

УДК 519.6:514.1

И. В. Гребенник

МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ НА КОМПОЗИЦИОННЫХ ОБРАЗАХ КОМБИНАТОРНЫХ МНОЖЕСТВ В СИСТЕМАХ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Введение

При разработке интеллектуальных систем поддержки принятия решений различного назначения важную роль играют математические модели объектов, составляющих предметную область, и методы их анализа. Применение математических моделей и методов позволяет повысить эффективность решений, принимаемых с помощью интеллектуальных систем. В настоящее время системы поддержки принятия решений создаются в различных областях, одной из которых является геометрическое проектирование [1].

При решении задач геометрического проектирования актуальной остается проблема создания интеллектуальных систем решения оптимизационных задач размещения. Несмотря на высокий уровень организации архитектуры баз знаний существующих интеллектуальных систем решения задач размещения геометрических объектов, их построение, как правило, основывается на использовании идеализированных математических моделей, когда погрешности метрических характеристик и параметров размещения геометрических объектов не учитываются. Это объясняется недостаточно разработанной фундаментальной основой построения математических моделей и методов решения задач данного класса с учетом погрешностей исходных данных.

Важный класс задач геометрического проектирования составляют экстремальные задачи с дискретными параметрами. Построение математических моделей таких задач основано на применении комбинаторных множеств, составляющих их области допустимых решений [1, 2].

Во многих случаях специфика решаемой задачи требует отражения в модели ее комбинаторной структуры. Эта структура может быть достаточно сложной и не позволять использовать для ее описания классические комбинаторные множества [3]. Для моделирования задач со сложной комбинаторной структурой в [4] введено понятие и предложен способ описания композиционного образа (k -образа) комбинаторных множеств. K -образами комбинаторных множеств являются комбинаторные множества, порождающие элементы которых сами представляют собой элементы других комбинаторных множеств. K -образы комбинаторных множеств могут быть использованы для описания областей допустимых решений экстремальных задач со сложной структурой.

Целью настоящей работы является постановка и решение некоторых классов задач оптимизации на k -образах комбинаторных множеств и применение этих результатов в системах поддержки принятия решений. При этом необходимо предварительно сформировать классы k -образов комбинаторных множеств как областей допустимых решений задач комбинаторной оптимизации.

1. Определение множеств парных перестановок, парных размещений и парных сочетаний с повторениями

Ориентируясь на известные модели задач с дискретными параметрами [1, 2], рассмотрим k -образы комбинаторных множеств, в которых в качестве базовых выступают евклидовы комбинаторные множества перестановок, размещений и сочетаний.

Учет погрешностей при решении задач геометрического проектирования вызывает необходимость построения адекватных математических моделей задач этого класса. Основой для построения моделей задач геометрического проектирования, учитывающих погрешности метрических характеристик и параметров размещения объектов, являются методы интервального анализа [5]. Один из способов анализа интервальных математических моделей основан на их отображении в евклидово пространство [6]. При этом образом каждого интервала в R^N является пара чисел, характеризующих центр и радиус интервала. Для моделирования образов интервальных комбинаторных множеств в R^N построим k -образы комбинаторных множеств парных перестановок, парных размещений и парных сочетаний.

Рассмотрим множество

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{g_1^{\rho_1}, g_2^{\rho_2}, \dots, g_{k_a}^{\rho_{k_a}}\},$$

где $\rho_i \in J_n$, $i \in J_{k_a}$ — кратности элементов множества A , $\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_{k_a} = n$; $g_1 < g_2 < \dots < g_{k_a}$, и множество $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, $a_i \in R^l$, $b_i \in R^l$. Построим множества Z_1, Z_2, \dots, Z_n вида $Z_i = \{(a_i, b_i)\}$, $i \in J_n$. При этом k множеств Z_i из n являются различными, $k_a \leq k \leq n$.

Используя подход, приведенный в [4], сформируем следующие классы k -образов комбинаторных множеств.

1. Композиционный образ комбинаторных множеств $P_{nk}, Z_1, Z_2, \dots, Z_n$; порожденный множе-

ствами $\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \dots, \{a_n, b_n\}$, где P_{nk} — множество перестановок из n элементов, k из которых различны [1, 2]. Обозначим такой k -образ множеств через $PI_{nk}(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ или PI_{nk} и назовем множеством парных перестановок.

2. Композиционный образ комбинаторных множеств $A_{nk}^m, Z_1, Z_2, \dots, Z_n$, порожденный множествами $\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \dots, \{a_n, b_n\}$. Здесь A_{nk}^m — общее множество размещений из n элементов, k из которых различны, по m [2]. Такой k -образ множеств обозначим через $AI_{nk}^m(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ или AI_{nk}^m и назовем множеством парных размещений.

3. Композиционный образ комбинаторных множеств $\bar{C}_n^m, Z_1, Z_2, \dots, Z_n$, порожденный множествами $\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \dots, \{a_n, b_n\}$, где $Z_i = \{(a_i, b_i)\}$ различны, $i \in J_n$. Здесь \bar{C}_n^m — множество сочетаний с повторениями из n различных элементов по m [2], причем для любого $h = (g_1, g_2, \dots, g_m) \in \bar{C}_n^m$ справедливо $g_i \leq g_{i+1} \leq \dots \leq g_m$. Предположим, что кратности ρ_i элементов g_1, g_2, \dots, g_m множества A равны $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = m$, а множество B имеет вид: $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} = \{e_1^{\rho_1}, e_2^{\rho_2}, \dots, e_n^{\rho_n}\}$, $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_n = m$. При этом множества Z_i можно представить как $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_m = \{(g_1, e_1)\}$, $Z_{m+1} = Z_{m+2} = \dots = Z_{2m} = \{(g_2, e_2)\}$, ..., $Z_{n-m+1} = Z_{n-m+2} = \dots = Z_n = \{(g_n, e_n)\}$. Этот k -образ множеств обозначим $\bar{CI}_n^m(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ или \bar{CI}_n^m и назовем множеством парных сочетаний с повторениями.

