вона отримує найменший програш із набору очікуваних максимумів. Позначимо це значення через β:

$$\beta = \min_j a_j^{\max} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Величина β у верхню ціну гри або мінімаксний виграш, або мінімакс. Відповідна β стратегія сторони B – її мінімаксна стратегія. Якщо B буде дотримуватися своєї найбільш обережної мінімаксної стратегії, то при будь-якій поведінці сторони A стороні B гарантований програш, що не перевищує верхньої ціни гри β.

Принцип обережності, що диктує гравцям вибір відповідних стратегій (максимінної і мінімаксної), називається принципом мінімаксу. Він випливає з припущення про розумність кожного гравця, що прагне досягти мети, протилежної мети противника. Часто максимінну та мінімаксну стратегії позначають загальним терміном «мінімаксні стратегії».

Нижня ціна гри α та її верхня ціна β завжди пов'язані між собою нерівністю:

$$\alpha \le \beta.$$

2.1.3 Змішані стратегії

У тих випадках, коли рівноважна ситуація не може бути знайдена за допомогою виключення домінуючих рядків і домінуючих стовпців і не виконується умова існування сідлової точки, ситуація рівноваги в чистих стратегіях відсутня. У цьому випадку кожна зі сторін може використовувати свої стратегії з певною ймовірністю у припущенні, що гра, яка визначається платіжною матрицею A, повторюється достатню кількість разів [11].

Завдання полягає в тому, щоб визначити ці ймовірності таким чином, щоб вони забезпечували максимально гарантований виграш при врахуванні дій протилежної сторони.

Позначимо через x вектор-стовпець розмірності m, де m – число стратегій сторони A:

$$x_{[m\times 1]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Елемент цього вектора x_i визначає ймовірність застосування стороною A своєї i-ї стратегії.

Через y позначимо n-мірний вектор-стовпець, де n число стратегій сторони B:

$$y_{[n\times 1]} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Елемент y_j, вектору y визначає ймовірність застосування стороною B відповідної стратегії.

Елементи цих векторів повинні відповідати умовам:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1,.....,m;$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \geq 0,\ j = 1,....,n.$$

Очевидно, що кожна чиста стратегія є окремим випадком змішаної стратегії: коли всі стратегії, крім цієї, мають ймовірності, рівні нулю, а дана – одиниці.

В умовах змішаних стратегій кожна звичайна ситуація (у чистих стратегіях) $\left\{A_i, B_j\right\}$ є випадковою подією та зважаючи на незалежність наборів ймовірностей $\{x_i\}$, $\{y_j\}$ реалізується з ймовірністю $x_i y_j$. У ситуації $\left\{A_i, B_j\right\}$ гравець A отримує виграш a_{ij}. Таким чином, математичне сподівання [12] виграшу гравця A в умовах змішаних стратегій буде визначатися наступним чином:

$$h_a(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j .$$

Це число приймається за середній виграш гравця A при змішаних стратегіях x, y.

Стратегії x^*, y^* називаються оптимальними змішаними стратегіями гравців A і B відповідно, якщо виконується умова:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_i^* \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^* \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j .$$

Рішенням гри називається пара оптимальних стратегій x^*, y^*, в загальному випадку змішаних, що володіють властивістю: якщо один з гравців дотримується своєї оптимальної стратегії, то іншому не може бути вигідно відступати від своєї оптимальної.

Проаналізуємо нерівності.

Ліва нерівність означає: відхилення гравця A від оптимальної стратегії x^* за умови, що гравець B дотримується своєї оптимальної стратегії y^*, призводить до того, що виграш гравця A, що відхилився, може тільки зменшитися.

Права нерівність означає: відхилення гравця B від оптимальної стратегії y^* за умови, що гравець A дотримується своєї оптимальної стратегії x^*, призводить до того, що виграш гравця A може тільки зрости, а значить, зросте і програш гравця B.

Виграш, відповідний рішенню, називається ціною гри [13]; ми позначатимемо її ν (як і чисту ціну):

$$\nu = x^{*T} A y^*,$$

де x^*, y^* – вектори оптимальних стратегій.

Ціна гри завжди лежить між нижньою ціною гри і верхньою ціною гри:

$$\alpha \le \nu \le \beta.$$

Дійсно, α є мінімальний гарантований виграш, який може забезпечити собі гравець A, застосовуючи лише свої чисті стратегії. Застосовуючи змішані стратегії, гравець A у будь-якому разі не зменшить свій виграш, тобто $\nu \ge \alpha$. Для гравця B аналогічні міркування приведуть до висновку, що $\nu \le \beta$. Тому в загальному випадку: $\alpha \le \nu \le \beta$.

Якщо $\nu \ge 0$, то гра вигідна гравцю A; якщо $\nu \le 0$, то гравцю B; при $\nu = 0$ гра «чесна» чи «справедлива», тобто однаково вигідна для обох учасників.

Існує основна теорема теорії ігор: кожна кінцева гра має, принаймні, одне рішення, можливо, в області змішаних стратегій.

Активними стратегіями гравця називаються ті стратегії, які входять у його оптимальну змішану стратегію з відмінними від нуля ймовірностями.

Для вирішення ігрових завдань істотне значення має теорема про активні стратегії.

Якщо один із гравців дотримується своєї оптимальної стратегії, то його виграш залишається незмінним і рівним ціні гри ν незалежно від того, що робить інший гравець, якщо тільки той не виходить за межі своїх активних стратегій. Сенс цієї теореми полягає в тому, що якщо один із гравців почне послідовно притримуватись своєї оптимальної змішаної стратегії, то гравець, що протистоїть йому, вже не зможе змінити результат гри [14].

Ця теорема має велике практичне значення: вона дає конкретні моделі знаходження оптимальних стратегій за відсутності сідлової точки.

2.2 Методи розв’язання матричних ігрових задач

2.2.1 Вирішення ігор розмірності $n \times n$ методом Лангранжа

Розглянемо, як можна визначити оптимальні стратегії в ігрових завданнях розмірності $n \times n$ методом Лагранжа.

Нехай гра, яка не має сідлової точки і свідомо невигідних стратегій, описується квадратною матрицею A розмірності $n \times n$:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_n \end{array} \end{array} .$$

Гравець A використовує свої стратегії з ймовірностями $x_1, \ldots, x_n$, а гравець B – з ймовірностями $y_1, \ldots, y_n$, причому $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$

Математичне сподівання виграшу гравця A:

$$\nu = x^{*T} A y^{*},$$

де $x^{*T} = (x_1, \ldots, x_n)$, $y^{*T} = (y_1, \ldots, y_n)$ – оптимальні стратегії гравців A і B відповідно.

Отже, виграш гравця B буде дорівнювати $(-\nu)$.

Використаємо елементи варіаційного обчислення і вирішимо завдання кожного з гравців методом Лагранжа, склавши допоміжні функції:

$$h_a(x^*, y^*) = \nu + \lambda_a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right),$$

$$h_b(x^*, y^*) = -\nu + \lambda_b\left(\sum_{j=1}^{n} y_j - 1\right).$$

де λ_a, λ_b – невизначені множники Лагранжа [15].

Системи рівнянь для визначення точки Неша мають вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h_a(x^*, y^*)}{\partial x_i} = 0, \; i = 1, \ldots, n, \\ \dfrac{\partial h_b(x^*, y^*)}{\partial \lambda_b} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial h_b(x^*, y^*)}{\partial y_j} = 0, \; j = 1, \ldots, n; \\ \dfrac{\partial h_a(x^*, y^*)}{\partial \lambda_a} = 0. \end{cases}$$

Якщо підставити значення оптимальних стратегій отримаємо значення платежу, який гравець A повинен отримати від гравця B.

2.2.2. Рішення ігор розмірності $n \times n$ методом Крамера

Нехай матриця гри, яка не має сідлової точки і свідомо невигідних стратегій, має вигляд:

$$\begin{array}{c} \\ A= \end{array}\begin{array}{cccc|c} B_1 & B_2 & \cdots & B_n & \\ \hline a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & A_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & A_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & A_n \end{array}.$$

Потрібно визначити оптимальні стратегії гравців $x^{*T}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $y^{*T}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ та ціну гри ν.

Спочатку визначимо оптимальну стратегію x^* гравця A у припущенні, що A застосовує свою оптимальну змішану стратегію, а B – свої чисті стратегії.

Відповідно до теореми про активні стратегії, якщо один з гравців дотримується своєї оптимальної стратегії, то його виграш залишається незмінним і рівним ціні гри ν, незалежно від способу дій противника, якщо той не виходить за межі своїх активних стратегій. Значить, якщо гравець A дотримується своєї оптимальної стратегії x^*, його противник може, не змінюючи виграшу, застосувати будь-яку зі своїх чистих стратегій [16].

