УДК 519.85

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ТОЧЕК МИНИМУМА В НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ С БУЛЕВЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

ГРЕБЕННИК И.В.

Рассматривается задача дискретной оптимизации на множестве булевых переменных в евклидовом пространстве. Проводится декомпозиция множества допустимых решений по семействам параллельных гиперплоскостей. На основе декомпозиции осуществляется локализация решений исходной задачи оптимизации.

Рассмотрим задачу дискретной оптимизации следующего вида:

$$\overline{\varphi}(x) \to \min, \tag{1}$$

$$x \in B_k \subset R^k; \;\; B_k = \{x | x_i \in \{0,1\}, i \in J_k, \, J_k = \{1,2,\ldots,k\}.$$

Отметим, что множество B_k, его свойства и некоторые задачи оптимизации на множестве B_k исследованы в [1,2].

Осуществим выпуклое (сильно выпуклое с параметром $\rho > 0$) дифференцируемое продолжение j функции $\overline{\varphi}(x)$ на выпуклое замкнутое множество $X \supset Q_2^k = \text{conv } B_k$, которое может быть получено, например, способом, описанным в [2]. Учтем, что точки множества B_k и только они удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 0 \le x_i \le 1, & i \in J_k, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} (x_i - \frac{1}{2})^2 = \frac{k}{4} & . \end{cases}$$

Тогда задаче (1) можно поставить в соответствие эквивалентную задачу оптимизации:

$$\varphi(x) \to \min,$$

$$x \in R^k, \|x - c\|^2 = \frac{k}{4}, 0 \le x_i \le 1, i \in J_k, \tag{2}$$

$$c = (\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}) \in R^k.$$

В работе [3] был рассмотрен способ декомпозиции множества B_k с помощью семейств гиперплоскостей. На основе сформулированного определения n-смежности элементов множества B_k строятся гиперплоскости $\alpha^{(n)}$, n-смежные с данной точкой $x^{(0)} \in B_k$. При этом уравнение гиперплоскости $\alpha^{(n)}$ имеет вид:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_k x_k + d_k^n = 0, \tag{3}$$

где $c_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i^0 = 1, \\ -1, & \text{если } x_i^0 = 0, \end{cases} \;\; i \in J_k$,

$d_k^{(n)} = d_k^1 + n - 1$, d_k^1 получается подстановкой в (3) произвольной вершины Q_2^k, 1 – смежной с x^0.

Используем полученные в [3] результаты для локализации решения задачи (2) в некотором подмножестве множества B_k.

Учтем, что множество B_k является пересечением k – мерного гиперкуба Q_2^k и гиперсферы S_k и удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{cases} 0 \le x_i \le 1, \;\; i = 1,\ldots,k, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} (x_i - \frac{1}{2})^2 = \frac{k}{4}. \end{cases} \tag{4}$$

Рассмотрим множества $\tilde{S}_{k-1} = S_k \cap \alpha^{(n)}(x^0)$ и $\tilde{Q}_2^{k-1}(n) = Q_2^k \cap \alpha^{(n)}(x^0)$, где $\alpha^{(n)}(x^0)$ – гиперплоскость вида (3) в R^k, проходящая через вершины Q_2^k, n – смежные с точкой x^0.

Очевидно, что множество, лежащее на пересечении гиперсферы S_k и гиперплоскости $\alpha^{(n)}(x^0)$, представляет собой гиперсферу $\tilde{S}_{k-1}$ в пространстве R^{k-1}. Получим ее уравнение. Выражая из (3) переменную x_k, подставим ее в уравнение гиперсферы S_k:

$$\sum_{i=1}^{k-1} (x_i - \frac{1}{2})^2 + (-d_k^n - \frac{1}{2} - \frac{1}{c_k} \sum_{i=1}^{k-1} c_i x_i)^2 = \frac{k}{4}.$$

Имеем:

$$\sum_{i=1}^{k-1} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} c_i c_j x_i x_j +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-1} (\frac{(2d_k^n + 1)c_i}{c_k} - 1) x_i + (d_k^n)^2 + d_k^n = 0. \tag{5}$$