2. Постановка задачи

Пусть X -композиционный образ комбинаторных множеств [4], $X \in \{PI_{nk}, AI_{nk}^m, \bar{CI}_n^m\}$. Рассмотрим задачу оптимизации

$$\Phi(h) \rightarrow \min_{h \in X}, \tag{1}$$

$$h \in H \subseteq X,$$

где $\Phi: X \rightarrow R^1$ — некоторый функционал.

В результате погружения f множества X в R^N [1, 2] сформулируем задачу оптимизации функции $\varphi(x)$, эквивалентную (1):

$$\varphi(x) \rightarrow \min, \tag{2}$$

$$x \in E_f \subseteq E,$$

где $\varphi: E \rightarrow R^1$ — функция N переменных, определенная на множестве $E \subset R^N$; $E = f(X)$ — образ множества X в пространстве R^N ; $\varphi(x) = \Phi(h)$ при $x = f(h), \forall h \in H$.

3. Задачи с линейной целевой функцией без дополнительных ограничений

Рассмотрим случай, когда в задаче (2) функция $\varphi(x)$ является линейной, а в качестве множества E выступают образы множеств парных перестановок

новок EI_{nk} , парных размещений EI_{nk}^m , парных сочетаний с повторениями \bar{EI}_n^m в пространстве R^N :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^N c_i x_i \rightarrow \min, \tag{3}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in E \subset R^N$; $c_i \in R^1$; $i \in J_N$.

Отметим, что задачи минимизации линейных функций на евклидовых комбинаторных множествах исследовались ранее [7–9]. Распространим изложенный в этих работах подход на задачу оптимизации вида (3).

Пусть множество E в задаче (3) представляет собой множество парных перестановок EI_{nk} . Тогда задача оптимизации примет вид:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^w c_i x_i \rightarrow \min, \tag{4}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_w) \in EI_{nk} \subset R^w$; $w = 2n$; $c = (c_1, c_2, \dots, c_w) \in R^w$.

Напомним, что координаты точек множества EI_{nk} принимают значения всевозможных перестановок пар (a_i, b_i) , где $a_i \in A, b_i \in B, i \in J_n$. Зададим на множестве пар (a_i, b_i) следующее бинарное отношение:

$$((a_j, b_j)_c \prec (a_k, b_k)_c) \Leftrightarrow ((c_{2j-1} - c_{2k-1})(a_j - a_k) + (c_{2j} - c_{2k})(b_j - b_k) \leq 0), \tag{5}$$

где $c \in R^w$ — вектор коэффициентов функции цели задачи (4), $i, j, i_k \in J_n, j, k \in J_n$.

Отметим некоторые свойства введенного отношения.

1. Из структуры соотношения (5) и произвольности выбора пар $(a_j, b_j), (a_k, b_k)$ следует, что любые две пары из множества $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)\}$ сравнимы между собой по отношению \prec_c .

2. Отношение \prec_c рефлексивно, так как для него выполняется условие $(a_j, b_j)_c \prec_c (a_j, b_j)_c$. Это следует из того, что

$$(c_{2j-1} - c_{2j-1})(a_j - a_j) + (c_{2j} - c_{2j})(b_j - b_j) = 0.$$

3. Отношение \prec_c антисимметрично, поскольку для него справедливо соотношение

$$((a_j, b_j)_c \prec_c (a_k, b_k)_c) \& ((a_k, b_k)_c \prec_c (a_j, b_j)_c) \Rightarrow ((a_k, b_k)_c = (a_j, b_j)_c).$$

Его справедливость вытекает из того, что неравенства

$$(c_{2j-1} - c_{2k-1})(a_j - a_k) + (c_{2j} - c_{2k})(b_j - b_k) \leq 0,$$

$$(c_{2k-1} - c_{2j-1})(a_k - a_j) + (c_{2k} - c_{2j})(b_k - b_j) \leq 0$$

могут одновременно выполняться только при $a_j = a_k, b_j = b_k$.

Выстроим пары (a_i, b_i) в соответствии с отношением (5). Пусть последовательность $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ такова, что

$$(a_{i_1}, b_{i_1}) \prec_c (a_{i_2}, b_{i_2}) \prec_c \dots \prec_c (a_{i_n}, b_{i_n}). \quad (6)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Минимум линейной функции $\varphi(x)$ задачи (4) на множестве EI_{nk} , порожденном множествами $Z_i = \{a_i, b_i\}$, $i \in J_n$, достигается в точке

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_w^*) \in EI_{nk}, \quad (7)$$

где $x_{2j-1}^* = a_{i_j}$; $x_{2j}^* = b_{i_j}$; $i_j \neq i_t$ при $t \neq j$, $i_j \in J_n$, $j \in J_n$, а последовательность $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ удовлетворяет (6).

Доказательство. Предположим противное, пусть минимум функции $\varphi(x)$ задачи (4) на множестве EI_{nk} достигается в точке $y \in EI_{nk}$, отличной от x^* вида (7). Это значит, что можно указать такое значение $p \in J_w$, что $x_j^* = y_j$, $j \in J_{p-1}$, $x_p^* \neq y_p$. Рассмотрим два случая.

1. $p \in I'_w = \{1, 3, \dots, w-1\}$. Тогда существует такое $q \in I'_w$, $q > p$, что $y_q = x_p^*$, $y_{q+1} = x_{p+1}^*$. В векторе y выполним транспозиции значений координат y_p и y_q , y_{p+1} и y_{q+1} . Полученный вектор обозначим \bar{y} . Очевидно, $\bar{y} \in EI_{nk}$. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{y}) - \varphi(y) &= c_p y_q + c_{p+1} y_{q+1} + c_q y_p + c_{q+1} y_{p+1} - \\ &\quad - c_p y_p - c_{p+1} y_{p+1} - c_q y_q - c_{q+1} y_{q+1} = \\ &= (c_p - c_q)(y_q - y_p) + (c_{p+1} - c_{q+1})(y_{q+1} - y_{p+1}) = \\ &= (c_p - c_q)(x_p^* - y_p) + (c_{p+1} - c_{q+1})(x_{p+1}^* - y_{p+1}). \end{aligned}$$

В соответствии с (6), (7) $x_p^* = a_{i_t}$, $x_{p+1}^* = b_{i_t}$, где $t = \frac{p+1}{2}$, $y_p = a_{i_d}$, $y_{p+1} = b_{i_d}$, причем $d > t$, $d, t \in J_n$. Тогда

$$\varphi(\bar{y}) - \varphi(y) = (c_p - c_q)(a_i - a_{i_d}) + (c_{p+1} - c_{q+1})(b_i - b_{i_d}).$$

Согласно (6), (7) $(a_i, b_i) \prec_c (a_{i_d}, b_{i_d})$, поэтому $\varphi(\bar{y}) - \varphi(y) \leq 0$. Это противоречит предположению о достижении в точке $y \in EI_{nk}$ минимума функции $\varphi(x)$ задачи (4).

