УДК 519.6 DOI: https://doi.org/10.30837/IYF.CVSAMM.2024.270

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТОМОГРАФІЧНОЇ РЕКОНСТРУКЦІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ АЛГЕБРАЇЧНИХ МЕТОДІВ

Проценко А.В., Сердюков А.А.
Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, доц. Литвин О.Г.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ,
м. Харків, Україна
e-mail: artem.protsenko2@nure.ua, andrii.serdiukov@nure.ua

The work is dedicated to the development of algorithms for reconstructing functions from known projection data received from a computer tomograph. Algebraic methods were used for function reconstruction. The methods are based on the Radon transform and are reduced to solving a system of algebraic equations, which is overdetermined. Regularization methods and iterative methods were used to solve it. Piecewise-linear functions were chosen as coordinate functions, as well as functions built on the basis of interpolation operators. Numerical implementation of the methods was carried out. Test problems were considered. Satisfactory results were obtained.

Теоретичні відомості про перетворення Радона наведено в роботах [1, 2]. У роботі [2] наведено алгебраїчні методи відновлення функцій.

Грунтуємось на тому, що відомі проєкційні дані γ_k вздовж прямих L_k:

$$\int_{L_k} f(x,y)dl = \gamma_k,\ k = \overline{1,N}. \tag{1}$$

Треба відновити функцію $f(x,y)$ за відомими значеннями γ_k та прямими лініями L_k. $L_k : x\cos\varphi_k + y\sin\varphi_k - s_l = 0$.

Доведено [2], що співвідношення (1) зводиться до вигляду:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s_l\cos\varphi_k - t\sin\varphi, s_l\sin\varphi_k + t\cos\varphi_k)dt = \gamma_{k,l}.$$

Тут враховано, що пряма сканування залежить від двох параметрів. Межі інтегрування уточнюються в залежності від області, якій належить відтворюваний об'єкт.

Відтворення функцій алгебраїчними методами відбувається за такою схемою:

1. Дискретизація області.
2. Формування наближеного розв'язку, який подається у вигляді лінійної комбінації координатних функцій, коефіцієнти при яких невідомі і є значеннями відновлюваної функції у відповідних точках.
3. Формування системи лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення вказаних у пункті 2 невідомих коефіцієнтів.
4. Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
5. Запис наближеного розв'язку в аналітичному вигляді та оцінка похибки наближення.

Наведена схема реалізована в двох варіантах, різниця між якими полягала у використанні різних типів координатних функцій, що веде до зміни вигляду системи лінійних алгебраїчних рівнянь, а також у методах розв’язання цих систем.

Наводимо ці варіанти.

Варіант перший.

Наближений розв’язок з використанням кусково-лінійних функцій:

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}c_{ij}h_i(x)H_j(y).$$

Тут $h_i(x)$, $H_j(y)$ кусково-лінійні функції.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}c_{ij}\int_{-\infty}^{\infty}h_i(s_l\cos\varphi_k-t\sin\varphi_k)H_j(s_l\sin\varphi_k+t\cos\varphi_k)dt=\gamma_{k,l},k=\overline{1,N},l=\overline{1,M}.$$

Невідомі в системі c_{ij} $(i,j=\overline{1,n+1})$.

Для розв’язання системи використовувався метод регуляризації [2].

Для системи $AX=B$, маємо:

$$(A^TA+\alpha E)X=A^TB.$$

Система має параметр регуляризації α і є квадратною (сумісною). Її розв’язок:

$$X=(A^TA+\alpha E)^{-1}A^TB.$$

Параметр регуляризації α вибирався автоматично при мінімізації однієї з похибок $\delta(x,y,\alpha)$ методом «Золотого перерізу».

Варіант другий.

Наближений розв’язок, отриманий на основі операторів интерлінації [3,4]:

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n^2}a_{i\mu}h_i(x)H_\mu^*(y)+\sum_{v=1}^{n^2}\sum_{j=1}^{n}b_{vj}h_v^*(x)H_j(y)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}h_i(x)H_j(y).$$

Тут $h_i(x),H_\mu^*(y),h_v^*(x),H_j(y)$ кусково-сталі функції.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n^2}a_{i\mu}\int_{a_k}^{b_k}h_i(S_L\cos\varphi_k-t\sin\varphi_k)H_\mu^*(S_L\sin\varphi_k-t\cos\varphi_k)dt+$$

$$+\sum_{v=1}^{n^2}\sum_{j=1}^{n}b_{vj}\int_{a_k}^{b_k}h_v^*(S_L\cos\varphi_k-t\sin\varphi_k)H_j(S_L\sin\varphi_k-t\cos\varphi_k)dt-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\int_{a_k}^{b_k}h_i(S_L\cos\varphi_k-t\sin\varphi_k)H_j(S_L\sin\varphi_k-t\cos\varphi_k)dt=\gamma_{k,l}.$$

Тут невідомі в системі $a_{i\mu}$, b_{vj}, c_{ij}; число напрямків $k=\overline{1,N}$, число перетинів на напрямках $l=\overline{1,M}$, кількість рівнянь в системі $M\cdot N$.

Для розв’язання системи використовувався ітераційний метод ART – Algebraic Reconstruction Technigues [2]:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \tau_k \frac{y_i - \vec{a}_i^{\,T} \vec{x}^k}{\vec{a}_i^T \vec{a}_i} \vec{a}_i,$$

де $\vec{a}_i^T = [(a_i)_1, (a_i)_2, ..., (a_i)_n]$ – i-ий рядок матриці $\hat{A}$, записаної у вигляді вектора (стовпця) $(a_i)_j \equiv a_{ij}$, а τ_k – релаксаційний множник, $0<\tau_k<2$.

Досліджувалась збіжність методу при різних значеннях параметрів регуляризації та релаксації. Змінювались також кількість перерізів, координатні функції та дискретизація області. Підраховувались похибки.

В якості прикладу розглянемо відновлення функції з носієм у K еліпсах, при $K = 3$:

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{K-1} \begin{cases} -\left[\dfrac{(x-a_i)^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{(y-b_i)^2}{\sigma_2^2} - 1 \right], \text{якщо } \dfrac{(x-a_i)^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{(y-b_i)^2}{\sigma_2^2} \le 1, \\ 0, \text{ у противному разі.} \end{cases}$$

Результати обчислень наведено в табл. 1.

Таблиця 1 – Порівняння результатів

n	n^2	NN	MM	$NN \cdot MM$	Похибки				α_{opt}	Час (хв.)
					δ_1	δ_2	δ_3	δ_4		
25	625	26	26	676	0.081	0.007	0.009	0.085	0.007	2.1
30	900	31	31	961	0.077	0.006	0.007	0.077	0.009	3.8

Аналіз результатів показує, що при збільшені в системі кількості невідомих n^2 та кількості рівнянь $NN \cdot MM$ похибки зменшуються.

Список використаних джерел:

1. Radon J. Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralverte Längs gewisser Manningfaltigkeiten. Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig Math. Nat. Kl. 1917. Vol. 69. P. 262–277

2. Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. Society for Industrial and Applied Mathematics. – 2001. – 222 p.

3. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.

4. Lytvyn O.M., Lytvyn O.G. Analysis of the results of a computational experiment to restore the discontinuous functions of two variables using projections. I, Cybernetics and Systems Analysis, vol. 57, №5, Kyiv, 2021. P. 98-107.