Введем следующие обозначения:

$$C = [c_{ij}]_{(k-1)\times(k-1)}; \;\; c_{ij} = \begin{cases} c_i \cdot c_j, & i \ne j, \\ c_i c_j + 1, & i = j, \end{cases} \;\; i, j \in J_{k-1};$$

$$D = (d_1,\ldots,d_{k-1}); \;\; d_i = \frac{(2d_k^n + 1)c_i}{c_k} - 1, \;\; i \in J_{k-1};$$

$$P = (d_k^n)^2 + d_k^n.$$

Тогда соотношение (5) может быть представлено в виде

$$(Cx, x) + (D, x) + P = 0, \tag{6}$$

где $x \in R^{k-1}$.

Приведем квадратичную форму в левой части (6) к каноническому виду. Для этого найдем ее представление в базисе собственных векторов матрицы С.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{k-1}$ – собственные числа матрицы С, а $e_1, e_2, ..., e_{k-1}$ – соответствующие им ортонормированные собственные векторы.

Рассмотрим матрицу $T = \lfloor t_{ij} \rfloor_{k-1 \times k-1}$, столбцами которой служат собственные векторы матрицы С. Пользуясь приемами линейной алгебры, получим искомое представление соотношения (6):

$$(Wx, x) + (\vartheta, x) + P = 0, \qquad (7)$$

где

$$W = T^{-1}CT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & ... & \\ 0 & & \lambda_{k-1} \end{bmatrix},$$

$$\vartheta = TD.$$

Уравнение (7) можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \vartheta_i x_i + P = 0.$$

Поскольку матрица С вещественна и симметрична, то ее спектр $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{k-1}$ является вещественным [4]. Тогда $\sum_{i=1}^{k-1} (x_i + \frac{\vartheta_i}{2\lambda_i})^2 = \sum_{i=1}^{k-1} (\frac{\vartheta_i^2}{4\lambda_i^2} - \frac{P}{(k-1)\lambda_i})$ – уравнение гиперсферы $\tilde{S}_{k-1} = S_k \cap \alpha^{(n)}(x^0)$.

Получим теперь соотношения, описывающие многогранник $\tilde{Q}_2^{k-1}(n) = Q_2^k \cap \alpha^{(n)}(x^0)$. Выразив из (5) переменную x_k, подставим ее в систему неравенств из (4). Имеем:

$$\begin{cases} 0 \le x_i \le 1, \ i \in J_{k-1}, \\ d_k^n \le -\dfrac{1}{c_k} \sum_{i=1}^{k} c_i x_i \le 1 + d_k^n. \end{cases}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма. Точки множества $X^{(n)}(x^0)$ и только они удовлетворяют системе соотношений

$$\begin{cases} 0 \le x_i \le 1, \ i \in J_{k-1}; \\ d_k^n \le -\dfrac{1}{c_k} \sum_{i=1}^{k} c_i x_i \le 1 + d_k^n; \\ \sum_{i=1}^{k-1} (x_i + \dfrac{\vartheta_i}{2\lambda_i})^2 = \sum_{i=1}^{k-1} (\dfrac{\vartheta_i}{4\lambda_i^2} - \dfrac{P}{(k-1)\lambda_i}), \end{cases}$$

т.е. лежат на пересечении многогранника $\tilde{Q}_2^{k-1}(n)$ и сферы $\tilde{S}_{k-1}$.

Доказательство утверждения следует из цепочки соотношений, использующей закон ассоциативности и свойства идемпотентности алгебры множеств:

$$\tilde{S}_{k-1} \cap \tilde{Q}_2^{k-1}(n) = \tilde{S}_{k-1} \cap (Q_2^k \cap \alpha^{(n)}(x^0)) =$$
$$= (\tilde{S}_{k-1} \cap Q_2^k) \cap \alpha^{(n)}(x^0) =$$
$$= ((S_k \cap \alpha^{(n)}(x^0)) \cap Q_2^k) \cap \alpha^{(n)}(x^0) =$$
$$= ((S_k \cap Q_2^k) \cap \alpha^{(n)}(x^0)) \cap \alpha^{(n)}(x^0) =$$
$$= (S_k \cap Q_2^k) \cap (\alpha^{(n)}(x^0) \cap \alpha^{(n)}(x^0)) =$$
$$= (S_k \cap Q_2^k) \cap \alpha^{(n)}(x^0) =$$
$$= B_k \cap \alpha^{(n)}(x^0) = X^{(n)}(x^0).$$