Ціна гри – це математичне очікування виграшу гравця A. Шукатимемо її як математичне сподівання дискретної випадкової величини виграшу гравця A:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\ldots+a_{n1}x_n=v; \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{n2}x_n=v; \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\ldots+a_{nm}x_n=v. \end{cases}$$

Умова нормування: $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Далі для знаходження $x_1,x_2,\dots,x_n$, застосовуємо метод Крамера за яким кожне з них визначається як відношення двох визначників. У чисельнику береться визначник, утворений шляхом заміни відповідного стовпця матриці коефіцієнтів на стовпець вільних членів, а у знаменнику – визначник початкової матриці коефіцієнтів. Таким чином, кожне невідоме обчислюється шляхом поділу визначника зміненої матриці на визначник основної матриці. Такий підхід дозволяє послідовно знаходити всі шукані величини системи, не змінюючи структуру самої матриці [17].

Метод Крамера є зручним для розв’язання невеликих систем лінійних рівнянь, де кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих, і дає точний аналітичний результат. Він ґрунтується на властивостях визначників і дозволяє чітко простежити вплив кожного коефіцієнта на кінцевий результат. Завдяки цьому метод Крамера часто використовується в теоретичних розрахунках, прикладних задачах та навчальних роботах як наочний і логічно зрозумілий спосіб розв’язання систем рівнянь. Його перевагою є простота алгоритму та можливість послідовного застосування для будь-яких систем з відомими коефіцієнтами.

Незважаючи на те, що при великій кількості рівнянь цей метод стає менш ефективним через складність обчислення визначників, він залишається важливим інструментом для перевірки правильності отриманих результатів та для демонстрації принципів лінійної алгебри на практиці.

Застосував співвідношення нормування, отримуємо:

$$\frac{v(\Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_n)}{\Delta a} = 1.$$

Звідси

$$v = \frac{\Delta a}{\Delta a_1 + \Delta a_{2+} + \ldots + \Delta a_n}.$$

Підставимо вираз для ціни гри v в формули для розрахунку $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В результаті отримуємо:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta a_1}{\Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_n}; \\ x_2 = \dfrac{\Delta a_2}{\Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_n}; \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{\Delta a_n}{\Delta a_1 + \Delta a_2 + \ldots + \Delta a_n}. \end{cases}$$

Таким чином, визначена оптимальна стратегія гравця A – $x^{*T} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Аналогічно визначаємо оптимальну стратегію y^{*T} гравця B, враховуючи, що B застосовує оптимальну змішану стратегію, а A – свої чисті стратегії.

Отже, знаючи умови гри та можливі дії кожного з гравців, можемо перейти до побудови математичної моделі [18], що описує взаємодію між ними. Для цього необхідно виразити залежність виграшу одного гравця від стратегій іншого у вигляді системи рівнянь.

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n = v; \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n = v; \\ \quad\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n = v. \end{cases}$$

Умова нормування: $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$.

Звідки знаходимо за правилом Крамера $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Підставляємо вираз у формули для розрахунку $y_1, y_2, \ldots, y_n$, в результаті отримуємо ймовірність застосування стратегій гравця B:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{\Delta\bar{a}_1}{\Delta\bar{a}_1 + \Delta\bar{a}_2 + \ldots + \Delta\bar{a}_n}; \\ y_2 = \dfrac{\Delta\bar{a}_2}{\Delta\bar{a}_1 + \Delta\bar{a}_2 + \ldots + \Delta\bar{a}_n}; \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \dfrac{\Delta\bar{a}_n}{\Delta\bar{a}_1 + \Delta\bar{a}_2 + \ldots + \Delta\bar{a}_n}. \end{cases}$$

Оскільки цей метод спирається на теорему про активні стратегії, перед початком розв'язання завдання необхідно переконатися, що всі стратегії є активними, тобто відсутні сідлова точка і свідомо невигідні стратегії.

2.2.3 Метод оберненої матриці

Даний метод дозволяє знаходити рішення ігрових завдань розмірності $n \times n$, що містять тільки активні стратегії. Тому перед початком рішення необхідно переконатися у відсутності сідлової точки і виключити свідомо невигідні стратегії. Модель гри в цьому випадку буде ідентичною до моделі, розглянутої в п. 2.2.2. Тоді модель гри з активними стратегіями [19] можна подати у вигляді матриці виграшів першого гравця. Нехай A_i, $i = 1,...,n$ – активні стратегії першого гравця, а B_j, $j = 1,...,n$ – активні стратегії другого гравця. Елементи матриці a_{ij} відображають виграш першого гравця при виборі стратегій A_i та B_j. Матриця має вигляд:

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_n \end{array}.$$

Потрібно визначити оптимальні стратегії гравців:

$$x^{*T}=(x_1,x_2,\dots,x_n),$$

$$y^{*T}=(y_1,y_2,\dots,y_n)$$

та ціну гри ν.

Для визначення оптимальної стратегії x^* гравця A складемо систему рівнянь у припущенні, що A застосовує свою оптимальну змішану стратегію, а B – свої чисті стратегії:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\ldots+a_{n1}x_n=v; \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{n2}x_n=v; \\ \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=v. \end{cases} \tag{2.1}$$

Умова нормування: $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1.$

Запишемо систему (2.1) у векторно-матричній формі:

$$x^{*T}A=v\cdot(1)_{1\times n},$$

де $(1)_{n\times 1}$ – вектор розмірності $n\times 1$, що складається з одних одиниць.

Помножимо обидві частини рівності ліворуч на A^{-1}:

$$x^{*T} A A^{-1} = v \cdot (1)_{1\times n} A^{-1}.$$

Звідки слідує:

$$x^{*T} = v \cdot (1)_{1\times n} A^{-1}.$$

Введемо на розгляд новий вектор виду:

$$\tilde{x}^{*T} = \frac{x^{*T}}{v} = A^{-1} \cdot (1)_{n\times 1},$$

отримуємо:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{v} = \frac{1}{v}.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$

З рівнянь визначаємо вектор оптимальної стратегії x^{*T} сторони A:

$$x^{*T} = v\tilde{x}^{*T} = \frac{\tilde{x}^{*T}}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i},\ i = 1,\ldots,n$$

а також значення ціни гри:

$$v = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i}.$$

Далі визначаємо оптимальну стратегію y^* гравця B. Для цього складемо відповідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{n1}y_n = v; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{n2}y_n = v; \\ \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n = v. \end{cases} \tag{2.2}$$

Умова нормування: $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1.$

Запишемо систему (2.2) у векторно-матричній формі:

$$Ay^* = v \cdot (1)_{n\times1},$$

де $(1)_{n\times1}$ – вектор розмірності $n\times1$, що складається з одних одиниць.

Помножимо обидві частини рівності ліворуч на A^{-1}:

$$A^{-1}Ay^* = A^{-1} \cdot v \cdot (1)_{n\times1}.$$

Звідки слідує:

$$y^* = A^{-1} \cdot v \cdot (1)_{n\times1}.$$

Введемо на розгляд новий вектор виду:

$$\breve{y}^* = \frac{y^*}{v} = A^{-1} \cdot (1)_{n\times1},$$

отримуємо:

$$\sum_{j=1}^{n}\breve{y}_j=\sum_{j=1}^{n}\frac{\breve{y}_j}{v}=\frac{1}{v}.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{n}y_i=1.$

З рівнянь визначаємо вектор оптимальної стратегії [20] y^{*T} сторони B:

$$y^{*T}=v\breve{y}^{*T}=\frac{\breve{y}^{*T}}{\sum_{j=1}^{n}\breve{y}_j},\ i=1,\ldots,n,$$

а також значення ціни гри:

$$v=\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}\breve{y}_j}.$$

2.2.4. Вирішення ігор розмірності $m\times n$ методом лінійного програмування

Рішення будь-якої матричної гри $m\times n$ зводиться до завдання лінійного програмування.

Розглянемо гру $m\times n$ з m стратегіями $A_1,A_2,\ldots,A_m$ гравця A та n стратегіями $B_1,B_2,\ldots,B_m$ гравця B, яка задається матрицею:

$$A=\begin{array}{cccccc} & B_1 & B_2 & \cdots & B_n & \\ \left(\begin{array}{c}\\\\\\\\\end{array}\right. & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & A_1 \\ & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & A_2 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & A_m \end{array}$$

Потрібно визначити рішення гри, тобто оптимальні змішані стратегії гравців A та B – $x^{*T}=(x_1,\ldots,x_m)$, $y^{*T}=(y_1,\ldots,y_n)$ та ціну гри v.

Спочатку знайдемо оптимальну стратегію [21] $(x_1,\ldots,x_m)$ гравця A. Ця стратегія повинна забезпечити виграш, не менший ціни гри, при будь-якій поведінці другого гравця і виграш, що дорівнює ціні гри, при його оптимальній поведінці. Ціна гри нам невідома, тому представимо її у вигляді деякого додатнього числа v. Для того, щоб виконувалася умова $v>0$ достатньо, щоб всі елементи матриці були невід'ємні. Цього завжди можна досягти, якщо скористатися афінним правилом, що визначає допустимі перетворення матриці гри та її ціну.

