УДК 510.62

С. Ю. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО, Н. В. ШАРОНОВА, канд. техн. наук

О КВАНТОРНОЙ АЛГЕБРЕ КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

С помощью предикатов произвольного порядка и алгебраической системы для их формульного описания, названной конечной алгеброй [1], опишем некоторые логические понятия и понятия теории отношений. Введем в конечной алгебре *квантор общности* $\forall xP(x)$ и *квантор существования* $\exists xP(x)$ для предиката $P(x)$. Полагаем

$$\forall xP(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_k), \tag{1}$$

$$\exists xP(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_k). \tag{2}$$

При записи этих формул принято, что переменная x задана в конечной алгебре на множестве $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

Если конечная алгебра понимается как универсальная [2], то только что приведенное определение кванторов становится неэффективным. Дело в том, что области задания для переменных универсальной алгебры четко не очерчены. Отсюда правые части формул (1), (2) должны содержать неопределенно большое число конъюнктивных и дизъюнктивных членов, и поэтому они не могут быть фактически записаны. Эффективное определение кванторов для универсальной алгебры достигается введением фиксированной области $M = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p\}$ для связанной переменной x. По определению принимаем

$$\forall x (x \in M \supset P(x)) = P(\sigma_1) \wedge P(\sigma_2) \wedge \ldots \wedge P(\sigma_p), \tag{3}$$

$$\exists x (x \in M \wedge P(x)) = P(\sigma_1) \vee P(\sigma_2) \vee \ldots \vee P(\sigma_p). \tag{4}$$

Здесь принято $x \in M = x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x^{\sigma_p}$ **(5).** Все приведенные ниже результаты записаны на языке универсальной алгебры с использованием определений (3) и (4).

Принадлежность элемента x множеству X может быть определена следующим образом: $x \in X = \exists F (F \in M \wedge x \in F \wedge X^F)$ **(6).** Здесь F — произвольное множество, на котором задана переменная x. *Включение* и *равенство множеств* определяются в конечной алгебре равенствами

$$X \subseteq Y = \forall x (x \in X \supset x \in Y) \quad \mathbf{(7)}, \quad (X = Y) = X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \quad \mathbf{(8)}.$$

Пересечение $X \cap Y$, объединение $X \cup Y$, разность $X \setminus Y$ и *симметрическая разность $X \dot{-} Y$ множеств* X и Y определяются в конечной алгебре равенствами

$$x \in (X \cap Y) = x \in X \wedge x \in Y \quad \mathbf{(9)}, \quad x \in (X \cup Y) = x \in X \vee x \in Y \quad \mathbf{(10)},$$

$$x \in (X \setminus Y) = x \in X \ominus x \in Y \quad \mathbf{(11)}, \quad x \in (X \dot{-} Y) = x \in X \oplus x \in Y \quad \mathbf{(12)}.$$

Система 2^M всех подмножеств множества M может быть определена предикатом $x \in 2^M = \forall F (F \subseteq M \supset X^F)$ **(13).** Формула (13) дает правильный результат, если область M изменения переменной X охватывает множество 2^M, т. е. $2^M \subseteq M$. *Декартово произведение $M_1 \times M_2 \times \ldots M_n$ множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$* определяем предикатом $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \in M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = x_1 \in M_1 \wedge x_2 \in = M_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in M_n$. **(14)**

Отношение эквивалентности на $M \times M$ определяем предикатом $E(x, y)$, удовлетворяющим условиям *рефлексивности* $\forall x (x \in M \supset \supset E(x, x)) = 1$ **(15),** *симметричности* $\forall x \forall y (x, y \in M \supset (E(x, y) \supset \supset E(y, x))) = 1$ **(16)** и *транзитивности* $\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in M \supset (E(x, y) \wedge \wedge E(y, z) \supset E(x, z))) = 1$. **(17).** *Разбиение R множества M, порождаемое эквивалентностью E*, может быть найдено по формуле

$$R(X(x)) = \exists y (y \in M \wedge X(x)^{E(x, y)}). \tag{18}$$

Рассмотрим функцию $S: M \to R$, которая ставит в соответствие элементу $x \in M$ класс смежности X разбиения R. Функцию $X = S(x)$

назовем *характеристической функцией эквивалентности*, порождаемой разбиением R. Ее можно определить по формуле $(X = S(x)) = \exists G(G \in R \wedge x \in G \wedge X^G)$ **(19).** Вводя предикат $S(x, X) = (X = S(x))$, выразим *эквивалентность* E, *порождаемую разбиением* R: $E(x, y) = \exists X(X \in R \wedge (S(x, X) \sim S(y, X)))$ **(20).** Формулы (19) и (20), вместе взятые, позволяют выразить эквивалентность E через порождающее ее разбиение R.