Рассмотрим задачу оптимизации (2). Используя представление множества $X^{(n)}(x^0)$ в виде пересечения многогранника и гиперсферы, получаем оценку минимума функции цели $\varphi(x)$ на множестве $X^{(n)}(x^0)$. Для этого спроектируем $\varphi(x)$ на подпространство R^{k-1}, задаваемое гиперплоскостью $\alpha^{(n)}(x^0)$ вида (3). Выражая из уравнения гиперплоскости $\alpha^{(n)}(x^0)$ переменную x^k, получаем

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_k) = \varphi(x_1, ..., x_{k-1},$$
$$-d_k^n - \frac{1}{c_k} \sum_{i=1}^{k-1} c_i x_i) = \tilde{\varphi}(x_1, x_2, ..., x_{k-1}).$$

Очевидно, $\tilde{\varphi}(x)$ – выпуклая функция, так как она является проекцией выпуклой функции $\varphi(x)$. В качестве оценки минимума функции $\tilde{\varphi}$ (а значит и φ) на множестве $X^{(n)}(x^0)$ рассмотрим решение задачи оптимизации функции $\tilde{\varphi}(x_1, x_2, ..., x_{k-1})$ на многограннике $\tilde{Q}_2^{k-1}(n)$. Легко показать, что множество вершин многогранника $\tilde{Q}_2^{k-1}(n)$ совпадает с множеством $X^{(n)}(x^0)$. В связи с этим поставленная задача эффективно может быть решена одним из известных методов, основанных на линеаризации, например, методом условного градиента (Франка – Вульфа) или проекции градиента. Эффективность решения достигается благодаря простоте решения вспомогательной задачи оптимизации линейной функции на многограннике $\tilde{Q}_2^{k-1}(n)$, основанного на утверждении леммы 1 из [3].

Решение описанной задачи на многограннике $\tilde{Q}_2^{k-1}(n)$ является оценкой минимума функции $\tilde{\varphi}(x_1, x_2, ..., x_{k-1})$ на множестве $X^{(n)}(x^0)$. Однако в случае, если глобальный минимум функции $\tilde{\varphi}$ – внутренняя точка многогранника $\tilde{Q}_2^{k-1}(n)$, эта оценка недостаточно эффективна. Более эффективной оценкой при этом может служить решение задачи оптимизации функции $\tilde{\varphi}(x_1, x_2, ..., x_k)$ на гиперсфере $\tilde{S}_{k-1}$. Но получение такой оценки для

$\varphi(x)$ общего вида является сложной задачей, для решения которой требуется разработка специальных методов. Для случая, когда $\varphi(x)$ – квадратичная функция, методы решения этой задачи рассмотрены в работах [1, 2].

Предположим теперь, что функция цели в задаче (2) сильно выпукла с параметром $\rho > 0$. Опираясь на полученные оценки минимума $\varphi(x)$ на множествах $X^{(n)}(x^0)$, попытаемся локализовать решение поставленной задачи. Рассмотрим вначале случай, когда

$$\bar{y} = \arg\min_{x \in R^n} \varphi(x) \notin Q_2^k = \operatorname{conv} B_k . \qquad (8)$$

Определим точку x* области допустимых решений задачи (2), ближайшую к $\bar{y}$. Легко показать [1], что точка $x^* \in B_k$ определяется как

$$x_i^* = \begin{cases} 0, \text{если } \bar{y}_i \le \dfrac{1}{2}; \\ 1, \text{если } \bar{y}_i > \dfrac{1}{2}. \end{cases} \qquad (9)$$

Очевидно, что значение $\varphi(x^*)$ является верхней оценкой решения задачи (2).