Афінне правило. Оптимальні стратегії матричних ігор, елементи матриць A і C яких пов'язані рівністю:

$$c_{ik}=\lambda a_{ik}+\mu,\ i=1,\ldots,m,\ k=1,\ldots,n,$$

де $\lambda>0$, а μ – довільно, мають однакові рівноважні ситуації (або в чистих, або в змішаних стратегіях), ціни яких задовольняють умову:

$$\nu_C = \lambda\nu_A + \mu.$$

Згідно з вищенаведеним афінним правилом, якщо додати до всіх елементів матриці одне і те ж число, ціна гри збільшиться на це число, а рішення не зміниться [22].

Таким чином, рахуватимемо $v>0$.

Нехай гравець A застосовує свою оптимальну стратегію $(x_1,\ldots,x_m)$, а гравець B – лише чисті стратегії. Оскільки оптимальна стратегія гравця A така, що при будь-якій поведінці противника забезпечує виграш, не менший, ніж ціна гри, можемо записати такі умови:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq v; \\ \ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq v; \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Розділимо кожне із співвідношень системи (2.3) на додатню величину v і введемо нові позначення:

$$\frac{x_i}{v} = z_i \ (i = 1, \ldots, m).$$

Тоді умови (2.3) запишуться у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}z_1 + a_{21}z_2 + \ldots + a_{m1}z_m \geq 1; \\ \ldots \\ a_{1n}z_1 + a_{2n}z_2 + \ldots + a_{mn}z_m \geq 1; \\ z_1 + \ldots + z_m = \frac{1}{v}. \end{cases} \qquad (2.4)$$

Гравець A хоче зробити свій виграш (v) максимально можливим, отже, величину $\frac{1}{v}$ мінімальною, тобто завдання зводиться до мінімізації правої частини останнього співвідношення системи (2.4).

Таким чином, завдання визначення оптимальної змішаної стратегії гравця A звелося до наступного математичного завдання.

Визначити невід'ємні значення змінних $z_1, z_2, \ldots, z_m$ так, щоб вони задовольняли лінійним обмеженням виду:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{jk} z_i \geq 1, \ k = 1, \ldots, n$$

і при цьому їхня лінійна функція L прямувала б до мінімуму:

$$L = \sum_{i=1}^{m} z_i \to \min .$$

Звідси видно, що задача визначення оптимальної стратегії $x^{*T} = (x_1, \ldots, x_m)$ звелося до типової задачі лінійного програмування.

Оптимальна змішана стратегія $(y_1, \ldots, y_n)$ гравця B визначається аналогічно до оптимальної стратегії гравця A. Однак при цьому необхідно врахувати, що ціна гри v для B є програш, і, отже, він прагне її мінімізувати, а значить, максимізувати величину $1/v$.

Оптимальна стратегія гравця B повинна забезпечити програш, не більший за ціну гри v, при будь-якій поведінці гравця A і програш рівний ціні гри v, при його оптимальній поведінці [23].

Лінійні обмеження в даному випадку матимуть такий вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \ldots + a_{1n}w_n \le 1; \\ \quad \ldots \\ a_{m1}w_1 + a_{m2}w_2 + \ldots + a_{mn}w_n \le 1, \end{cases}$$

де $w_j = \dfrac{y_j}{v}$ – невід’ємні змінні, котрі задовольняють умови:

$$w_1 + \ldots + w_n = \frac{1}{v}, \tag{2.5}$$

яке випливає із умови нормування для y_i, $j = 1, \ldots, n$.

Оскільки для гравця B ціна гри v – це програш, відповідно завдання зводиться до максимізації правової частини умови (2.5).

Таким чином, завдання визначення оптимальної змішаної стратегії гравця

B звелася до наступного математичного завдання.

Потрібно визначити невід’ємні значення змінних $w_1,\dots,w_n$ так щоб вони задовольняли лінійними обмеженням виду:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} w_k \le 1,\ i=1,\dots,m,$$

і перетворювали б в максимум лінійну функцію:

$$L' = \sum_{k=1}^{n} w_k \to \max .$$

В даному випадку ми знову маємо справу із завданнями лінійного програмування.

Таким чином, приходимо до висновку, що розв’язання будь-якої матричної гри $m \times n$ зводиться до рішення двоїстих завдань лінійного програмування [24].

2.3 Застосування математичних законів Ланчестера у воєнній справі

Розгляньмо ситуацію, коли необхідно передбачити, чи варто переходити в наступ проти ворога або відступити. Маємо обставини, за яких ворог удвічі численніший за війська опонента, проте значно гірше навчений веденню війни. Головне питання полягає в тому, чи можна за допомогою математики передбачити результат такої битви й допомогти вирішити, як діяти в подібній ситуації.

Математичні моделі – корисні інструменти для аналізу реальних ситуацій. Вони допомагають спростити складні процеси та дають змогу обчислити потенційні наслідки.

Першим кроком у застосуванні математичної моделі до будь-якої системи є розуміння базових процесів, що змушують систему працювати. У цьому випадку загальна система – це бій, а головна взаємодія – це поєдинок між окремими солдатами. Для спрощення припустімо, що кожен солдат на передній лінії б’ється з протилежним солдатом з іншого боку; щойно один перемагає, переможений миттєво замінюється іншим солдатом тієї армії. Це створює статичну лінію фронту між арміями. Отже, солдати, розташовані далі від фронту, фактично не беруть участі в боях, доки не досягають цієї лінії. Ця невелика деталь має велике значення.

Нехай додамо два нових параметри α та β. Вони потрібні для визначення того, наскільки добре навчена та озброєна кожна армія: α представляє, наскільки ефективно кожен солдат перемагає ворога, де значення 1 означає, що кожен солдат у лінії перемагає одного ворога за одиницю часу, а значення 0 – жодного. β представляє те саме, але для ворога. Ці параметри залежать від різних факторів. Ці параметри залежать від різних чинників. Оскільки війська втомлюються під час бою, параметри певною мірою залежать від часу. Якщо враховувати також моральний стан солдатів, то вони можуть залежати і від чисельності власної армії, і від кількості військ противника. Для спрощення припустимо, що вони сталі: $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$. Це буде одним із головних припущень для спрощення моделі.

Тепер ми можемо використати ці сталі величини, щоб побудувати диференціальне рівняння, яке описує, як змінюється чисельність кожної армії з часом. Позначимо $A(t)$ – чисельність однієї армії в момент часу t, а $B(t)$ – чисельність армії противника в той самий момент. Швидкість зміни чисельності армії позначається похідною $\frac{dA}{dt}$. Кількість солдатів, яких армія втрачає за одиницю часу, повинна дорівнювати кількості ворожих солдатів, що атакують, помноженій на ефективність цих солдатів, тобто кількість ворогів, знищених за одиницю часу.

Таким чином:

$$\frac{dA}{dt} = -\beta N ,$$

де N – це кількість солдатів противника на лінії фронту. Мінус у рівнянні означає, що війська втрачаються, а не додаються.

Для противника отримаємо аналогічне рівняння, але з коефіцієнтом α :

$$\frac{dB}{dt} = -\alpha N .$$

Оскільки обидві армії одночасно мають однакову кількість солдатів на лінії фронту, N є однаковим у цих двох рівняннях. Обидві армії зменшуються з постійною швидкістю – це і є лінійний закон Ланчестера, оскільки якщо зобразити чисельність кожної армії залежно від часу, то графік буде прямою лінією. Нахил цієї лінії пропорційний ефективності солдатів противника, а точка перетину з віссю ординат показує початкову чисельність кожної армії (рис. 2.1).

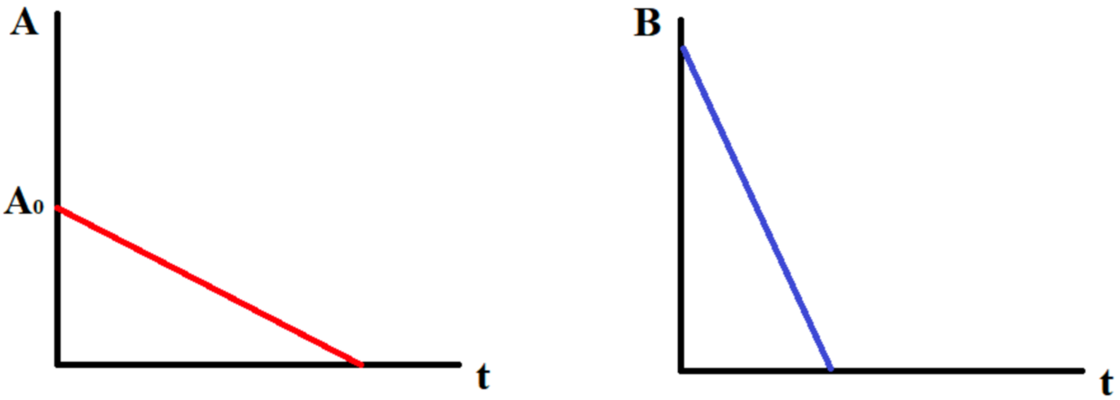

Рисунок 2.1 – Зображення лінійного закону Ланчестера

Припустимо, обидві армії воюють до повного знищення. Програє та сторона, чия лінія першою досягне нуля. Нехай армія ворога вдвічі більша: $B_0 = 2A_0$. Щоб виграти, солдати армії A повинні бути більш ніж удвічі ефективніші за ворога. Розглянемо це алгебраїчно.