2. $p \in I''_w = \{2, 4, \dots, w\}$. В этом случае можно указать такое $q \in I''_w$, $q > p$, что $y_q = x_p^*$, $y_{q-1} = x_{p-1}^*$. Проводя аналогичные случаю 1 построения, получим противоречие.

На основании противоречий, полученных в случаях 1 и 2, приходим к справедливости утверждения теоремы.

Результаты теоремы 1 можно применить при решении следующей задачи: $\psi(y) = \|y - d\|^2 \rightarrow \min$, $y \in EI_{nk}$, где $d = (d_1, d_2, \dots, d_w) \in R^w$. Для $\psi(y)$ при $y \in EI_{nk}$ справедливо:

$$\begin{aligned} \psi(y) &= \|y - d\|^2 = \sum_{i=1}^w y_i^2 + \sum_{i=1}^w d_i^2 - 2 \sum_{i=1}^w d_i y_i = \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) + \sum_{i=1}^w d_i^2 - 2 \sum_{i=1}^w d_i y_i, \end{aligned}$$

$$\min_{y \in EI_{nk}} \psi(y) = \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) + \sum_{i=1}^w d_i^2 + 2 \min_{y \in EI_{nk}} \sum_{i=1}^w d_i^* y_i,$$

где $d_i^* = -d_i$, $i \in J_w$.

В соответствии с теоремой 1 минимум в правой части достигается в точке $y^* \in EI_{nk}$, где $y_{2j-1}^* = a_{i_j}$, $y_{2j}^* = b_{i_j}$, $i_j \neq i_t$ при $t \neq j$, $i_j \in J_n$, $j \in J_n$, а последовательность $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ удовлетворяет соотношению $(a_{i_1}, b_{i_1}) \prec_{d^*} (a_{i_2}, b_{i_2}) \prec_{d^*} \dots \prec_{d^*} (a_{i_n}, b_{i_n})$, то есть

$$\min_{y \in EI_{nk}} \|y - d\|^2 = \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) + \sum_{i=1}^w d_i^2 + 2 \sum_{i=1}^w d_i^* y_i^*. \quad (8)$$

Рассмотрим задачу оптимизации вида $\psi(y) = \|y - d\|^2 \rightarrow \max$, $d = (d_1, d_2, \dots, d_w) \in R^w$, $y \in EI_{nk}$.

По аналогии с выводом соотношения (8) получим:

$$\begin{aligned} \max_{y \in EI_{nk}} \|y - d\|^2 &= \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) + \sum_{i=1}^w d_i^2 + \max_{y \in EI_{nk}} (-2 \sum_{i=1}^w d_i y_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) + \sum_{i=1}^w d_i^2 - \min_{y \in EI_{nk}} (2 \sum_{i=1}^w d_i y_i). \end{aligned}$$

На основании теоремы 1 минимум в правой части равенства достигается в точке $\bar{y} \in EI_{nk}$, где $\bar{y}_{2j-1} = a_{i_j}$, $\bar{y}_{2j} = b_{i_j}$, $i_j \neq i_t$ при $t \neq j$, $i_j \in J_n$, $j \in J_n$, а последовательность $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ удовлетворяет соотношению $(a_{i_1}, b_{i_1}) \prec_d (a_{i_2}, b_{i_2}) \prec_d \dots \prec_d (a_{i_n}, b_{i_n})$, то есть

$$\max_{y \in EI_{nk}} \|y - d\|^2 = \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) + \sum_{i=1}^w d_i^2 - 2 \sum_{i=1}^w d_i \bar{y}_i. \quad (9)$$

Предположим теперь, что $d \in R^w$ является элементом множества EI_{nk} . Тогда справедливо соотношение $\sum_{i=1}^w d_i^2 = \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2)$. Значит,

$$\begin{aligned} \max_{y \in EI_{nk}} \|y - d\|^2 &= 2 \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) - 2 \sum_{i=1}^w d_i \bar{y}_i = \\ &= C - 2 \sum_{i=1}^w d_i \bar{y}_i. \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим функцию $l_d(y) = \sum_{i=1}^w d_i y_i$, где $d \in EI_{nk}$. Покажем, что минимальное значение $l_d(y)$ на множестве EI_{nk} не зависит от выбора вектора коэффи-

циентов $d \in EI_{nk}$ и равно $Q = \sum_{i=1}^w d_i \tilde{y}_i$, где $\tilde{y} \in EI_{nk}$ удовлетворяет соотношению (9). С этой целью введем функцию $l_d^1(y) = \sum_{i=1}^w d_i^1 y_i$, где $d^1 \in EI_{nk}$, $d^1 \neq d$.

Поскольку d^1 можно получить из d путем конечного числа транспозиций, изменим порядок суммирования слагаемых в выражении для $l_d^1(y)$ таким образом, чтобы выполнялось условие

$l_d^1(y) = \sum_{j=1}^w d_{i_j}^1 y_j$, $d_{i_j}^1 = d_j$, $j \in J_w$. Но тогда, поскольку $y \in EI_{nk}$ принимает значения всевозможных перестановок пар $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$, то

$$\min_{y \in EI_{nk}} l_d(y) = \min_{y \in EI_{nk}} l_d^1(y) = Q,$$

что и требовалось показать. Это значит, что для любой точки $d \in EI_{nk}$ расстояние до наиболее удаленной от нее точки множества EI_{nk} является величиной постоянной, ее значение определяется соотношением (10) и равно $D = \sqrt{C - 2Q}$, где

$C = 2 \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2)$, а $Q = \sum_{i=1}^w d_i \tilde{y}_i$. Приведенные рассуждения доказывают справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. Диаметр множества EI_{nk} равен

$diam EI_{nk} = \sqrt{2 \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) - 2 \sum_{i=1}^w y_i^0 \tilde{y}_i}$, где y^0 — произвольный элемент множества EI_{nk} , а $\tilde{y} \in EI_{nk}$ удовлетворяет условиям $\tilde{y}_{2j-1} = a_{i_j}$, $\tilde{y}_{2j} = b_{i_j}$, $i_j \neq i_t$ при $t \neq j$, $i_j \in J_n$, $j \in J_w$, последовательность $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ удовлетворяет соотношению $(a_{i_1}, b_{i_1}) \prec_{y^0} (a_{i_2}, b_{i_2}) \prec_{y^0} \dots \prec_{y^0} (a_{i_n}, b_{i_n})$.

Пусть теперь множество E в задаче (3) представляет собой множество EI_{nk}^m парных размещений из n элементов, k из которых различны, по m . Тогда задача (3) примет следующий вид:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^v c_i x_i \rightarrow \min, \quad (11)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_v) \in EI_{nk}^m \subset R^v$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_v) \in R^v$, $v = 2m$.

Воспользуемся следующей особенностью множества EI_{nk}^m . Из комбинаторных свойств базового комбинаторного множества AI_{nk}^m , порожденного действительными числами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, следует [9], что оно является объединением множеств перестановок $P_{mk_i}^{(i)}$. При этом, каждое множество $P_{mk_i}^{(i)}$ порождается одним неупорядоченным m -элементным набором $\{\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_m}\} \subset \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. Количе-

чество M множеств перестановок $P_{mk_i}^{(i)}$ равно числу всевозможных неупорядоченных наборов из n элементов, k из которых различны, по m . Число M не превосходит числа сочетаний с повторениями из n элементов по m :

$$M \leq \binom{n+m-1}{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Распространим указанные свойства множества AI_{nk}^m на множество парных размещений EI_{nk}^m . Представим множество EI_{nk}^m в виде объединения множеств парных перестановок $EI_{mk_i}^{(i)}$, $i \in J_M$. При этом каждое множество $EI_{mk_i}^{(i)} \subset R^v$ порождается неупорядоченным множеством

$$G^{(i)} = \{(a_{j_1}, b_{j_1}), (a_{j_2}, b_{j_2}), \dots, (a_{j_m}, b_{j_m})\} \subset \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)\}. \quad (12)$$

Количество M множеств перестановок $EI_{mk_i}^{(i)}$ не превышает числа сочетаний с повторениями из n элементов по m и зависит от количества k_i различных пар в множестве $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)\}$. Таким образом,

$$EI_{mk}^m = \bigcup_{i=1}^M EI_{mk_i}^{(i)}, \quad (13)$$

$$\forall \{j_1, j_2, \dots, j_m\} \subset J_n \quad EI_{mk_i}^{(i)} = EI_{mk_i}^{(i)}(G^{(i)}) = EI_{mk_i}^{(i)}(\{(a_{j_1}, b_{j_1}), (a_{j_2}, b_{j_2}), \dots, (a_{j_m}, b_{j_m})\}).$$

Рассмотрим множество $G^{(i)}$ вида (12). Зададим на множестве пар $(a_{j_t}, b_{j_t}) \in G^{(i)}$, $t \in J_m$, отношение порядка, аналогичное (5):

$$((a_{j_t}, b_{j_t}) \prec_c (a_{j_s}, b_{j_s})) \Leftrightarrow ((c_{2t-1} - c_{2s-1})(a_{j_t} - a_{j_s}) + (c_{2t} - c_{2s})(b_{j_t} - b_{j_s}) \leq 0). \quad (14)$$

Упорядочим элементы множества $G^{(i)}$ в соответствии с отношением порядка (14). Пусть последовательность $\{j_1, j_2, \dots, j_m\} \subset J_n$ такова, что

$$(a_{j_1}, b_{j_1}) \prec_c (a_{j_2}, b_{j_2}) \prec_c \dots \prec_c (a_{j_m}, b_{j_m}). \quad (15)$$

Теорема 3. Минимум линейной функции $\varphi(x)$ задачи (11) на множестве EI_{nk}^m , порожденном множествами $Z_i = \{a_i, b_i\}$, $i \in J_n$, достигается в точке $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_w^*) \in EI_{nk}^m$, такой, что

$$x^* = \arg \min_{i \in J_M} \varphi(y^i), \quad y^i = \arg \min_{y \in EI_{mk_i}^{(i)}(G^{(i)})} \varphi(y),$$

где $G^{(i)}$ — множество вида (12); $y_{2r-1}^i = a_{j_r}$; $y_{2r}^i = b_{j_r}$; $j_r \neq j_s$ при $s \neq r$, $j_r \in J_n$, $t_r \in J_m$, $r \in J_m$, а $\{j_1, j_2, \dots, j_{t_m}\} \subset J_n$ удовлетворяет (15).

Доказательство. Воспользуемся декомпозицией множества EI_{nk}^m вида (13). Применяя к каждому множеству $EI_{mk_i}^{(i)}$ теорему 1 и выбирая среди точек y^i минимума $\varphi(y)$ на $EI_{mk_i}^{(i)}$ точку с минимальным значением $\varphi(y)$, приходим к справедливости утверждения.

Используя теорему 3, получим решение задачи

$$\psi(y) = \|y - d\|^2 \rightarrow \min, \quad y \in EI_{nk}^m,$$

где $d = (d_1, d_2, \dots, d_v) \in R^v$, $v = 2m$.

Проводя построения, аналогичные выполненным при доказательстве теоремы 3 и опираясь на теорему 1, получим:

$$y^0 = \operatorname{argmin}_{i \in J_M} \|y^i - d\|^2, \quad y^{(i)} = \operatorname{argmin}_{y \in EI_{mk_i}^{(i)}(G^{(i)})} \|y - d\|^2,$$

где $y_{2r-1}^i = a_{j_r}$, $y_{2r}^i = b_{j_r}$, $j_r \neq j_s$ при $s \neq r$, $j_r \in J_n$, $t_r \in J_m$, $r \in J_m$, а последовательность $\{j_1, j_2, \dots, j_{t_m}\} \subset J_n$ удовлетворяет (15).