Построим систему множеств $X^{(n)}(x^*)$, n=1, 2,, k, и проведем через них гиперплоскости $\alpha^{(n)}$ вида (3), n=1, 2, ..., k. Из выпуклости функции $\varphi(x)$ и того факта, что глобальный минимум $\varphi(x)$ не принадлежит многограннику Q_2^k , а также способа построения семейства параллельных гиперплоскостей $\alpha^{(n)}$ следует, что

$$\varphi(\bar{y}) \le \min_{x \in \tilde{Q}_2^{k-1}(1)} \varphi(x) \le \min_{x \in \tilde{Q}_2^{k-1}(2)} \varphi(x) \le \ldots \le \min_{x \in \tilde{Q}_2^{k-1}(n)} \varphi(x) . \qquad (10)$$

Обозначим $\bar{y}^{(i)} = \arg\min_{x \in \tilde{Q}_2^{k-1}(i)} \varphi(x), \quad i = 1,\ldots,k.$

Тогда, если выполняется неравенство

$$\varphi(x^*) \le \varphi(\bar{y}^{(j)}) \qquad (11)$$

для какого-либо *φ∈J_k*, то в соответствии с (10) решение задачи (2) принадлежит множеству

$$Y^{(j-1)}(x^*) = \bigcup_{i=1}^{j-1} X^{(i)}(x^*) .$$

Покажем, при каких условиях для $\varphi(x)$ будет выполнено условие (11).

Так как $\varphi(x)$ сильно выпукла с параметром $\rho > 0$, то для нее справедливы следующие соотношения [5]:

$$\varphi(x^*) - \varphi(\bar{y}) \ge \rho \|x^* - \bar{y}\|^2 ; \qquad (12)$$

$$\varphi(\bar{y}^{(j)}) - \varphi(\bar{y}) \ge \rho \left\|\bar{y}^{(j)} - \bar{y}\right\|^2 . \qquad (13)$$

Оценим норму $\left\|\bar{y}^{(j)} - \bar{y}\right\|^2$. Так как точка $\bar{y}^{(j)} \in \alpha^{(j)}$, то оценкой нормы может быть квадрат расстояния от точки $\bar{y}$ до плоскости $\alpha^{(j)}$ вида (3). Имеем

$$\left\|\bar{y}^{(j)} - \bar{y}\right\|^2 \ge \frac{(c_1\bar{y}_1 + c_2\bar{y}_2 + \ldots + c_k\bar{y}_k + d_k^j)^2}{c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_k^2} =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k} c_i\bar{y}_i + d_k^j\right)^2 .$$

Используя эту оценку, а также то, что $\|x^* - \bar{y}\|^2 \ge 0$, сложим неравенства (12) и (13):

$$\varphi(x^*) + \varphi(\bar{y}^{(j)}) - 2\varphi(\bar{y}) \ge \rho \cdot \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k} c_i\bar{y}_i + d_k^j\right)^2 ,$$

$$\varphi(\bar{y}^{(j)}) - \varphi(x^*) \ge 2(\varphi(\bar{y}) - \varphi(x^*)) +$$

$$+ \rho \cdot \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k} c_i\bar{y}_i + d_k^j\right)^2 .$$

Определим значение r, при котором $\varphi(\bar{y}^{(j)}) - \varphi(x^*) \ge 0$. Имеем:

$$\rho \ge 2k \frac{\varphi(x^*) - \varphi(\bar{y})}{\left(\sum_{i=1}^{k} c_i\bar{y}_i + d_k^j\right)^2} . \qquad (14)$$