Поділимо обидва попередні рівняння одне на одне:

$$\frac{\left(\frac{dA}{dt}\right)}{\left(\frac{dB}{dt}\right)} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Інтегруючи, отримаємо:

$$\int_{A_0}^{A} \alpha dA = \int_{B_0}^{B} \beta dB \rightarrow \alpha(A - A_0) = \beta(B - B_0),$$

звідки A_0 та B_0 початковий розмір кожної армії.

Оскільки ми хочемо визначити умови перемоги, розглянемо випадок, коли $A > 0$, а $B = 0$ – тобто ворог повністю знищений. Розглянемо цей випадок конкретно для цього рівняння $\alpha\left(A - A_0\right) = \beta(B - B_0)$. Ворог буде знищено, якщо:

$$\alpha A_0 > \beta B_0.$$

Добуток ефективності та початкової чисельності αA_0 є бойовою потужністю армії F_A. Армія з більшою бойовою потужністю виграє битву:

– якщо $F_A > F_B$, перемагає армія A;

– якщо $F_B > F_A$,перемагає армія B.

Оскільки ворог має вдвічі більше військ ($B_0 = 2A_0$), його супротивник повинен бути вдвічі ефективнішим ($\alpha = 2\beta$), щоб сили були рівними ($\alpha A_0 = \beta B_0$). Таким чином, якщо кожен солдат армії A дорівнює за ефективністю трьом солдатам армії B ($\alpha = 3\beta$), то армія A переможе навіть за чисельної переваги ворога.

Лінійний закон Ланчестера описує такі прості сценарії, коли кількість солдатів, що беруть участь у бою в певний момент, є сталою, і фронт обмежений, тобто армія B не може оточити армію A. Але, якщо одна армія оточує іншу, ситуація змінюється, тоді застосовується квадратичний закон Ланчестера [25].

Висновки за розділом 2

У другому розділі систематизовано математичний апарат, на якому далі будується модель протистояння сторін.

Показано підхід до розв’язання матричних ігор у чистих стратегіях, перехід до змішаних стратегій.

Для подальших розрахунків обґрунтовано набір методів розв’язання матричних ігор: розглянуто метод Лагранжа для ігор розмірністю $n \times n$ без сідлової точки, метод Крамера, підхід на основі оберненої матриці, а також загальний і найбільш універсальний підхід – зведення задачі до лінійного програмування.

Крім ігрового апарату, в розділі розглянуто математичні закони Ланчестера, як основу для моделювання подальшої фази бою звичайними засобами.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Середовище Python 3.2

У даній роботі використано універсальне середовище програмування Python 3.2 у хмарному сервісі Google Colab.

Google Colab – це безкоштовний хмарний сервіс, який був обраний для реалізації та експериментальної перевірки розробленої моделі. Цей інструмент надає потужне, повністю налаштоване середовище для виконання коду мовою програмування Python, використовуючи формат інтерактивних блокнотів. Головною перевагою для цього дослідження є можливість безкоштовного використання високопродуктивних обчислювальних ресурсів, таких як графічні процесори та тензорні процесори. Крім того, пряма інтеграція з Гугл Диском полегшує процес зберігання та обробки великих масивів даних і результатів експериментів [26].

Такий підхід забезпечує функціональні можливості, аналогічні системам комп'ютерної алгебри, зокрема:

– виконання чисельних обчислень;

– роботу з векторами, матрицями та системами рівнянь;

– побудову графіків і візуалізацію результатів моделювання.

Основні бібліотеки, які застосовуються у програмній реалізації:

– NumPy– для роботи з векторами та матрицями, представлення платіжних матриць гри, масивів параметрів нульової ітерації та величин, пов'язаних з інваріантами рівнянь Ланчестера;

– SciPy– для розв'язання задач оптимізації, що виникають при пошуку оптимальних змішаних стратегій;

– Matplotlib– для побудови графіків та теплокарт, які відображають, зокрема, частки вцілілих сил після нульової ітерації.

3.2 Алгоритм розв’язання задачі оцінки ядерної зброї

На початковому етапі задаються всі параметри, що визначають сценарій бою. До них належать початкові чисельно сті військ, можливі способи їх розподілу на основні групи, а також характеристики ядерної зброї: кількість боєприпасів, їх узагальнена потужність та тип програми прицілювання. У програмі ці дані формуються у вигляді структурованих таблиць і словників, що дає можливість гнучко змінювати конфігурації та проводити серії обчислювальних експериментів.

Далі виконується етап, який у теоретичній постановці називається нульовою ітерацією. Для кожної комбінації стратегій атакуючої та оборонної сторін обчислюється частка військ, що зберігають боєздатність після одноразового застосування ядерної зброї. На цьому кроці враховуються такі фактори, як кількість боєприпасів, їх потужність, розподіл цілей та співвідношення чисельності груп противника. Результати формують матрицю часток вцілілих сил, де кожен елемент показує ефективність удару проти відповідної стратегії.

Отримані частки вцілілих є вихідними умовами для другого етапу – моделювання подальшого бою за правилами теорії Ланчестера. Замість чисельного розв’язання диференціальних рівнянь використовується їх аналітичний інваріант, який відображає співвідношення втрат сторін у процесі бою. На основі цього інваріанта для кожної пари стратегій формується числовий показник результату бою, який зводиться в матрицю констант. Ця матриця описує сукупний вплив ядерного удару та подальшого бою звичайними засобами [27].

Після цього виконується перехід до платіжної матриці гри.

Остаточний етап полягає у визначенні оптимальних змішаних стратегій. Для цього розв’язується задача максимізації гарантованого виграшу, у якій змінними є ймовірності застосування відповідних стратегій. Для цього використовується метод Лагранжа

У випадку матриці розміром 2×2 ця система зводиться до простих алгебраїчних рівнянь, які у програмі розв’язуються явно. Таким чином для кожного значення параметра визначаються оптимальні ймовірності та ціна гри.

Завершальний блок алгоритму відповідає за проведення обчислювального експерименту. Для серії значень параметра та різних наборів [28] характеристик ядерної зброї програма автоматично виконує повний цикл обчислень, формує результати, зберігає їх і візуалізує у вигляді графіків. Це дозволяє досліджувати вплив конфігурацій розподілу сил та потужності ядерного арсеналу на оптимальні стратегії [29].

3.3 Опис програми

Програмна реалізація моделі організована у вигляді кількох функціональних блоків, які відповідають основним етапам алгоритму.

Перший блок відповідає за ініціалізацію параметрів сценарію. У ньому задаються чисельності сторін, можливі стратегії розподілу військ (кількість груп та їх відносні чисельності), характеристики ядерної зброї, та діапазон значень параметра H. Дані задаються у вигляді словників і масивів, що дозволяє легко переходити від одного сценарію до іншого.

Другий блок реалізує моделювання нульової ітерації. Основна функція цього блоку для кожної пари стратегій сторін обчислює частку вцілілих сил і будує матрицю часток вцілілих після одноразового застосування ядерної зброї. У спрощеному варіанті ця функція використовує параметри «кількість боєприпасів» і «ефективність одного удару» для оцінки частки уражених сил у кожній групі.

Третій блок призначений для переходу від матриці часток вцілілих до матриці констант моделі Ланчестера. Константи обчислюються як певні функції від часток вцілілих відповідно до обраної форми інваріанту рівнянь Ланчестера, наведеної у теоретичному розділі.

Четвертий блок формує платіжну матрицю гри $A(H)$ для кожного значення параметра H за результатами нульової ітерації та моделі Ланчестера, а також виконує усунення домінованих стратегій.

П’ятий блок реалізує розв’язання отриманої гри: для матриці розмірності 2×2 використовується явний аналітичний розв’язок, еквівалентний застосуванню умов оптимальності Каруша–Куна–Таккера до задачі пошуку оптимальних змішаних стратегій.

Шостий блок відповідає за візуалізацію та збереження результатів. Він будує теплокарти для матриць, що відображають наслідки нульової ітерації, а також графіки залежності ціни гри та компонент оптимальних змішаних стратегій від параметрів моделі. Уся програма організована таким чином, що при зміні вихідних параметрів не потрібно змінювати логіку обчислень: достатньо скоригувати значення в блоці ініціалізації, після чого всі етапи – від нульової ітерації до розв’язання гри – виконуються автоматично.