Систему V *всех разбиений* $\varkappa$ *множества* M зададим предикатом

$$V(\varkappa) = \forall R(R \subseteq 2^M \wedge A(R) \wedge B(R) \wedge C(R) \supset \varkappa^R). \tag{21}$$

В этой формуле предикаты A, B, C выражают характеристические свойства разбиения R множества M. Предикат $A(R) = \forall X(X \in R \supset X \neq \varnothing)$ **(22)** означает, что разбиение R не содержит пустых множеств. Предикат $B(R) = \forall X \forall Y(X, Y \in R \wedge X \neq Y \supset X \cap Y \neq \varnothing)$ **(23)** означает, что множества разбиения R попарно не пересекаются. Предикат $C(R) = \forall x(x \in M \supset \exists X(x \in X \wedge X \in R)) \wedge \forall X(X \in R \supset X \subseteq M)$ **(24)** означает, что объединение всех множеств разбиения R совпадает с множеством M.

Рассмотрим предикаты второго порядка простейшего вида $P(X(x))$ с областью задания M, представляющей собой семейство всех одноместных предикатов, заданных на конечном множестве букв $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Согласно формуле (3) из работы [3] любой предикат можно представить в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы:

$$P(X(x)) = \bigvee_{P(\Omega(x))=1} X(x)^{\Omega(x)}. \tag{25}$$

Здесь $X(x)^{\Omega(x)}$ — предикат второго порядка узнавания фиксированного предиката первого порядка $\Omega(x)$. В правой части равенства (25) логическое суммирование ведется по всевозможным предикатам $\Omega(x)$, удовлетворяющим условию $P(\Omega(x)) = 1$. Аналогичным образом согласно формуле (30) из работы [3] произвольный предикат можно представить в виде совершенной конъюнктивной нормальной формы:

$$P(X(x)) = \bigwedge_{P(\Omega(x))=0} X(x)^{\overline{\Omega(x)}}. \tag{26}$$

В правой части равенства (26) логическое перемножение ведется по всевозможным предикатам $\Omega(x)$, удовлетворяющим условию $P(\Omega(x)) = 0$.

В рамках дизъюнктивной алгебры предикаты вида $X(x)^{\Omega(x)}$ **(27).** являются элементарными. Однако в другой алгебраической системе они могут оказаться неэлементарными. В такой системе предикаты вида (27) можно будет записать некоторой формулой, выразив их через иные элементарные предикаты. Искомую формулу, выражающую предикаты вида (27), получим, пользуясь понятием квантора общности. Это позволит в дальнейшем естественным образом подойти к построению кванторной алгебры конечных предикатов.

Квантором общности предиката $X(x)$, заданного на области $M = \{a_1\, a_2, \ldots, a_k\}$, называют выражение $\forall x X(x) = X(a_1) X(a_2) \ldots \ldots X(a_k)$ **(28).** Имеет место следующее равенство:

$$X(x)^{\Omega(x)} = \forall x (X(x) \sim \Omega(x)). \tag{29}$$

Действительно, если $X(x)^{\Omega(x)} = 1$, то $X(x) \equiv \Omega(x)$, откуда следует $\forall x (X(x) \sim \Omega(x)) = 1$. Если же $X(x)^{\Omega(x)} = 0$, то $X(x) \not\equiv \Omega(x)$, а значит $\forall x (X(x) \sim \Omega(x)) = 0$.

Нетрудно видеть, что при фиксированном значении переменной x

$$X(x) \sim \Omega(x) = \begin{cases} X(x), \text{ если } \Omega(x) = 1, \\ \overline{X(x)}, \text{ если } \Omega(x) = 0. \end{cases} \tag{30}$$

Обозначая $X(x) = X^1(x)$, $\overline{X(x)} = X^0(x)$ **(31),** согласно (29), имеем

$$X(x)^{\Omega(x)} = X^{\Omega(a_1)}(a_1) \cdot X^{\Omega(a_2)}(a_2) \cdot \ldots \cdot X^{\Omega(a_k)}(a_k). \tag{32}$$

Формула, стоящая в правой части равенства (32), задает предикаты вида (27) в некоторой новой алгебраической системе. В ней операции отрицания и конъюнкции действуют на выражения $X(a_1)$, $X(a_2)$, $\ldots$, $X(a_k)$. Выражения $X(a_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — это предикаты второго порядка $a_i(X(x))$, определяемые следующим образом:

$$a_i(X(x)) = \begin{cases} 1, \text{ если } X(a_i) = 1, \\ 0, \text{ если } X(a_i) = 0, \end{cases} \tag{33}$$

проще говоря, $a_i(X(x)) = X(a_i)$ **(34).** Подставляя (32) в (25), получаем

$$P(X(x)) = \bigvee_{P(\Omega(x))=1} X^{\Omega(a_1)}(a_1) \cdot X^{\Omega(a_2)}(a_2) \cdot \ldots \cdot X^{\Omega(a_k)}(a_k). \tag{35}$$

Более кратко равенство (35) можно записать с использованием квантора общности:

$$P(X(x)) = \bigvee_{P(\Omega(x))=1} \forall x X^{\Omega(x)}(x). \tag{36}$$

Правая часть равенства (36) — произвольный предикат второго порядка $P(X(x))$ в некоторой алгебраической системе, которую мы назовем *кванторной алгеброй конечных предикатов второго порядка*. Как видно из формулы (34), в этой алгебре в роли элементарных предикатов выступают предикаты второго порядка $X(a_1)$, $X(a_2)$, ..., $X(a_k)$, а в роли элементарных операций — отрицание, конъюнкция и дизъюнкция предикатов.

Подставляя (32) в (26), получаем другой способ представления произвольного предиката второго порядка $P(X(x))$ в кванторной алгебре:

$$P(X(x)) \bigwedge_{P(\Omega(x))=0} \exists x \overline{X^{\Omega(x)}}(x). \tag{37}$$

Кванторную алгебру конечных предикатов второго порядка определяем как булеву алгебру. В качестве основного множества в ней используем систему N всех одноместных предикатов второго порядка

$N = \{P_1(X(x)), P_2(X(x)), \ldots, P_{2^{2(k)}}(X(x))\}$. В роли нуля — тождественно равный нулю предикат. На множестве N определяем операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции. Понятие формулы в кванторной алгебре индуктивно определяем с помощью следующих правил: 1) символы 0 и 1 называем формулами; 2) выражения $X(a_1)$, $X(a_2), \ldots, X(a_k)$ называем формулами; 3) если выражения A и B — формулы, то формулами называем также выражения $\overline{A}$, $(A \vee B)$ и $(A \wedge B)$.

Каждую формулу интерпретируем как некоторый фиксированный конечный предикат второго порядка. Закон соответствия между формулами и обозначаемыми ими предикатами определяем следующими правилами. 1) Формула 0 обозначает предикат, тождественно равный нулю. 2) Формула 1 обозначает предикат, тождественно равный единице. 3) Формула $X(a_i)$ $(i = 1,2, \ldots, k)$ обозначает предикат второго порядка $P(X(x))$, обращающийся в единицу на всех предикатах первого порядка, для которых $X(a_i) = 1$, и в нуль — на остальных. 4) Пусть формула A обозначает предикат $P(X(x))$, а формула B — предикат $Q(X(x))$. Тогда формула $\overline{A}$ обозначает предикат, равный нулю для всех тех значений аргумента $X(x)$, при которых $P = 1$, и равный единице — в остальных случаях; формула $(A \vee B)$ обозначает предикат, равный нулю для всех тех значений аргумента, при которых $P = 0$, $Q = 0$, и равный единице — для остальных значений; формула $(A \wedge B)$ обозначает предикат, равный единице для всех тех значений аргумента, при которых $P = 1$ и $Q = 1$, и равный нулю — для остальных значений.

С каждым предикатом первого порядка $X(x)$ можно взаимно однозначно связать некоторое конечное множество X по следующему правилу: $x \in X$, если $X(x) = 1$; $x \notin X$, если $X(x) = 0$. С каждым предикатом второго порядка $P(X(x))$ можно взаимно однозначно связать некоторую конечную систему конечных множеств P по следующему правилу: $X \in P$, если $P(X(x)) = 1$; $X \notin P$, если $P(X(x)) = 0$. Таким образом, формулами дизъюнктивной алгебры конечных предикатов первого порядка можно описывать конечные множества, а формулами кванторной алгебры конечных предикатов второго порядка — конечные системы конечных множеств. Ниже приводятся примеры формальной записи конечных систем конечных множеств на языке кванторной алгебры конечных предикатов.

Пример 1. Записать систему множеств $\{\{a, b\}\}$, состоящую из единственного множества $\{a, b\}$. В качестве множества M принять множество $\{a, b, c, d, e, f\}$.

Решение. Используем формулу (35). Ставим в соответствие множеству $\{a, b\}$ предикат $x^a \vee x^b$. Системе множеств $\{\{a, b\}\}$ соответствует предикат второго порядка $P(X(x))$, обращающийся в единицу на предикате $X(x) = x^a \vee x^b$ и в нуль — на всех остальных предикатах с областью задания M. Уравнение $P(\Omega(x)) = 1$ имеет единственное решение $\Omega(x) \equiv x^a \vee x^b$. По формуле (35) находим $P(X(x)) = X^{\Omega(a)}(a) \times$ $\times X^{\Omega(b)}(b) \cdot X^{\Omega(c)}(c) \cdot X^{\Omega(d)}(d) \cdot X^{\Omega(l)}(e) \cdot X^{\Omega(f)}(f)$. Вычисляем значения показателей в правой части последнего равенства: $\Omega(a) = a^a \vee a^b = 1$,

$\Omega(b) = 1, \Omega(c) = \Omega(d) = \Omega(e) = \Omega(f) = 0$. Окончательно имеем: $P(X(x)) = X(a) \cdot X(b) \cdot \overline{X(c)} \cdot \overline{X(d)} \cdot \overline{X(e)} \cdot \overline{X(f)}$ **(а)**. В дизъюнктивной алгебре этот же предикат запишется в виде $P(X(x)) = X(x)^{x^a \vee x^b}$ **(б)**

Пример 2. Принимая $M = \{a, b, c, d\}$, записать систему всех подмножеств множества $\{a, b, c\}$.

Решение. Уравнение $P(\Omega(x)) = 1$ в данном случае имеет 8 решений: $\Omega_1(x) = 0$, $\Omega_2(x) = x^a$, $\Omega_3(x) = x^b$, $\Omega_4(x) = x^c$, $\Omega_5(x) = x^a \vee x^b$, $\Omega_6(x) = x^a \vee x^c$, $\Omega_7(x) = x^b \vee x^c$, $\Omega_8(x) = x^a \vee x^b \vee x^c$. В соответствии с этим по формуле (35) находим

$$P(X(x)) = \overline{X(a)} \cdot \overline{X(b)} \cdot \overline{X(c)} \cdot \overline{X(d)} \vee X(a) \cdot \overline{X(b)} \cdot \overline{X(c)}\, \overline{X(d)} \vee$$
$$\vee \overline{X(a)}\, X(b) \wedge \overline{X(c)} \cdot \overline{X(d)} \vee \overline{X(a)} \cdot \overline{X(b)} \cdot X(c)\, \overline{X(d)} \vee X(a) \cdot X(b) \times$$
$$\times \overline{X(c)} \cdot \overline{X(d)} \vee X(a)\, \overline{X(b)}\, X(c)\, \overline{X(d)} \vee \overline{X(a)} \cdot X(b) \cdot X(c) \times$$
$$\times \overline{X(d)} \vee X(a)\, X(b)\, X(c)\, \overline{X(d)}.$$

После упрощений получаем $P(X(x)) = \overline{X(d)}$ **(в)**. В дизъюнктивной алгебре этот же предикат запишется в виде $P(X(x)) = X(x)^0 \vee X(x)^{x^a} \vee \vee X(x)^{x^b} \vee X(x)^{x^c} \vee X(x)^{x^a \vee x^b} \vee X(x)^{x^a \vee x^c} \vee X(x)^{x^b \vee x^c} \vee X(x)^{x^a \vee x^b \vee x^c}$ **(г)**. Сравнивая формулы (а) и (б), а также (в) и (г), записанные для одних и тех же предикатов в кванторной и дизъюнктивной алгебрах, видим, что они неравноценны по сложности. В одних случаях более короткую формулу дает дизъюнктивная алгебра (пример 1, формула (б)), в других — кванторная (пример 2, формула (в)). Недостатком кванторной алгебры по сравнению с дизъюнктивной является то, что ее формулы в ряде случаев утрачивают смысл без задания области M (пример 2, формула (в)), достоинством — «одноэтажность» ее формул.

Рассмотрим теперь предикаты второго порядка $P(X(x), Y(x))$ с областью задания $M \times M$. Согласно формуле (3) из работы [3] имеем следующую СДНФ для предиката P:

$$P(X(x), Y(x)) = \bigvee_{P(\Omega(x), \Sigma(x))=1} X(x)^{\Omega(x)} Y(x)^{\Sigma(x)}. \tag{39}$$

Воспользовавшись формулой (32), получаем

$$X(x)^{\Omega(x)} = \forall x X^{\Omega(x)}(x), \; Y(x)^{\Sigma(x)} = \forall x X^{\Sigma(x)}(x). \tag{40}$$

Подставляя (40) в (39), находим один из вариантов формульного представления произвольного предиката $P(X(x), Y(x))$ в кванторной алгебре

$$P(X(x), Y(x)) = \bigvee_{P(\Omega(x), \Sigma(x))=1} \forall x X^{\Omega(x)}(x)\, Y^{\Sigma(x)}(x). \tag{41}$$

Другой вариант представления предиката P получаем, отправляясь от его СКНФ:

$$P(X(x), Y(x)) = \bigwedge_{P(\Omega(x), \Sigma(x))=0} \exists x (X^{\overline{\Omega(x)}}(x) \vee Y^{\overline{\Sigma(x)}}(x)). \tag{42}$$

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Об алгебре конечных предикатов произвольного порядка // АСУ и приборы автоматики.— 1983.— Вып. 67.— С. 92—98. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Стандартные формы в конечной