Таким образом, если функция цели задачи (2) $\varphi(x)$ является сильно выпуклой и удовлетворяет условию (14), то решение задачи принадлежит множеству $Y^{(j-1)}(x^*)$.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в задаче оптимизации* (2) *функция цели* $\varphi(x)$ *сильно выпукла с параметром* $\rho > 0$ *, а семейство параллельных гиперплоскостей* $\alpha^{(n)}$ *вида* (3) *проведено через точки множеств* $X^{(n)}(x^*)$ *,* $n \in J_k$ *, где* x^* *удовлетворяет соотношению* (9). *Тогда для того, чтобы решение задачи* (2) *было локализовано внутри множества* $Y^{(j-1)} = \bigcup_{i=1}^{j-1} X^{(i)}(x^*)$ *, достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\rho \ge 2k \frac{\varphi(x^*) - \varphi(\bar{y})}{\left(\sum_{i=1}^{k} c_i\bar{y}_i + d_k^j\right)^2} ,$$

где $\bar{y}$ *удовлетворяет* (8).

Следствие. Пусть в задаче оптимизации (2) функция цели $\varphi(x)$ сильно выпукла с параметром $\rho > 0$, а гиперплоскость $\alpha^{(1)}$ вида (3) проведена через точки множества $X^{(1)}(x^*)$, где x* удовлетворяет соотношению (9). Для того чтобы x* была точкой минимума $\varphi(x)$ на множестве B_k , достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\rho \ge 2k\frac{\varphi(x^*)-\varphi(\bar{y})}{(\sum_{i=1}^{k}c_i\bar{y}_i+d_k^1)^2},$$

где $\bar{y}$ определяется соотношением (8).

Рассмотрим теперь случай, когда $\varphi(x)$ – сильно выпуклая с параметром $\rho>0$ дифференцируемая функция. Опираясь на предыдущие построения, докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть в задаче оптимизации* (2) *функция цели* $\varphi(x)$ *сильно выпукла с параметром* $\rho>0$ *и дифференцируема, а семейство параллельных гиперплоскостей* $\alpha^{(n)}$ *вида* (3) *проведено через точки множеств* $X^{(n)}(x^*)$, $n\in J_k$, *где* x^* *удовлетворяет соотношению* (9). *Тогда для того, чтобы решение задачи* (2) *было локализовано внутри множества* $Y^{(j-1)}=\bigcup_{i=1}^{j-1}X^{(i)}(x^*)$, *достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\rho \ge k\frac{(\nabla\varphi(x^*),x^*-\bar{y}^{(j)})}{(\sum_{i=1}^{k}c_i x_i^*+d_k^j)^2},$$

где $\bar{y}^{(j)}=\arg\min\limits_{x\in\tilde{Q}_2^{k-1}(j)}\varphi(x)$.

Доказательство. Так как $\varphi(x)$ сильно выпукла и дифференцируема на R^k, то для любых $x,y\in R^k$ справедливо соотношение [5]:

$$\varphi(y)-\varphi(x)\ge(\nabla\varphi(x),y-x)+\rho\|x-y\|^2.$$

Подставляя в это соотношение точки x* и $\bar{y}^{(j)}$, где $\bar{y}^{(j)}=\arg\min\limits_{x\in\alpha^{(j)}}\varphi(x)$, а x* удовлетворяет (9), получаем условие, когда $\varphi(\bar{y}^{(j)})\ge\varphi(x^*)$. Учитывая, что $\left\|x^*-\bar{y}^{(j)}\right\|^2$ можно оценить квадратом расстояния от точки x^* до гиперплоскости $\alpha^{(j)}$, имеем

$$\left\|x^*-\bar{y}^{(j)}\right\|^2\ge\frac{1}{k}(\sum_{i=1}^{k}c_i x_i^*+d_k^j)^2.$$

Тогда $(\nabla\varphi(x^*),\bar{y}^{(j)}-x^*)+\frac{\rho}{k}(\sum_{i=1}^{k}c_i x_i^*+d_k^j)^2\ge 0$,

$$\rho \ge k\frac{(\nabla\varphi(x^*),x^*-\bar{y}^{(i)})}{(\sum_{i=1}^{k}c_i x_i^*+d_k^j)^2}.$$

Следствие. Пусть в задаче оптимизации (2) функция цели $\varphi(x)$ сильно выпукла с параметром $\rho>0$ и дифференцируема, а гиперплоскость $\alpha^{(1)}$ вида (3) проведена через точки множества $X^{(1)}(x^*)$, где x^* удовлетворяет соотношению (9). Для того чтобы x^* была точкой минимума $\varphi(x)$ на множестве B_k, достаточно, чтобы

$$\rho \ge k\frac{(\nabla\varphi(x^*),x^*-\bar{y}^{(1)})}{(\sum_{i=1}^{k}c_i x_i^*+d_k^1)^2},$$

где $\bar{y}^{(1)}=\arg\min\limits_{x\in\tilde{Q}_2^{k-1}(1)}\varphi(x)$.