Висновки за розділом 3

У третьому розділі виконано програмну реалізацію побудованої математичної моделі протистояння сторін із урахуванням нульової ітерації, рівнянь Ланчестера та теорії ігор. На мові Python у середовищі Google Colab розроблено комплекс, який послідовно реалізує задання параметрів сценарію, моделювання втрат від одноразового застосування ядерної зброї, розрахунок подальшого бою звичайними засобами, формування платіжних матриць та знаходження оптимальних змішаних стратегій сторін методом Лагранжа.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

4.1 Обчислювальний експеримент коли ядерна зброя є у оборонної сторони

Розглянемо ситуацію безпосередньої підтримки військ, за якої атомна зброя перебуває виключно в розпорядженні оборонної сторони. Припустимо, що оборонні сили складаються з M військовослужбовців, кожен з яких має вогневу міць K, усі підрозділи розміщені в межах прямокутника розміром 600×3600 метрів. У даній задачі конфігурація бойових порядків оборонної сторони не має принципового значення. Припущення про прямокутну форму бойових порядків зроблено з огляду на те, що така форма є типовою для розстановки бойових бригад.

Наступаюча сторона із загальною чисельністю N військовослужбовців, кожен з яких володіє вогневою міццю L, розподіляє свої сили на основні групи, розміщені в межах прямокутників розміром 600×3600 метрів. Кількість таких груп може бути різною. Наступаюча сторона завжди розташовує [30] свої основні групи так, як показано на рис. 4.1.

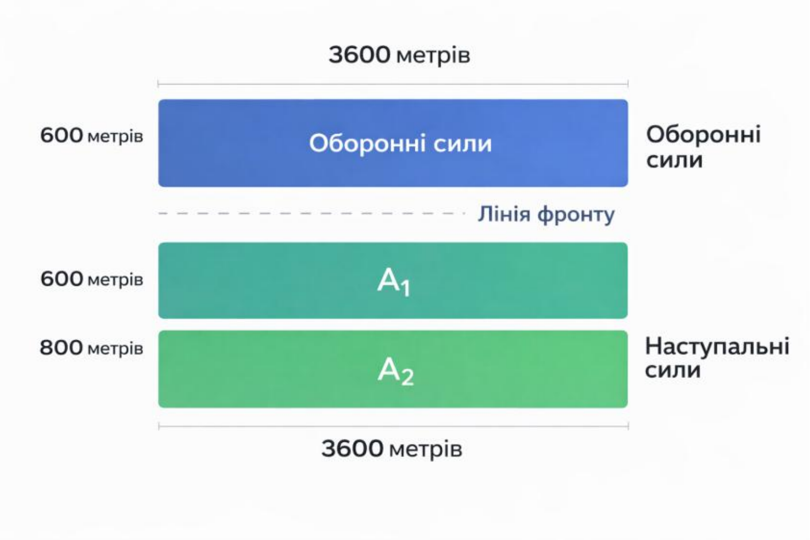

Рисунок 4.1 – Приклад розстановки груп

При цьому вважається, що вогнева міць, яка припадає на одного бійця наступальної сторони, не залежить від способу розподілу загальної чисельності N. Крім того, приймається співвідношення $\frac{L}{K}=1$.

Перед оборонною стороною постає завдання вибору типу озброєння, тоді як перед наступальною стороною – завдання визначення кількості основних груп W, на які доцільно поділити свої сили. Для спрощення розрахунків припустимо, що оборонна сторона має у своєму розпорядженні чотири типи атомної зброї, характеристики яких наведено в табл. 4.1, а наступальна сторона може поділити свої сили лише на одну, дві, три або чотири групи.

Таблиця 4.1 – Типи зброї, що є у сторони, що обороняється

Типи зброї	1	2	3	4
Число бомб	1	2	3	4
Радіус ураження (в метрах)	1100	950	850	550

Для кожного типу озброєння передбачено фіксований набір точок прицілювання, вибраних на певній лінії, паралельній лінії фронту рис 4.1 і розташованій таким чином, щоб унеможливити ураження власних військ. За умови, що похибки бомбометання дорівнюють нулю, можна безпосередньо обчислити ефективність застосування відповідного типу озброєння проти будь-яких бойових порядків наступальної сторони. Інакше кажучи, якщо відомо, що бойовий порядок наступальної сторони складається з k основних груп, можна визначити кількість військовослужбовців N_{ij}, які залишилися в групі A_i, $i=1,2,\ldots,k$, після застосування оборонною стороною атомної зброї типу j, $j=1,2,\ldots,4$. Значення цих показників наведено в табл. 4.2.

Таблиця 4.2 – Кількість військовослужбовців, що вціліли в кожній групі

Число груп, k	Групи	Типи атомної зброї			
		1	2	3	4
1	A_1	$0,401N$	$0,266N$	$0,196N$	$0,257N$
2	A_1	$0,201N$	$0,133N$	$0,098N$	$0,128N$
	A_2	$0,252N$	$0,133N$	$0,185N$	$0,366N$
3	A_1	$0,134N$	$0,089N$	$0,065N$	$0,086N$
	A_2	$0,168N$	$0,089N$	$0,123N$	$0,244N$
	A_3	$0,307N$	$0,232N$	$0,333N$	$0,333N$
4	A_1	$0,100N$	$0,067N$	$0,049N$	$0,064N$
	A_2	$0,126N$	$0,067N$	$0,092N$	$0,183N$
	A_3	$0,230N$	$0,174N$	$0,250N$	$0,250N$
	A_4	$0,250N$	$0,250N$	$0,250N$	$0,250N$

У нашому випадку теорія Ланчестера застосовується таким чином. Припустімо, що наступальна сторона обрала бойовий порядок із двома основними групами, а оборонна сторона – перший тип озброєння. Після вибуху в наступальної сторони залишається $0,2N$ бійців у групі A_1 та $0,25N$ бійців у групі A_2. Далі вважається, що першу атаку здійснює група A_1, після чого в бій вступає група A_2, причому кожна наступна атака спрямовується проти тих бійців оборонної сторони, які вціліли після попередньої атаки. Така тактика, відповідно до теорії Ланчестера, завжди призводить до повного знищення однієї з груп.

Кількість бійців, що залишаються після завершення всіх атак, наведено в табл. 4.3. Від’ємні значення в таблиці відповідають повному знищенню наступальної сторони. Функція має вигляд $g(x) = (sgn\,x)\sqrt{|x|}$ а параметр $H = \left(\frac{M}{N}\right)^2$. Числові значення, подані в таблиці, нормалізовані відносно N, однак це не впливає на розв’язання гри.

Таблиця 4.3 – Загальна платіжна матриця гри, в якій атомну зброю має тільки оборонна сторона

Число груп, k	Типи атомної зброї			
	1	2	3	4
1	$g(0{,}161 - H)$	$g(0{,}071 - H)$	$g(0{,}039 - H)$	$g(0{,}066 - H)$
2	$g(0{,}104 - H)$	$g(0{,}035 - H)$	$g(0{,}044 - H)$	$g(0{,}150 - H)$
3	$g(0{,}140 - H)$	$g(0{,}070 - H)$	$g(0{,}131 - H)$	$g(0{,}178 - H)$
4	$g(0{,}141 - H)$	$g(0{,}102 - H)$	$g(0{,}136 - H)$	$g(0{,}163 - H)$

Зауважимо, що якщо $x_2 > x_1$, то $g(x_2) > g(x_1)$. Якщо ж $x_2 > x_1 > 0$, то $g(x_2) - g(x_1) = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} > 0$. Якщо $x_2 > 0 > x_1$, то $g(x_2) - g(x_1) = \sqrt{x_2} - \sqrt{|x_1|} > 0$. Нарешті, якщо $0 > x_2 > x_1$, то $|\,x1| > |\,x2|$ і $g(x_2) - g(x_1) = -\sqrt{|x_2|} + \sqrt{|x_1|} > 0$.

На цій підставі легко побачити, що для будь-якого значення H усі елементи другого стовпця є меншими за відповідні елементи першого та третього стовпців. Отже, оборонна сторона ніколи не застосовуватиме озброєння першого і третього типів, і гра зводиться до гри з платіжною матрицею [31], поданою в табл. 4.4.

Проводячи аналогічні міркування, можна встановити, що елементи четвертого рядка нової матриці є більшими за відповідні елементи другого і третього рядків для будь-якого значення H. Тому наступальна сторона ніколи не ділитиме свої сили на дві або три основні групи. Платіжна матриця остаточної гри наведена в табл. 4.5.

Таблиця 4.4 – Платіжна матриця гри, еквівалентної початковій грі.

Число груп, k	Типи атомної зброї	
	2	4
1	$g(0{,}071-H)$	$g(0{,}066-H)$
2	$g(0{,}035-H)$	$g(0{,}150-H)$
3	$g(0{,}070-H)$	$g(0{,}178-H)$
4	$g(0{,}102-H)$	$g(0{,}163-H)$

Таблиця 4.5 – Платіжна матриця остаточної гри.

Число груп, k	Типи атомної зброї	
	2	4
1	$g(0{,}071-H)$	$g(0{,}066-H)$
4	$g(0{,}102-H)$	$g(0{,}163-H)$

Для будь-якого значення H оптимальна стратегія наступальної сторони полягає в тому, що вона з певною ймовірністю поділяє свої сили на чотири групи, а з певною ймовірністю взагалі не ділить їх. Оптимальна стратегія оборонної сторони, своєю чергою, полягає у застосуванні озброєння другого та четвертого типів з певними ймовірностями. На рис. 4.2 наведено ці оптимальні стратегії, а також значення ціни гри залежно від $\left(\frac{M}{N}\right)^2$.

Деякі точки на цих графіках становлять особливий інтерес. Зокрема, точка, в якій ціна гри дорівнює нулю, може бути використана для оцінювання ефективності атомного озброєння, вираженої через кількість уражених бійців. Інакше кажучи, якщо оборонна сторона має атомну зброю, а наступальна — ні, то оборонній стороні достатньо мати чисельність особового складу, що становить приблизно 0,26 чисельності військ наступальної сторони, аби зрівноважити її наступальний потенціал. Це можна сформулювати інакше: якщо на початку обидві сторони мали однакові сили, наприклад по 1000 бійців, то в результаті у оборонної сторони залишиться близько 950 бійців, тоді як наступальна сторона буде повністю знищена.

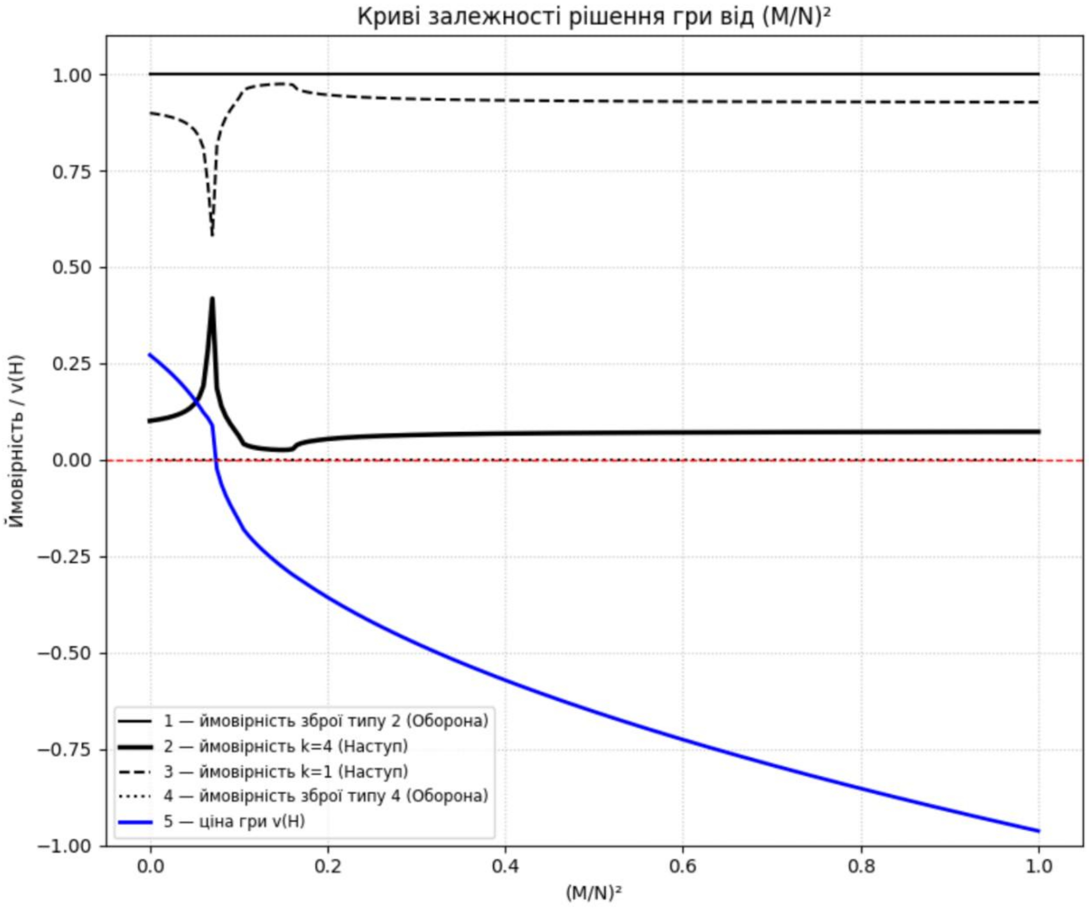

Рисунок 4.2 – Криві залежності розв’язку гри, в якій атомною зброєю володіє лише оборонна сторона

Для наочнішого аналізу отриманих результатів додатково використано візуалізацію у вигляді теплової карти показників, що характеризують сумарну частку сил наступальної сторони, які вціліли після застосування оборонною стороною атомної зброї відповідного типу. Така візуалізація дозволяє наочно простежити залежність ефективності застосування озброєння від кількості основних груп, на які поділяє свої сили наступальна сторона, а також від типу атомної зброї, що використовується оборонною стороною.

На рис. 4.3 подано теплову карту значень цього показника.

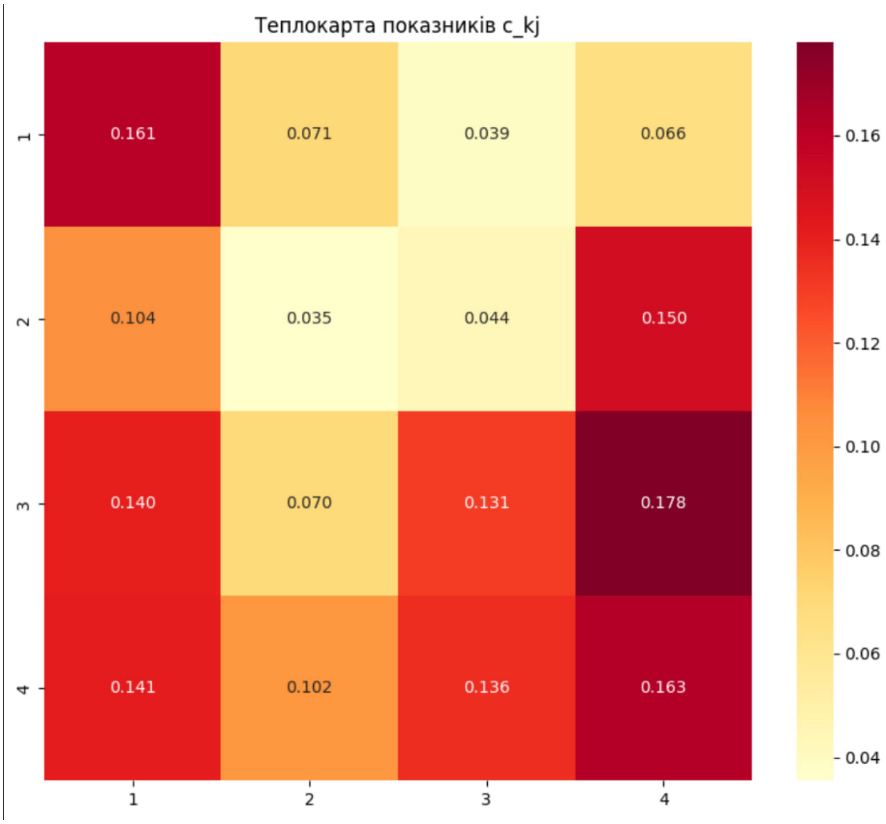

Рисунок 4.3 – Теплова карта оборонної сторони

По вертикальній осі відкладено кількість основних груп, на які поділяються сили наступальної сторони, а по горизонтальній осі – типи атомної зброї, що перебувають у розпорядженні оборонної сторони. Інтенсивність забарвлення відображає величину показника: світліші відтінки відповідають меншим значенням, а темніші – більшим.

З аналізу теплової карти видно, що для більшості варіантів розподілу сил наступальної сторони найменші значення показника досягаються у разі застосування атомної зброї другого типу. Це означає, що саме цей тип озброєння забезпечує найменшу частку вцілілих сил наступальної сторони та, відповідно, є найбільш ефективним. Даний висновок узгоджується з результатами аналітичного дослідження платіжної матриці гри, де другий тип озброєння входить до оптимальної стратегії оборонної сторони.

Водночас використання атомної зброї першого та третього типів у більшості випадків призводить до більших значень показника, що свідчить про їх нижчу ефективність. Це підтверджує доцільність виключення відповідних стратегій зі складу оптимального розв’язку гри як домінуючих.

Також теплова карта демонструє, що зі збільшенням кількості основних груп наступальної сторони у ряді випадків спостерігається зростання частки вцілілих сил, особливо для третього та четвертого типів атомної зброї. Це означає, що надмірне дроблення сил наступальної сторони не завжди підвищує її живучість і в окремих випадках може мати протилежний ефект.

Загалом найменші значення показника досягаються або за умови відсутності поділу сил наступальної сторони на групи, або при використанні оборонною стороною оптимального типу атомної зброї .

4.2 Обчислювальний експеримент коли ядерна зброя є у атакуючої сторони

Приклад вхідних даних, вибору бойових порядків та алгоритму розрахунку було наведено в пункті 4.1. У цьому підрозділі розглядається інша постановка задачі, в якій ядерна зброя перебуває в розпорядженні наступаючої сторони, тоді як оборонна має можливість варіювати ступінь розосередження своїх сил. Оскільки вхідні дані та методика розрахунку залишаються незмінними, далі без повторення проміжних обчислень наводяться лише отримані результати моделювання.

З аналізу теплової карти на рис. 4.4 видно залежність інтегральних показників залишкового бойового потенціалу від типу ядерної зброї наступаючої сторони та кількості груп оборони.

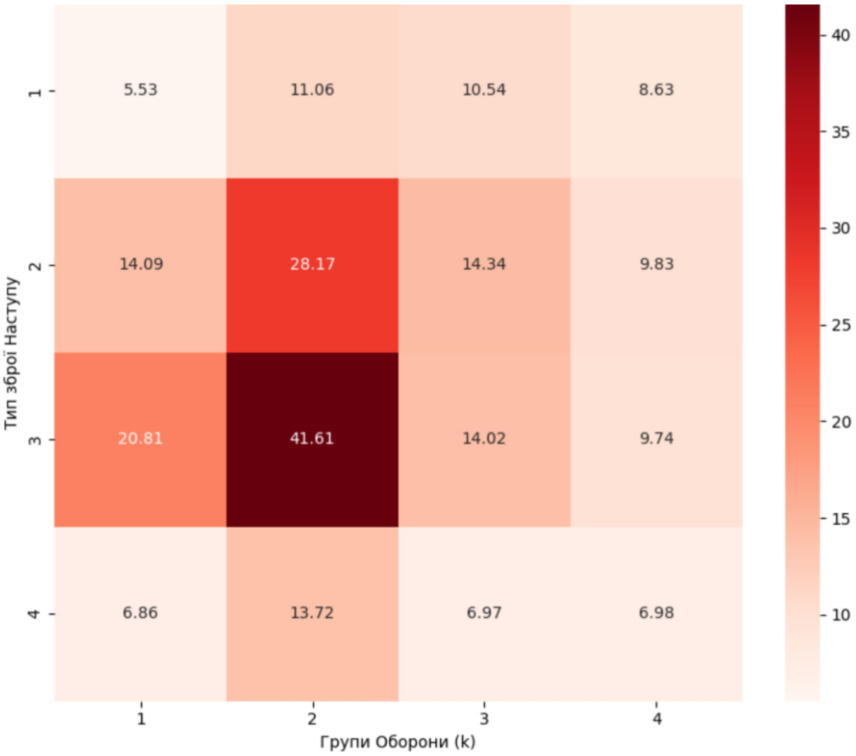

Рисунок 4.4 – Теплова карта атакуючої сторони

Для компактного розміщення оборонних сил в одну групу значення показника є порівняно невеликими для всіх типів зброї, що свідчить про високу вразливість такої конфігурації до ядерного удару. Навіть відносно слабкі варіанти зброї забезпечують наступу помітну перевагу, що відображається підвищеними значеннями показника.

Перехід до розподілу оборони на дві групи призводить до різкого зростання значень інтегрального показника залишкового бойового потенціалу наступальної сторони для другого та особливо третього типів ядерної зброї. На тепловій карті це проявляється у вигляді найбільш інтенсивно зафарбованих комірок, що відповідають цим сценаріям. Такий результат означає, що саме конфігурація з двома групами є найбільш несприятливою для оборони у випадку удару другим на третім типом ядерної зброї, коли геометрія розміщення військ і радіус ураження збігаються найгіршим чином.

Подальше збільшення кількості груп до трьох і чотирьох призводить до зниження значень показника для більшості типів зброї. Теплокарта показує, що максимальне розосередження оборонних сил згладжує ефект ядерного удару: відмінності між різними типами зброї стають менш контрастними, а загальний рівень переваги наступу зменшується. Таким чином, теплокарта підтверджує інтуїтивний висновок про те, що збільшення числа груп оборони знижує ефективність ядерної зброї, хоча окремі проміжні конфігурації можуть виявлятися найбільш уразливими.

На рис. 4.5 наведено графіки розв’язання гри для вибраної підгри, де наступаюча сторона володіє ядерною зброєю, а оборонна сторона обирає конфігурацію розподілу військ. На одному графіку показано залежність ціни гри та оптимальних ймовірностей стратегій від параметра, що характеризує початкове співвідношення сил сторін.

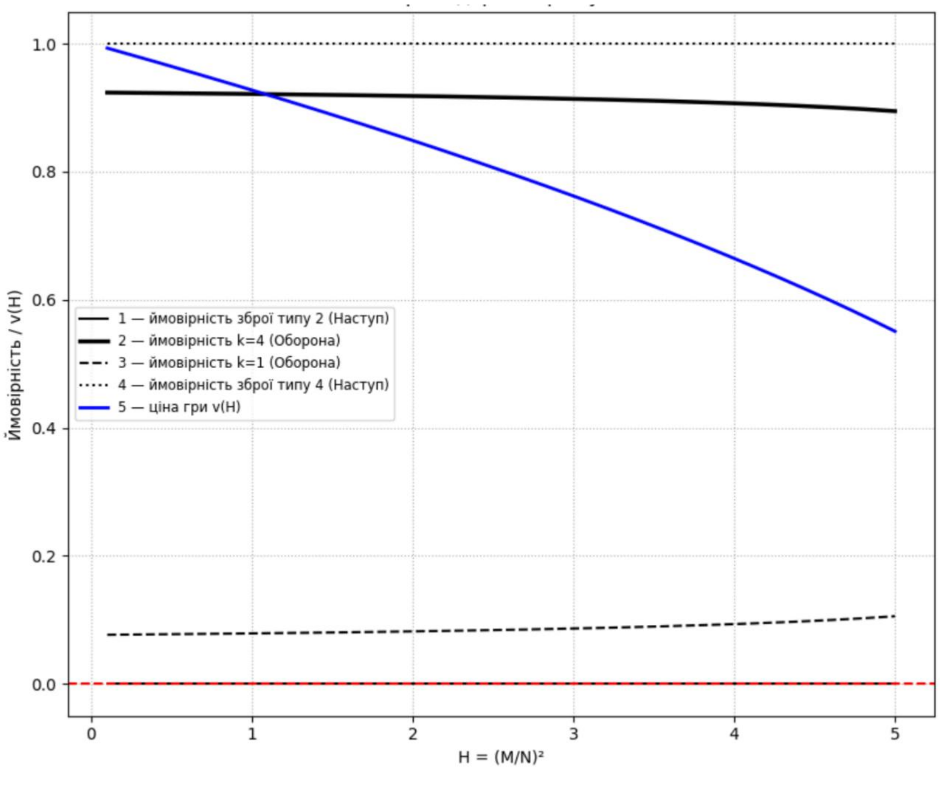

Рисунок 4.5 – Криві залежності розв’язку гри, в якій атомною зброєю володіє лише атакуюча сторона

Крива ціни гри монотонно спадає зі зростанням параметра початкової сили сторін. За малих значень цього параметра наступ маємгарантовану перевагу, що пов’язано з ефективністю ядерного удару на нульовій ітерації. У міру зростання параметра перевага наступу зменшується, що свідчить про здатність оборони частково компенсувати наявність ядерної зброї за рахунок більшої початкової чисельності та вибору вигіднішої структури розподілу сил.

Графіки оптимальних ймовірностей стратегій показують, що в усьому досліджуваному діапазоні параметра одна зі стратегій наступу використовується з імовірністю, близькою до одиниці, тоді як альтернативні варіанти практично не застосовуються.

Висновки за розділом 4

У четвертому розділі було проведено обчислювальний експеримент для двох сценаріїв: коли ядерна зброя знаходиться у розпорядженні наступаючої сторони та коли вона належить обороні. В обох випадках нульова ітерація, що моделює одноразове застосування ядерної зброї, була інтегрована в подальший розвиток бою за моделлю Ланчестера. Графічне подання результатів у вигляді теплових карт, а також залежностей ціни гри та оптимальних стратегій від параметра H, дало можливість простежити, як зміна структури розміщення військ та характеристик ядерної зброї змінює баланс сил у конфлікті.

У сценарії з ядерною зброєю у наступаючої сторони показано, що розосередження військ оборони істотно зменшує ефективність нульової ітерації: перехід від компактного розміщення до розбиття на кілька груп призводить до різкого зростання частки вцілілих сил та відповідних констант Ланчестера. При малих значеннях параметра H, коли початкова чисельність наступу переважає, застосування ядерної зброї забезпечує помітну перевагу наступаючій стороні, але зі зростанням H ціна гри зменшується і можливості наступу звужуються, навіть за наявності потужного ядерного арсеналу. Оптимальні стратегії сторін у цьому сценарії демонструють перехід від жорстких рішень до змішаних, коли обидві сторони комбінують різні варіанти ударів і розподілу військ, щоб уникнути домінування противника.

У сценарії, коли ядерна зброя належить обороні, ситуація принципово інша. Нульова ітерація у цьому випадку дозволяє обороні компенсувати або навіть переламати початкову чисельну перевагу наступу: теплові карти показують, що компактні бойові порядки наступаючої сторони майже повністю знищуються навіть при середніх рівнях потужності ядерного удару, і лише глибоке розосередження дає змогу зберегти помітну частину сил. Оптимальні стратегії наступу фактично вироджуються у чисту стратегію максимального розосередження, тоді як слабкі оборонні програми та компактні конфігурації наступу виявляються домінуючими і не повинні застосовуватися у раціональній грі.

ВИСНОВКИ

У роботі побудовано узагальнену математичну модель двостороннього протистояння, у якій поєднано диференціальні моделі типу Ланчестера з апаратом теорії ігор. Це дозволило описати конфлікт як гру двох сторін із заданими стратегіями розподілу військ і параметрами застосування зброї та дослідити, як ці параметри впливають на виграш і раціональну поведінку гравців.

Практична частина роботи реалізована мовою Python у середовищі Google Colab. Розроблений програмний комплекс автоматизує побудову матриць, розв’язання ігор і побудову графіків та теплових карт. На його основі виконано обчислювальний експеримент для двох сценаріїв: коли потужною зброєю володіє наступаюча сторона і коли вона належить оборонній. Показано, що розосередження військ суттєво знижує ефективність ударів, а розміщення потужних засобів у оборони створює для неї стійку перевагу в широкому діапазоні вихідних умов. Це свідчить про придатність моделі та програми як інструменту для сценарного аналізу та навчальних демонстрацій.

Результати роботи можуть бути використані у навчальному процесі з теорії ігор, дослідження операцій і системного аналізу, а також як база для побудови більш складних систем підтримки прийняття рішень у сфері безпеки й оборонного планування. Перспективним продовженням є розширення моделі за рахунок урахування просторових ефектів, випадкових факторів, багатокрокових сценаріїв і додаткових критеріїв ефективності, а також калібрування параметрів за емпіричними даними чи результатами імітаційного моделювання.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Петрушенко М. М. Необхідність і особливості застосування теорії ігор при моделюванні природно-ресурсних конфліктів. *Вісник СумДУ*. 2011. С. 30–48.

2. Мазничко М. В., Матвієнко О. І. Застосування теорії ігор для оцінки ядерної зброї. IX Міжнародна науково-технічна конференція «Комп’ютерне моделювання та оптимізація складних систем КМОСС–2025»: зб. матеріалів форуму. 2025. №1. С. 68 – 69.

3. Барановська Л. В., Теорія ігор: курс лекцій. Навчальний посібник, 2010. Київ. КПІ ім. Ігоря Сікорського. С. 30–77.

4. Chikrii A.A.: Conflict-Controlled Processes. *Springer Science & Business Media*. 2013. С. 1–10.

5. J. Osborne, A. Rubinstein. A Course in Game Theory. *The MIT Press, Cambridge, Massachusetts*; London, England. 1994 С. 43–65.

6. Котляров В. П., Зварич А. О., Кузнєцов О. А. Про модель Ланчестера для конфлікту низької інтенсивності. *Нелінійні коливання*. 2022. Т. 25, № 1. С. 41–48.

7. Машкін О. О. Особливості чисельного вирішення диференціальних рівнянь моделей ланчестерського типу у стохастичній постановці. *Системи обробки інформації*. 2020. № 1(160). С. 67–72.

8. Бобрицька Г. С., Антоненко Г. М., Білецька В. Р., Нестеренко В. О. Порівняння результатів детермінованого та стохастичного підходів до моделей Ланчестера класу В. *Системи обробки інформації*. 2024. № 4(175). С. 7–15.

9. Фурсенко О. К., Черновол Н. М., Антоненко Г. М. Математичне моделювання бойових дій на двох ділянках зіткнення з можливістю перерозподілу бойових ресурсів. *Системи обробки інформації*. 2022. Вип. 4(171). С. 76–81.

10. Караванов О. А., Купріненко О. М., Майстренко О. В., Баландін М. В., Волков І. Д. Аналіз науково-методичних підходів до моделювання процесу функціонування розвідувально-вогневих систем. *Системи озброєння і військова техніка*. 2022. № 3(71). С. 68–74.

11. Рєзнік Д. В., Мельниченко В. С., Шкурат Б. Ж. Математична модель взаємодії наземних та повітряних вогневих засобів під час протидії загрозам з повітря. *Повітряна міць України*. 2021. Т. 1, № 1. С. 55–62.

12. Опенько П., Феськов О., Іванов В., Кобзєв В. Шляхи удосконалення інформаційного забезпечення перспективної автоматизованої системи управління логістичним забезпеченням зенітних ракетних військ. *Повітряна міць України*. 2022. Т. 1, № 2(3). С. 47–55.

13. Шкурат Б., Шинкарук О., Заболотний О. Методика вибору математичних моделей для оцінювання ефективності протиповітряної оборони. *Повітряна міць України*. 2025. Т. 1, № 8. С. 36–44.

14. Заїка Л., Грозовський Р., Тимошенко Р., Супруненко О. Аналіз проведених дій під час підготовки військових фахівців із використанням засобу імітаційного моделювання бойових дій JCATS. *Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони*. 2024. Т. 48, № 3. С. 130–139.

15. Барановська Л. В. Теорія ігор: курс лекцій. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 245 с.

16. Улічев О. С., Кулагін В. П. Оптимізація роботи мікросервісів на основі теорії ігор. *Центральноукраїнський науковий вісник. Технічні науки*. 2025. Вип. 12(43), ч. I. С. 44–57.

17. Дьоміна Н., Назарова О. Вища математика. Ч. 1. Елементи лінійної алгебри, векторної алгебри та аналітичної геометрії : навчально-методичний посібник для самостійної роботи. Мелітополь : ФОП Силаєва О. В., 2021. 124 с.

18. Власенко Л. А., Руткас А. А., Руткас А. Г., Чикрій А. О. Стохастична дескрипторна гра переслідування. *Кібернетика та системний аналіз*. 2024. Т. 60, № 3. С. 109–119.

19. Бондар (Головацька) І. А., Нестеренко О. Б., Страх О. П. Слабко збурені системи лінійних інтегро-динамічних рівнянь на часовій шкалі. *Нелінійні коливання*. 2021. Т. 24. С. 3–16.

20. Дільна Н. З., Гром'як М. І., Лещук С. О. Однозначна розв’язність крайових задач для нелінійних функціонально-диференціальних рівнянь дробового порядку. *Нелінійні коливання*. 2021. Т. 24. С. 17–27.

21. Журавльов В. П., Фомін М. П. Крайові задачі з керуванням для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах. *Нелінійні коливання*. 2021. Т. 24. С. 83–98.

22. Каратаєва Т. В., Кошманенко В. Д. Модель конфліктного соціуму з ефектами зовнішнього впливу. *Нелінійні коливання*. 2021. Т. 24. С. 342–362.

23. Городецький В. В., Колісник Р. С., Шевчук Н. М. Нелокальна за часом задача для еволюційного рівняння з оператором дробового диференціювання. *Нелінійні коливання*. 2021. Т. 24. С. 439–459.

24. Сатур О. Р. Залежність поведінки траєкторій динамічних систем конфлікту від вектора взаємодії. *Нелінійні коливання*. 2022. Т. 25, № 1. С. 189–206.

25. Lystopadova V., Khalaim D. Application of Lanchester's mathematical laws in military strategy. *Osvita. Innovatyka. Praktyka – Education. Innovation. Practice,* 2023. Vol. 11, No 8. S. 44-50.

26. Каратаєва Т. В., Кошманенко В. Д. Рівноважні стани динамічної системи конфлікту для трьох гравців з циклічним запізненням. *Нелінійні коливання*. 2022. Т. 25, № 1. С. 207–225.

27. Нужна О., Садовська І., Тлучкевич Н. Практичні аспекти застосування теорії ігор в оптимізації оподаткування діяльності суб’єктів господарювання. *Галицький економічний вісник – Galician economic journal*. 2025. № 4(95). С. 60–65.

28. Вишневський О. О. Застосування теорії ігор у моделюванні конкурентних стратегій підприємств. *Трансформація менеджменту в умовах глобальної макроекономічної нестабільності : матеріали III Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти та молодих учених* (м. Миколаїв, 19–21 березня 2025 р.). 2025. С. 32–35.

29. Федорович Д. П. Застосування теорії ігор для побудови смарт-суспільства. *Імперативи економічного зростання в контексті реалізації глобальних цілей сталого розвитку : матеріали III Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції* (10 червня 2022 р.). 2022. С. 156–158.

30. Матвієва А. І., Луценко А. В. Математичні методи в теорії ігор. *Прикладні аспекти сучасних міждисциплінарних досліджень : матеріали III*

Міжнародної науково-практичної конференції (м. Вінниця, 01 листопада 2024 р.). 2024. С. 246–247.

31. Глуховський П. О. Нешівська рівновага в іграх з розподілу капіталу. *XII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків* (9–11 травня 2024 р.). 2024. С. 16–17.