Точное решение задачи оптимизации (11) описанным выше способом при больших n и m требует достаточно высоких вычислительных затрат, что не всегда является приемлемым. Рассмотрим способ получения оценки минимума линейной функции на множестве EI_{nk}^m .

Учтем, что в точках $x \in EI_{nk}^m$ координаты $x_i, i \in I'_v, I'_v = \{1, 3, \dots, v-1\}$, принимают значения из множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, а координаты $x_i, i \in I''_v, I''_v = \{2, 4, \dots, v\}$, — значения из множества $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Из способа построения множества EI_{nk}^m следует, что оно является подмножеством множества $EA_w^v \subset R^v$, которое определяется следующим образом. Для любого $x \in EA_w^v$ координаты $x_i, i \in I'_v$, принимают значения размещений из n элементов множества A по m , а координаты $x_i, i \in I''_v$ — значения размещений из n элементов множества B по m , то есть $EI_{nk}^m \subset EA_w^v, w = 2n, v = 2m$. Тогда выражение для $\varphi(x)$ можно записать в виде:

$$\varphi(x) = \sum_{i \in I'_v} c_i x_i + \sum_{i \in I''_v} c_i x_i = \sum_{i=1}^m \bar{c}_i y_i + \sum_{i=1}^m \tilde{c}_i z_i,$$

где $y \in R^m, z \in R^m, \bar{c}_i = c_{2i-1}, \tilde{c}_i = c_{2i}, i \in J_m$.

Поскольку $EI_{nk}^m \subset EA_w^v$, то

$$\begin{aligned} \min_{x \in EI_{nk}^m} \varphi(x) &\geq \min_{x \in EA_w^v} \varphi(x) = \min_{y \in EI_{nk_a}^m(A)} \sum_{i=1}^m \bar{c}_i y_i + \\ &+ \min_{z \in EI_{nk_b}^m(B)} \sum_{i=1}^m \tilde{c}_i z_i, \end{aligned}$$

где k_a, k_b — количества различных элементов во множествах A и B соответственно.

Решение задачи оптимизации линейной функции $\Phi(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$ на множестве E_{nk}^m , порожденном множеством $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$, приведено в [2, 8]. Оно достигается в точке $x^* \in E_{nk}^m$, где $x_{p_i}^* = \beta_{l_i}, i \in J_s, x_{p_i}^* = \beta_{l_{n-r+i}}, i \in J_r, s+r=m; \beta_{l_1} \leq \beta_{l_2} \leq \dots \leq \beta_{l_n}; \alpha_{p_1} \geq \alpha_{p_2} \geq \dots \geq \alpha_{p_s} \geq 0 > \alpha_{p_{s+1}} \geq \dots \geq \alpha_{p_m}$.

Определяя таким образом минимумы в правой части неравенства, получим искомую оценку. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 4. Пусть функция $\varphi(x) = \sum_{i=1}^v c_i x_i$ определена в точках множества $EI_{nk}^m \subset R^v$, порожденного множествами $Z_i = \{a_i, b_i\}, i \in J_n$. Тогда

$$\min_{x \in EI_{nk}^m} \varphi(x) \geq \sum_{i=1}^m \bar{c}_i y_i^* + \sum_{i=1}^m \tilde{c}_i z_i^*, \quad (16)$$

где $\bar{c}_i = c_{2i-1}; \tilde{c}_i = c_{2i}; i \in J_m; y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*); y_{p_i}^* = a_{l_i}, i \in J_s, y_{p_i}^* = a_{l_{n-r+i}}, i \in J_r, s+r=m$, последовательности $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ и $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ таковы, что

$$a_{l_1} \leq a_{l_2} \leq \dots \leq a_{l_n}, \quad (17)$$

где $\bar{c}_{p_1} \geq \bar{c}_{p_2} \geq \dots \geq \bar{c}_{p_s} \geq 0 > \bar{c}_{p_{s+1}} \geq \dots \geq \bar{c}_{p_m}, z^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_m^*), z_{q_i}^* = b_{h_i}, i \in J_t, z_{q_i}^* = b_{h_{n-d+i}}, i \in J_d, t+d=m$. Последовательности $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ и $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ таковы, что

$$b_{h_1} \leq b_{h_2} \leq \dots \leq b_{h_n}, \quad (18)$$

$$\tilde{c}_{q_1} \geq \tilde{c}_{q_2} \geq \dots \geq \tilde{c}_{q_t} \geq 0 > \tilde{c}_{q_{t+1}} \geq \dots \geq \tilde{c}_{q_m}.$$

Используя оценку (16), получим оценку минимума $\psi(x) = \|x - d\|^2$, где $d \in R^v$, на множестве EI_{nk}^m . Имеем

$$\psi(x) = \|x - d\|^2 = \sum_{i=1}^v x_i^2 + \sum_{i=1}^v d_i^2 - 2 \sum_{i=1}^v d_i x_i.$$

Поскольку для любого $x \in EI_{nk}^m$ координаты $x_i, i \in I'_v$, принимают значения из множества A , а координаты $x_i, i \in I''_v$, — значения из множества B , то справедливо неравенство:

$$\min_{x \in EI_{nk}^m} \sum_{i=1}^v x_i^2 = \min_{x \in EI_{nk}^m} \left(\sum_{i \in I'_v} x_i^2 + \sum_{i \in I''_v} x_i^2 \right) \geq \sum_{i=1}^m a_{k_i}^2 + \sum_{i=1}^m b_{s_i}^2,$$

где $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ и $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ таковы, что

$$|a_{k_1}| \leq |a_{k_2}| \leq \dots \leq |a_{k_n}|, |b_{s_1}| \leq |b_{s_2}| \leq \dots \leq |b_{s_n}|. \quad (19)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \min_{x \in EI_{nk}^m} \psi(x) = \min_{x \in EI_{nk}^m} \|x - d\|^2 &\geq \sum_{i=1}^m (a_{k_i}^2 + b_{s_i}^2) + \\ &+ \sum_{i=1}^v d_i^2 + 2 \min_{x \in EI_{nk}^m} \sum_{i=1}^v d_i^* x_i, \end{aligned}$$

где $d_i^* = -d_i, i \in J_v$.

Применяя результаты теоремы 4 в правой части неравенства, получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \min_{x \in EI_{nk}^m} \|x - d\|^2 &\geq \sum_{i=1}^m (a_{k_i}^2 + b_{s_i}^2) + \sum_{i=1}^v d_i^2 + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^m (\bar{d}_i^* y_i^0 + \bar{d}_i^* z_i^0), \end{aligned} \quad (20)$$

где $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ и $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ удовлетворяют (19); $\bar{d}_i^* = d_{2i-1}^*$; $\bar{d}_i^* = d_{2i}^*$; $i \in J_m$; $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_m^0)$; $y_{p_i}^0 = a_i$; $i \in J_s$; $y_{p_i}^0 = a_{i-n+r+i}$; $i \in J_r$; $s+r=m$. Здесь последовательность $\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ удовлетворяет (17), а $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ такова, что $\bar{d}_{p_1}^* \geq \bar{d}_{p_2}^* \geq \dots \geq \bar{d}_{p_s}^* > 0 > \bar{d}_{p_{s+1}}^* \geq \dots \geq \bar{d}_{p_m}^*$, $z^0 = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_m^0)$, $z_{q_i}^0 = b_{h_i}$, $i \in J_t$, $z_{q_i}^0 = b_{h_n-d+i}$, $i \in J_\theta$, $t+\theta=m$, где последовательность $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ удовлетворяет (18), а $\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ такова, что $\bar{d}_{q_1}^* \geq \bar{d}_{q_2}^* \geq \dots \geq \bar{d}_{q_{s+1}}^* \geq 0 > \bar{d}_{q_{s+2}}^* \geq \dots \geq \bar{d}_{q_m}^*$.

Рассмотрим теперь случай, когда множество E в задаче (3) представляет собой множество $\bar{S}I_n^m$ парных сочетаний с повторениями из n различных элементов по m . В этом случае задача (3) примет вид:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^v c_i x_i \rightarrow \min, \quad (21)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_v) \in \bar{S}I_n^m \subset R^v, v = 2m$,

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_v) \in R^v.$$

Отметим, что координаты точек множества $\bar{S}I_n^m$ принимают значения всевозможных упорядоченных наборов пар (a_i, b_i) , $a_i \in A, b_i \in B, i \in J_n$. При этом наборы отличаются друг от друга составом пар (a_i, b_i) , а каждая пара $(a_i, b_i), i \in J_n$, может встречаться в наборе от нуля до m раз.

Представим функцию цели задачи (21) в следующем виде:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{2m} c_i x_i = \sum_{i=1}^m (c_{2i-1} x_{2i-1} + c_{2i} x_{2i}) =$$

$$= \sum_{i=1}^m g_i(x_{2i-1}, x_{2i}). \quad (22)$$

Поскольку функция $\varphi(x)$ вида (22) является сепарабельной, то для нее справедливо соотношение:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \bar{S}I_n^m} \varphi(x) &= \min_{x \in \bar{S}I_n^m} \sum_{i=1}^m g_i(x_{2i-1}, x_{2i}) \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^m \min_{(x_{2i-1}, x_{2i}) \in Z_j, j \in J_n} g_i(x_{2i-1}, x_{2i}). \end{aligned} \quad (23)$$

Нестрогое неравенство в соотношении (23) будет выполняться как равенство в случае, если для элементов множества $\bar{S}I_n^m$ допустить произвольный порядок следования значений $(a_i, b_i), i \in J_n, j \in J_m$, координат $x_{2i-1}, x_{2i}, i \in J_m$. Если для каждого элемента $x \in \bar{S}I_n^m$ потребовать выполнения бинарного отношения, определенного в (6), вида

$$\begin{aligned} x = (a_i, b_i, a_i, b_i, \dots, a_i, b_i) &\in \bar{S}I_n^m, \\ (a_i, b_i) \prec (a_i, b_i) \prec \dots \prec (a_i, b_i), \end{aligned}$$

то в (23) справедливым будет неравенство \geq . Таким образом, справедливо утверждение:

Теорема 5. Пусть функция $\varphi(x) = \sum_{i=1}^v c_i x_i$ определена в точках множества $\bar{S}I_n^m \subset R^v, v = 2m$, порожденного множествами $Z_i = \{a_i, b_i\}, i \in J_n$. Тогда

$$\min_{x \in \bar{S}I_n^m} \varphi(x) \geq \sum_{i=1}^v c_i x_i^0, \quad (24)$$

где $x_{2i-1}^0 = a_i^0, x_{2i}^0 = b_i^0, i \in J_m$,

$$(a_i^0, b_i^0) = \arg \min_{(a_i, b_i) \in Z_j, j \in J_n} (c_{2i-1} a_j + c_{2i} b_j).$$

Построим теперь оценку минимума линейной функции $\varphi(x)$ задачи (21) на множестве $\bar{S}I_n^m$ на основе подхода, примененного при доказательстве теоремы 4. Учтем, что в точках $x \in \bar{S}I_n^m$ координаты $x_i, i \in I'_v$ принимают значения из множества A , а координаты $x_i, i \in I''_v$, — значения из множества B . Из комбинаторных свойств множества $\bar{S}I_n^m$ следует, что оно является подмножеством множества $E\bar{S}_w^v \subset R^v$, которое строится следующим образом. Для любого $x \in E\bar{S}_w^v$ координаты $x_i, i \in I'_v$, принимают значения сочетаний с повторениями из n элементов множества A по m , а координаты $x_i, i \in I''_v$ — значения сочетаний с повторениями из n элементов множества B по m , то есть $\bar{S}I_n^m \subset E\bar{S}_w^v, w = 2n, v = 2m$.

Исходя из этого, запишем выражение для $\varphi(x)$ в виде:

$$\varphi(x) = \sum_{i \in I'} c_i x_i + \sum_{i \in I''} c_i x_i = \sum_{i=1}^m \bar{c}_i y_i + \sum_{i=1}^m \tilde{c}_i z_i,$$

где $y \in R^m$; $z \in R^m$; $\bar{c}_i = c_{2i-1}$; $\tilde{c}_i = c_{2i}$; $i \in J_m$. Поскольку $\bar{S}I_{nk}^m \subset E\bar{S}_w^v$, то

$$\min_{x \in \bar{S}I_{nk}^m} \varphi(x) \geq \min_{x \in E\bar{S}_w^v} \varphi(x) = \min_{y \in \bar{S}_n^m(A)} \sum_{i=1}^m \bar{c}_i y_i + \min_{z \in \bar{S}_n^m(B)} \sum_{i=1}^m \tilde{c}_i z_i.$$

Решение задачи оптимизации линейной функции $\Phi(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$ на множестве \bar{S}_n^m , порожденном множеством $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$, приведено в [2]. Оно достигается в точке $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*) \in \bar{S}_n^m$, где $x_i^* = \beta_{\min}$, $i \in J_s$, $x_i^* = \beta_{\max}$, $i \in J_m \setminus J_s$, $\beta_{\min}, \beta_{\max}$ — соответственно минимальный и максимальный элементы множества β , а константа s определяется системой неравенств:

$$\sum_{j=1}^l \alpha_{s+1-j} \geq 0 \quad \forall t \in J_s, \quad \sum_{j=1}^l \alpha_{s+j} \leq 0 \quad \forall t \in J_{k-s}.$$

Определяя на этой основе минимумы в правой части неравенства, получим искомую оценку. Таким образом, справедливо утверждение:

Теорема 6. Пусть функция $\varphi(x) = \sum_{i=1}^v c_i x_i$ определена в точках множества $\bar{S}I_n^m \subset R^v$, $v = 2m$, порожденного множествами $Z_i = \{a_i, b_i\}$, $i \in J_n$. Тогда

$$\begin{aligned} \min_{x \in \bar{S}I_n^m} \varphi(x) \geq & a_{\min} \sum_{i=1}^{s_1} \bar{c}_i + a_{\max} \sum_{i=s_1+1}^m \bar{c}_i + \\ & + b_{\min} \sum_{i=1}^{s_2} \tilde{c}_i + b_{\max} \sum_{i=s_2+1}^m \tilde{c}_i, \end{aligned} \quad (25)$$

где $\bar{c}_i = c_{2i-1}$, $\tilde{c}_i = c_{2i}$, $i \in J_m$,

$$\begin{aligned} a_{\min} = \min_{i \in J_n} \{a_i\}, \quad a_{\max} = \max_{i \in J_n} \{a_i\}, \quad b_{\min} = \min_{i \in J_n} \{b_i\}, \\ b_{\max} = \max_{i \in J_n} \{b_i\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Константы s_1 и s_2 определяются системами неравенств:

$$\sum_{j=1}^l \bar{c}_{s_1+1-j} \geq 0 \quad \forall t \in J_{s_1}, \quad \sum_{j=1}^l \bar{c}_{s_1+j} \leq 0 \quad \forall t \in J_{k-s_1};$$

$$\sum_{j=1}^l \tilde{c}_{s_2+1-j} \geq 0 \quad \forall t \in J_{s_2}, \quad \sum_{j=1}^l \tilde{c}_{s_2+j} \leq 0 \quad \forall t \in J_{k-s_2}.$$

На основании результатов теорем 5 и 6 получим оценки минимума функции $\psi(x) = \|x - d\|^2$, где $d \in R^v$, на множестве $\bar{S}I_n^m$.

Поскольку для любого $x \in \bar{S}I_n^m$ координаты $x_i, i \in I'_v$, и $x_i, i \in I''_v$ принимают значения соответственно из множеств A и B , то в точках множества $\bar{S}I_n^m$ справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \bar{S}I_n^m} \psi(x) = \min_{x \in \bar{S}I_n^m} \|x - d\|^2 \geq & m(a_0^2 + b_0^2) + \sum_{i=1}^v d_i^2 + \\ & + 2 \min_{x \in \bar{S}I_n^m} \sum_{i=1}^v d_i^* x_i, \end{aligned} \quad (27)$$

где $a_0 = \min_{i \in J_n} |a_i|$, $b_0 = \min_{i \in J_n} |b_i|$, $d_i^* = -d_i, i \in J_v$.

Минимум в правой части неравенства можно оценить с помощью оценок (24) или (25). Таким образом, для функции $\psi(x) = \|x - d\|^2$ на множестве $\bar{S}I_n^m$ справедливы следующие оценки:

$$\min_{x \in \bar{S}I_n^m} \|x - d\|^2 \geq m(a_0^2 + b_0^2) + \sum_{i=1}^v d_i^2 + 2 \sum_{i=1}^v d_i^* x_i^0,$$

где a_0, b_0 и d^* удовлетворяют (27), $x_{2i-1}^0 = a_i^0$, $x_{2i}^0 = b_i^0$, $(a_i^0, b_i^0) = \arg \min_{(a_j, b_j) \in Z_j, j \in J_n} (c_{2i-1} a_j + c_{2i} b_j)$, $i \in J_m$.

$$\min_{x \in \bar{S}I_n^m} \|x - d\|^2 \geq m(a_0^2 + b_0^2) + \sum_{i=1}^v d_i^2 + a_{\min} \sum_{i=1}^{s_1} \bar{d}_i^* +$$

$$+ a_{\max} \sum_{i=s_1+1}^m \bar{d}_i^* + b_{\min} \sum_{i=1}^{s_2} \tilde{d}_i^* + b_{\max} \sum_{i=s_2+1}^m \tilde{d}_i^*,$$

где a_0, b_0 и d^* удовлетворяют (27), $\bar{d}_i^* = d_{2i-1}^*$, $\tilde{d}_i^* = d_{2i}^*$, $i \in J_m$, $a_{\min}, a_{\max}, b_{\min}, b_{\max}$ определяются соотношением (26), константы s_1 и s_2 определяются системами неравенств:

$$\sum_{j=1}^l \bar{d}_{s_1+1-j}^* \geq 0 \quad \forall t \in J_{s_1}, \quad \sum_{j=1}^l \bar{d}_{s_1+j}^* \leq 0 \quad \forall t \in J_{k-s_1};$$

$$\sum_{j=1}^l \tilde{d}_{s_2+1-j}^* \geq 0 \quad \forall t \in J_{s_2}, \quad \sum_{j=1}^l \tilde{d}_{s_2+j}^* \leq 0 \quad \forall t \in J_{k-s_2}.$$

4. Применение результатов исследований при разработке интеллектуальной системы поддержки принятия решений

Полученные в статье результаты могут быть использованы при разработке интеллектуальной системы решения задач геометрического проектирования. Цель создания интеллектуальной системы — повышение эффективности решения задач геометрического проектирования на общей фундаментальной основе с использованием комплекса разработанных к настоящему времени математических моделей и методов. Функциями системы являются анализ постановки задачи геометрического проектирования, сформулированной на языке, близком к естественному, принятие решения о возможности построения (выбора) математической модели задачи и ее решения на основе оптимизационных методов геометрического проектирования.

В состав интеллектуальной системы могут быть включены следующие подсистемы:

1. Подсистема анализа исходной информации о задаче и принятия решения о возможности ее

формализации и выбора математической модели задачи в соответствующем классе моделей.

2. Подсистема построения конкретной реализации математической модели.

3. Подсистема оптимизации параметров модели.

4. Подсистема визуализации исходных данных и результатов решения задачи геометрического проектирования.

5. Банк математических моделей задач геометрического проектирования.

6. Банк методов оптимизации.

Проблемы анализа постановки задачи геометрического проектирования, сформулированной на языке, близком к естественному, рассматривались в [10]. Применение описанных там подходов позволяет формализовать постановку задачи геометрического проектирования. Теоретической основой такой формализации является основная задача геометрического проектирования, сформулированная в [1]. Формализация интервальных математических моделей задач этого класса может быть выполнена на базе основной задачи геометрического проектирования в интервальном виде [11].

Дальнейшая конкретизация математической модели задачи связана с моделированием ее области допустимых решений. Основу моделей областей допустимых решений задач геометрического проектирования с дискретными параметрами составляют классические комбинаторные множества [1, 2]. Математические модели, построенные на базе классических комбинаторных множеств, составят основу банка математических моделей задач геометрического проектирования. Исследованные свойства комбинаторных множеств и разработанные с их помощью оптимизационные методы позволяют сформировать банк методов решения экстремальных комбинаторных задач геометрического проектирования.

Многие задачи геометрического проектирования представляют собой экстремальные комбинаторные задачи на множествах перестановок, размещений и сочетаний [1, 2]. Учет погрешностей в моделях задач этого класса на основе методов интервального анализа приводит к необходимости описания и исследования интервальных комбинаторных множеств перестановок, размещений, сочетаний [12]. Отображение этих множеств в евклидово пространство, как один из способов их анализа [6], порождает необходимость описания и исследования комбинаторных множеств парных перестановок, парных размещений и парных сочетаний.

Результаты исследований, полученные в настоящей работе, могут быть использованы при формировании банка математических моделей задач геометрического проектирования, банка методов оптимизации, в подсистемах построения конкретной реализации математической модели и оптимизации параметров модели.

Результаты работы построенной таким образом интеллектуальной системы позволят получать решения новых классов задач геометрического проектирования с учетом погрешностей исходных данных.

Заключение

Приведенные в работе постановки и решения задач оптимизации могут быть использованы при разработке интеллектуальных систем поддержки принятия решений, ориентированных на задачи геометрического проектирования с учетом погрешностей исходных данных. В статье предложена и проанализирована концепция такой системы.

Результаты решения некоторых классов задач, сформулированные в виде теорем, можно применить при разработке методов оптимизации различных классов функций на композиционных образах комбинаторных множеств. При этом задачи оптимизации линейной функций и нормы разности можно рассматривать как вспомогательные задачи при реализации методов решения более сложных задач оптимизации на построенных композиционных образах комбинаторных множеств.

Список литературы: 1. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. К.: Наук. думка, 1986. 268с. 2. Стоян Ю.Г., Емец О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. К.: Інститут системних досліджень освіти, 1993. 188 с. 3. Айгнер М. Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982. 558 с. 4. Стоян Ю.Г., Гребенник И.В. Специальные классы комбинаторных множеств в геометрическом проектировании // В кн.: Сб. тезисов докладов по материалам 10-й юбилейной междунар. конф. «Теория и техника передачи, приема и обработки информации». Харьков-Туапсе 2004. С. 253-254. 5. Kaucher E. Interval Analysis in the Extended Interval Space IR // Comp. Suppl. 1980. № 2. P. 33-49. 6. Гребенник И.В., Романова Т.Е. Отображение интервальных комбинаторных множеств в евклидово пространство // Проблемы машиностроения. 2002. 5, №2. С. 87-91. 7. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Свойства выпуклых функций на перестановочном многограннике // ДАН УССР, Сер. А. 1988. №3. С. 238-240. 8. Яковлев С.В., Гребенник И.В. О некоторых классах задач оптимизации на множествах размещений и их свойствах // Математика. 1991. №11. С. 74-86. (Изв. высш. учеб. заведений). 9. Стоян Ю.Г., Гребенник И.В., Емец О.А. Комбинаторные множества размещений и их свойства. Х., 1990. 38с. (Препринт АН УССР/Ин-т пробл. машиностроения, 342). 10. Ещенко В.Г., Романова Т.Е. Математическое обеспечение САПР задач геометрического проектирования // Программные средства машиностроения: Сб. науч. тр. АН УССР. Ин-т кибернетики. К., 1990. 81 с. 11. Гребенник И.В., Евсеева Л.Г., Романова Т.Е. Основная оптимизационная задача геометрического проектирования в интервальном виде // Радиоэлектроника. Информатика. Управление. – 2004, № 2. С. 68-72. 12. Гребенник И.В. Интервальные модели комбинаторной оптимизации квазилинейных функций в пространстве $I^n\mathbb{R}$ // Доповіді НАН України. – 2004. №9. С. 60-64.

Поступила в редколлегию 17.11.2004