Рассмотренный случай, когда безусловный минимум $\bar{y}$ сильно выпуклой функции $\varphi(x)$ не принадлежит многограннику $Q_2^k=\text{conv } B_k$, является более благоприятным для локализации решения задачи (2) описанным способом. При этом точка $x^*\in B_k$, ближайшая к $\bar{y}$ и полученная по формуле (9), является естественным приближением к решению задачи (2). В силу выпуклости $\varphi(x)$, $\varphi(x^*)$ во многих случаях будет хорошей верхней оценкой решения задачи. Гиперплоскости $\alpha^{(n)}$ отсекают точки множества B_k или его подмножеств от безусловного минимума $\varphi(x)$ – точки $\bar{y}$. А после выполнения условия (11) для какого-либо j можно исключить из рассмотрения все точки множества B_k, отсеченные гиперплоскостью $\alpha^{(j)}$. При выполнении условий следствий из теорем 1 и 2 точка x^* становится решением задачи.

В случае же, когда $\bar{y}$ является внутренней точкой многогранника Q_2^k, применение описанной схемы локализации менее эффективно. В этой ситуации невозможно отсечь одной гиперплоскостью $\bar{y}$ от точек множества B_k. Кроме того, при этом трудно указать удачное приближение к решению задачи. Одним из подходов к локализации решения задачи (2) может быть следующий. Исходя только из свойства выпуклости функции $\varphi(x)$ и не оценивая ее скорости роста в различных направлениях, выберем в качестве приближения к решению точку x^*, ближайшую к $\bar{y}$. Для этого воспользуемся соотношением (9). Как и в первом случае, построим систему множеств $X^{(n)}(x^*)$, $n=1,2,\dots,k$. При этом точка $\bar{y}\in Q_2^k$ окажется между двумя гиперплоскостями семейства $\alpha^{(n)}$, например, $\alpha^{(s)}$ и $\alpha^{(s+1)}$. Тогда в силу выпуклости $\varphi(x)$, способа построения семейства гиперплоскостей $\alpha^{(n)}$ и положения точки $\bar{y}$ внутри многогранника Q_2^k относительно гиперплоскостей семейства $\alpha^{(n)}$ выполняются условия:

$$\varphi(x^*)\ge\min_{x\in\tilde{Q}_2^{k-1}(1)}\varphi(x)\ge\min_{x\in\tilde{Q}_2^{k-1}(2)}\varphi(x)\ge\dots\ge\min_{x\in\tilde{Q}_2^{k-1}(s)}\varphi(x)\ge\varphi(\bar{y}),$$

$$\varphi(\bar{y})\le\min_{x\in\tilde{Q}_2^{k-1}(s+1)}\varphi(x)\le\min_{x\in\tilde{Q}_2^{k-1}(s+2)}\varphi(x)\le\dots\le\min_{x\in\tilde{Q}_2^{k-1}(n)}\varphi(x).$$

Если для какого-либо $j\in\{s+1,\dots,n\}$ выполнится неравенство (11), то в соответствии с приведенными условиями решение задачи (2) будет принадлежать множеству $Y^{(j-1)}(x^*)=\bigcup_{i=1}^{j-1}X^{(i)}(x^*)$.

Отметим, что для дальнейшей локализации решения задачи (2) в случае $\bar{y} \in Q_2^k$ можно воспользоваться следующим приемом. Выберем вершину Q_2^k, смежную с x^*, обозначим ее x^1. Построим систему множеств $X^{(n)}(x^1)$, $n = 1, 2, ..., k$ и воспользуемся приведенной выше схемой. Получим другое множество, содержащее решение задачи (2):

$$Y^{(t-1)}(x^1) = \bigcup_{i=1}^{t-1} X^{(i)}(x^1).$$

Тогда решение задачи (2) принадлежит множеству

$$Y = Y^{(j-1)}(x^*) \bigcap Y^{(t-1)}(x^1).$$

Выбирая новые вершины многогранника Q_2^k и проводя аналогичные построения, можно продолжить процесс локализации решения исходной задачи (2).

Литература: *1. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Гребенник И.В.* Экстремальные задачи на множестве размещений. Х., 1991. 37с. (Препринт АН УССР/Ин-т пробл. машиностроения; 347). 2. *Яковлев С.В., Гребенник И.В.* О некоторых классах задач оптимизации на множествах размещений и их свойствах//Изв. вузов. Математика. 1991. №11. С.74-86. 3. *Гребенник И.В.* Декомпозиция множества допустимых решений и экстремальные свойства целевых функций в задачах оптимизации с булевыми переменными // Радиоэлектроника и информатика. 2001. №3. С. 93-99. 4. *Кострикин А И., Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986. 304 с. 5. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 588 с.

Поступила в редколлегию 29.04.2002

Рецензент: д-р физ.-мат. наук Новожилова М.В.

Гребенник Игорь Валериевич, канд. физ.- мат. наук, доцент кафедры системотехники ХНУРЭ. Научные интересы: дискретная оптимизация, вычислительные методы. Увлечение: волейбол. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-06.

УДК 621.327

РАЗРАБОТКА СТРУКТУРНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ОБРАБОТКИ ВИДЕОДАННЫХ

КОРОЛЕВ А.В.

Излагается структурная организация процесса обработки видеоданных, включающая организацию выявления длин серий и формирование из них массивов, кодирование длин одноцветных областей по числу двоичных серий, формирование полиадических кодов с учетом ограниченного числа двоичных серий в длинах одноцветных областей.

Введение

В работе [1] показано, что на основе последовательного выявления особенностей изображений по признакам: длина области (количество элементов в области), закрашенная одним цветом, число двоичных серий, значение динамического диапазона осуществляется сокращение избыточности. Однако конкретная организация обработки изображений не указывается. В то же время организация обработки значительно влияет на результирующее значение степени сжатия видеоинформации [2]. Поэтому для исключения избыточности изображений на основе предложенной совокупности информативных, структурных признаков требуется:

1) обеспечить наличие кодовых конструкций для сокращения избыточности по каждому признаку;

2) разработать структурную организацию обрабатываемых данных.

Первое условие (необходимое) обеспечивает устранение избыточности по каждому признаку в отдельности за счет наличия соответствующих процессов формирования кодовых комбинаций. Однако, чтобы осуществить последовательное устранение избыточности различных видов, необходимо организовать соответствие для смежных матриц информативности между обрабатываемыми данными и особенностями формируемых кодов. При этом должны дополнительно учитываться особенности аппаратной реализации процессов обработки [3, 4].

1. Разработка структурной организации обработки видеоданных

Структурная организация данных должна строиться так, чтобы обеспечить наибольший коэффициент сжатия и исключить неконтролируемые потери информации. Поэтому второе условие является достаточным для обеспечения наибольшей степени компактного представления видеоданных при минимальном количестве операций и исключения неконтролируемых потерь информации.

Структурная организация обработки данных определяется следующими параметрами: числом признаков; количеством элементов, для которых присваивается код (поэлементное или блочное); видом машинного представления (равномерный или неравномерный); размером массивов данных (постоянные или переменные); типом динамического диапазона данных (регулируемый или нерегулируемый).

Определим параметры структурной организации процесса обработки для предложенной совокупности признаков, состоящей из следующих матриц информативности: << исходное изображение; длины серий; коды по числу двоичных серий; полиадические коды >>.

При выборе ***вида машинного представления*** необходимо учитывать особенности аппаратной реализации процессов обработки данных. Эти особенности состоят в том, что: