

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ АДДИТИВНЫЙ ИСТОЧНИК РАССЕЯННОГО ПОЛЯ В СЛАБОНЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Проблема представления рассеянной волны в неоднородной среде охватывает ряд важнейших научных направлений: диагностика, технологическое воздействие, зондирование окружающей среды [1, 2]. В каждом направлении имеются свои особенности и в каждом по-своему ставят и решают задачи рассеяния с учетом специфики практических приложений. Строго задачи рассеяния решаются только в искусственно созданных условиях. Неоднородности неправильных форм приводят к значительным сложностям в решениях [3]. Особенности сложности возникают в задачах зондирования окружающей среды.

Математическое описание полей электромагнитных и акустических волн во многом совпадает, поэтому вне зависимости от природы волн теоретическое решение задач зондирования имеет общие составляющие. Классический подход в задачах зондирования слабонеоднородной среды использует приближение однократного рассеяния и представление вторичного поля в виде интеграла по объему, заполненному рассеивающими неоднородностями [4]. Подынтегральная функция представляет собой произведение амплитуды падающего поля, коэффициента отражения и функции Грина для свободного пространства. Причем, требование свободного пространства является необходимым, так как в ином случае потребовалось бы задать положение границ неоднородностей. Но в задачах зондирования естественных сред это, как правило, невозможно.

В общем случае можно сказать, что любой из элементов данного подхода нуждается в коррекции. Но интегрирование (суммирование) определяется линейностью суперпозиции волн и оправдано физически и математически. Амплитуда падающего поля, которая берется такой же, какой она была бы в невозмущенной среде, по сути, приводит к асимптотическому решению, описывающему широкий класс практических задач. Коэффициент отражения определяется из волновых уравнений с дополнительными слагаемыми [4] и не учитывает поляризации, что дает менее точное решение для электромагнитных волн. Выбор функции Грина для свободного пространства предполагает строгое решение только для дальней зоны. При увеличении размеров зондируемого объема расстояние ДЗ растет по квадратичному закону.

Специфика задач зондирования естественных сред требует методики, позволяющей без строгого вывода записать конечное выражение на основании общих физических представлений. Цель работы представить более точное описание, которое возможно в настоящее время с учетом комплексного использования аналитического представления и численных методов, реализуемых на современных ЭВМ. Поэтому, оставляя интегрирование и приближение однократного рассеяния, в данной работе внимание сосредоточено на более строгом описании вторичных источников.

Представление наиболее широко используемых элементарных источников основано на решениях волновых задач в сферической или цилиндрической системах координат. Применение этих систем обосновано тем, что волны, расходящиеся от малого источника произвольной формы, быстро становятся сферически симметричными. Поэтому форму источника, как правило, игнорируют, заменяя ее сферической и продолжая двигаться в направлении дальнейшего упрощения, приходят к модели точечного источника. Однако точечные источники удовлетворяют задачам формирования волновой картины только на расстояниях, существенно превышающих размеры всей излучающей области. Предельный переход (бесконечное уменьшение внутреннего контура интегрирования) происходит вокруг точки, в которой расположено начало радиус-вектора \vec{r} . Для функции $1/r$ точка $r=0$ особая, в ней функция $1/r$ не определена. Поэтому интеграл, записанный по области, несправедлив в ее

точках. Такая модель не может учесть природу реального источника, обладающего конечными размерами, так как размеры у точки отсутствуют. Полученные таким образом интегралы соответствуют интегрированию по мере Лебега. Физическим моделям как акустики, так и макроэлектродинамики соответствует требование интегрируемости функций по мере Жордана (элементы с площадью). Поэтому точечная модель не всегда удовлетворяет требованиям практики. Выбор и составление модели элементарного источника необходимо проводить так, чтобы сохранить зависимость распределения поля от расстояния, размеров и формы источника.

Вторичное поле определяется параметрами неоднородности и падающим полем. Вместе с условием однократного рассеяния это приводит к внешней задаче Дирихле. Выберем в качестве элементарного источника малый линейный излучатель. Учитывая требование произвольности общей длины излучателя и отсутствия взаимодействия между его элементами, необходимо, чтобы на линии, продолжающей элементарный источник, поле было равно нулю. Физическая модель такого источника – малая щель в поглощающем экране. Эта модель исключает влияние крайних точек и сферическую симметричность результирующей волны в свободном пространстве, но достаточно точно описывает поле в направлении, перпендикулярном источнику, и сохраняет аддитивность при интегрировании по всей излучающей области. Включение крайних точек в модель источника потребует рассмотрения условий на ребре, что значительно усложнит описание. Поскольку для задач зондирования наиболее важны малые углы падения, это приближение можно принять. Далее ограничимся случаем двумерного пространства, что позволит сохранить наглядность, но отметим, что в случаях, когда справедливо приближение однократного рассеяния, с помощью данной модели источника можно сравнительно точно и просто описать отражение и в трехмерной пространственной области.

Поле вокруг элементарного линейного источника можно описать с помощью пространственного спектра плоских волн, для которых волновой параметр k_x вдоль оси X изменяется в бесконечных пределах. Записывая $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2}$, где k – волновое число в свободном пространстве, имеем:

$$u(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} u_k(k_x) \exp(\pm i k_x x \pm i \sqrt{k^2 - k_x^2} \cdot z) dk_x. \quad (1)$$

Чтобы воспользоваться аппаратом функций Бесселя, представим координаты пространства вокруг источника в полярной системе, а переменную интегрирования синусом комплексного угла – $\varphi + i\phi$. Тогда поле малого источника можно записать в виде:

$$u(r, \theta) = L \int_{c_1} \exp(-i 2\pi r \cos(\varphi + i\phi - \theta)) \cos(\varphi + i\phi) dc_1, \quad (2)$$

где c_1 – контур интегрирования на комплексной плоскости; r, θ – координаты точки наблюдения в полярной системе.

Здесь и далее все расстояния нормированы к длине волны. Контур интегрирования в (2) по комплексному углу $\varphi + i\phi$ имеет вид, показанный на рис. 1.

Участок c_1 соответствует действительному значению корня в (1). На этом участке мнимая составляющая комплексного угла $\phi = 0$, его действительная часть φ является углом наклона парциальной составляющей пространственного спектра плоских волн и изменяется от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Распределение поля вблизи малого источника показано на рис. 2. Здесь L – длина источника, $L \ll \lambda$. Осцилляции поля вблизи края источника с обеих его сторон обусловлены конечной точностью вычислительной процедуры, при увеличении

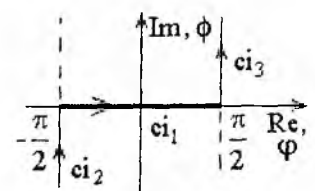


Рис. 1

точности осцилляции уменьшаются, но это требует значительного увеличения времени расчетов.

Косинусоидальная диаграмма направленности малого источника и спад амплитуды поля в его фронтальной зоне обусловлены выбранными граничными условиями: $u(z=0, |x| > L/2) = 0$. Они, не соответствующая свободному пространству, исключают влияние крайних точек источника, но дают возможность составлять из таких источников излучатели, имеющие любые размеры и произвольную форму.

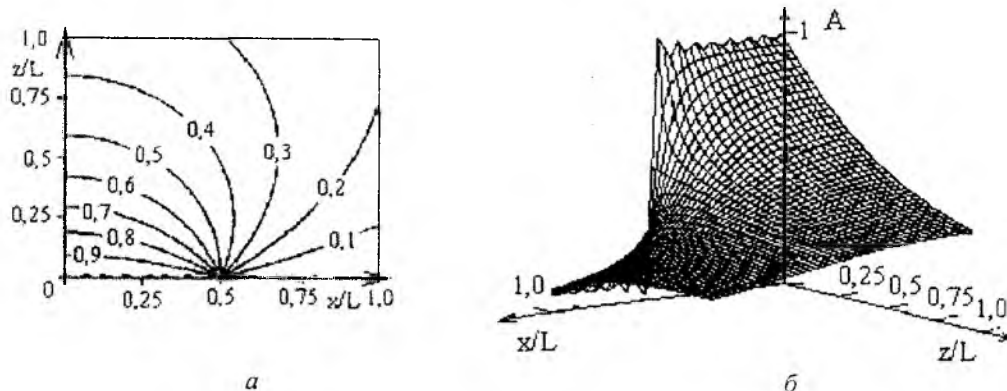


Рис. 2

Расчет полей больших излучателей и оценку точности получаемых результатов проведем на примере излучателей, поля которых известны. Рассмотрим линейный излучатель, размер которого $L_\Lambda \gg 1$. Вследствие сделанных приближений для него будут справедливы те же граничные условия, что и для элементарного источника $u(z=0, |x| > L_\Lambda/2) = 0$. В остальном пространстве, используя переменную $\kappa = k_x/k$ и размеры, отнесенные к длине волны, поле излучателя, составленного из источников (1) (2), можно записать как:

$$u = \int_{-\frac{L_\Lambda}{2}}^{\frac{L_\Lambda}{2}} u_i \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi\kappa(x-x_L) - 2\pi z\sqrt{\kappa^2-1}) d\kappa \right) dx_L, \quad (3)$$

где $u_i(x_L)$ – распределение поля вдоль излучателя.

Для определенности считаем $u_i(x_L) = 1$. Тогда

$$u(x, z) = L_\Lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi\kappa L_\Lambda)}{\pi\kappa L_\Lambda} \exp(-i2\pi\kappa x - 2\pi z\sqrt{\kappa^2-1}) d\kappa. \quad (4)$$

После несложных преобразований и, опустив малые слагаемые, получим:

$$u = L_\Lambda \frac{\sin(\pi L_\Lambda \sin \theta)}{\pi L_\Lambda \sin \theta} \cos \theta \int_{-\beta_{\max}}^{\beta_{\max}} \exp(-i2\pi r \cos \beta) \cos \beta d\beta. \quad (5)$$

В общем случае необходимо выбрать $\beta_{\max} = \pi/2$, но можно показать, что для протяженных излучателей достаточно ограничиться и меньшим углом.

Интеграл в этом выражении с точностью до постоянного множителя представляет асимптоту функции Ханкеля первого порядка для $r \rightarrow \infty$. Таким образом, ДН линейного излучателя, составленного из выбранных элементарных источников, соответствует традиционной ДН линейного излучателя в двумерном пространстве. Поле вблизи излучателя протяженностью $L_\Lambda = 5$ представлено на рис. 3 а. На рис. 3 б представлена действительная часть поля в

направлении главного максимума для трех значений длины излучателя: $L_\lambda = 0,2$ – сплошная линия; $L_\lambda = 1$ – штриховая линия; $L_\lambda = 2$ – пунктирная линия.

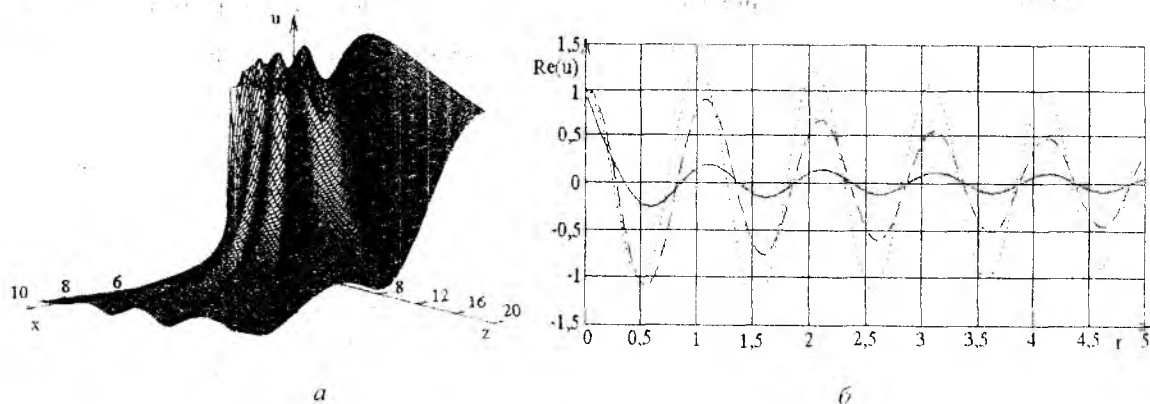


Рис. 3

В направлении главного максимума поле имеет всплеск, амплитуда которого превышает амплитуду на источнике. Фаза поля в непосредственной близости от источника соответствует фазе возбуждающего поля (рис. 3 б). На расстояниях существенно больших L_λ фаза в соответствии с (4) и асимптотическим представлением функции Ханкеля при $r \rightarrow \infty$ опережает фазу цилиндрической волны на $\pi/4$ (рис. 3 б).

Процесс движения волн на участке, на котором фазовый фронт превращается из плоского в цилиндрический, можно представить как разворот участков результирующих плоских фазовых фронтов от направления главного максимума (рис. 4), что приводит к увеличению длины волны в этом направлении и, значит, к увеличению фазовой скорости.

Аналогичный процесс имеет место и в боковых участках ближнего поля, на которых также происходит превращение плоских волн в цилиндрические (рис. 3 а). Поэтому в дальней зоне поле во всех направлениях сдвинуто на $\pi/4$ (4), и для малых L_λ этот процесс завершается быстрее. Но в боковых участках этот процесс скрыт более мощной плоской волной.

Завершение процесса превращения плоского фронта в цилиндрический происходит на расстоянии, называемом радиусом дальней зоны $r_{ДЗ}$ излучателя. Для $r > r_{ДЗ}$ можно считать зависимость поля по углу θ сформировавшейся, а зависимость от расстояния – близкой к $1/\sqrt{r}$. Радиус $r_{ДЗ}$ данного излучателя оценим, анализируя подынтегральное выражение в (3). На рис. 5 вверху изображено изменение первого сомножителя подынтегрального выражения в (3), обозначенного как $w_1(\kappa)$. Внизу – действительной части второго сомножителя в (3), обозначенной как $w_2(r, \kappa)$, при $x = 0$ и целых, четных значений r . Локальный максимум появляется на расстоянии, при котором осцилляции сомножителей в центральных частях коррелируют между собой. Этот случай показан для $w_2(r, \kappa)$ пунктирной линией.

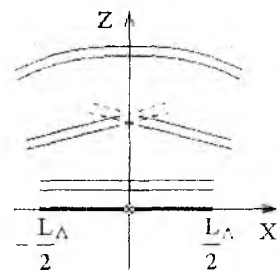


Рис. 4

Здесь соблюдены масштабы только по горизонтальной оси. Увеличение r приводит к сжатию нижнего графика по оси x . Область быстрых осцилляций дает малый вклад в результирующий интеграл, основной вклад дает область вблизи нуля. Пересечение этой областью осцилляций первого сомножителя приводит к флуктуациям поля вблизи источника (рис. 3а, 3б). Если эта область полностью перекрывается первым лепестком верхней кривой, то осцилляции прекращаются. В соответствии с (3) $\kappa_1 = 1/L_\lambda$. Можно также считать, что для прекращения осцилляций и формирования диаграммы направленности достаточно, чтобы

аргумент второго множителя при $\kappa_1 = 1/L_\Lambda$ изменился более, чем на 2π . Этот случай показан сплошной линией на нижнем графике рис. 5.

Определяя разность аргументов второго множителя при $\kappa = 0$ и $\kappa_1 = 1/L_\Lambda$ значением большим, чем 2π , после преобразований и обычных приближений, получим:

$$r_{ДЗ} > 2L_\Lambda^2. \quad (6)$$

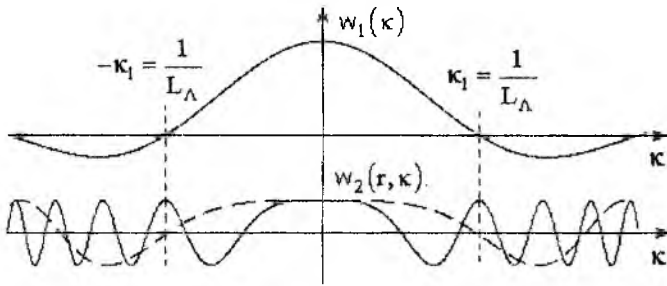


Рис. 5

Для нецелых r картина более сложная, но так как совместно с мнимой частью изменение r приводит к плавному изменению амплитуды, эти случаи можно не рассматривать. Полученный критерий соответствует общепризнанным.

Для произвольных распределений поля на излучателе в (3) общий результат изменяется лишь в соответствии с изменением результата преобразования

Фурье от $u_i(x_L)$. В частности наклонное падение, дающее линейное изменение фазы, даст наклон излученной волны за счет внешнего интеграла в (3). Суммирование по элементарным источникам неверно лишь при $|\kappa_n| \approx 1$, так как в этом случае доминируют механизмы, обуславливающие не отражение, а поворот фазового фронта.

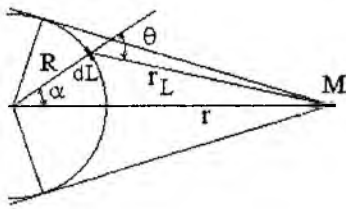


Рис. 6

Для задач зондирования наибольший интерес представляет источник, имеющий произвольную форму. Погрешность, которую следует ожидать при описании излучателей произвольной формы с использованием данных элементарных источников, оценим, сравнивая результаты расчета поля для цилиндрического источника с известными точными соотношениями. Геометрическая схема интегрирования этой задачи представлена на рис.6.

Так как поле элементарного источника определено в одной полуплоскости, интегрирование можно производить только по области, которая видна из точки М. Тогда для поля в точке наблюдения имеем:

$$u_c = \int_{-\alpha_m}^{\alpha_m} u_i \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-i2\pi r_L \kappa \sin \theta - 2\pi r_L \cos \theta \sqrt{\kappa^2 - 1} \right] d\kappa \right\} R d\alpha, \quad (7)$$

где α_m – предельный угол наблюдения точки М; $\alpha_m = \arccos \frac{R}{r}$.

После несложных преобразований при $u_a = 1$ имеем:

$$u_c = R \int_{-\alpha_m}^{\alpha_m} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-i2\pi \kappa r \sin \theta - 2\pi (r \cos \theta - R) \sqrt{\kappa^2 - 1} \right] d\kappa \right\} d\alpha. \quad (8)$$

Это выражение представляет коэффициент пропорциональности между полем на излучателе радиуса R и полем на расстоянии r от центра системы, по условию: $r > R$. Тогда можно предположить, что

$$\lim_{r \rightarrow R} u_c(R, r) = 1. \quad (9)$$

А при $r \gg 1$ выражение $u_c(R, r)$ в первом приближении должно соответствовать:

$$T_0(R, r) \cong \frac{H_0(2\pi r)}{H_0(2\pi R)}, \quad (10)$$

где H_0 – функции Ханкеля второго рода нулевого порядка.

Нулевой порядок функций Ханкеля выбран потому, что в геометрической схеме (рис. 6) вариации по углу отсутствуют. Соотношение между действительной и мнимой составляющими в функции Ханкеля второго рода соответствует описанию процесса распространения волны в положительном направлении и имеющей временной множитель $\exp(i\omega t)$.

Выражение (8) не приводится к элементарным функциям и весьма сложно для аналитического определения его асимптот, поэтому воспользуемся результатами численных расчетов. На рис. 7 представлены зависимости поля вокруг цилиндрического источника с единичной амплитудой радиуса R , рассчитанные по формулам (8) и (10). Для рис. 7 а, б, в и г R равно 0,3 0,5 0,8 и 1,2 соответственно.

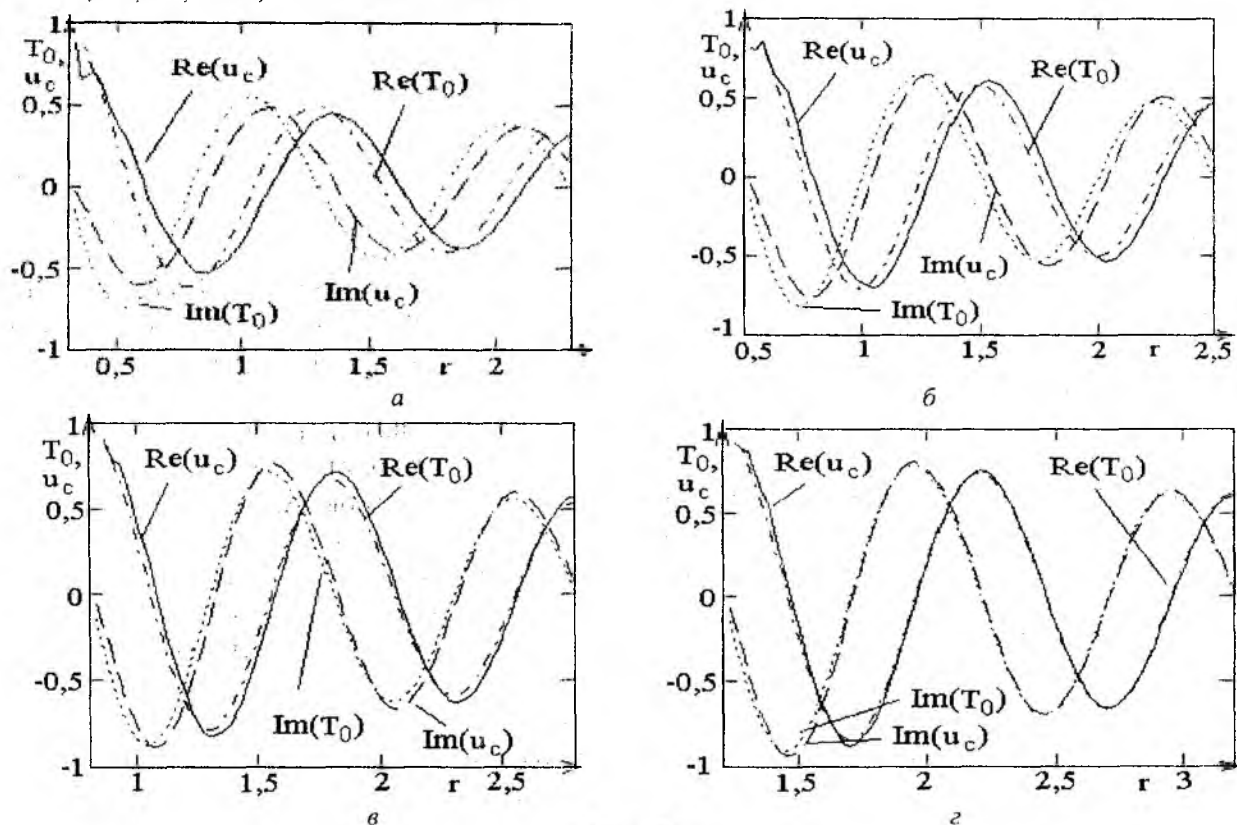


Рис. 7

Эти графики показывают хорошее совпадение (8) и (10), которое достаточно для расчетов полей в неоднородных газовых средах уже при размерах неоднородности $R \approx \lambda$.

Поле звукового давления цилиндрического или точечного источника, выбранного здесь в качестве эталона, описывается функцией Ханкеля нулевого порядка. Но поле скорости звукового течения описывается функцией Ханкеля первого порядка. Поэтому (8) необходимо еще сравнить с отношением, аналогичным (10), но для функций Ханкеля первого порядка:

$$T_1(R, r) \cong \frac{H_1(2\pi r)}{H_1(2\pi R)}. \quad (11)$$

Сравнение u_c и T_1 представлено на рис. 8 а, б для $R = 0,3$ и $R = 1,2$ соответственно. Здесь приняты те же обозначения, что и на рис. 7.

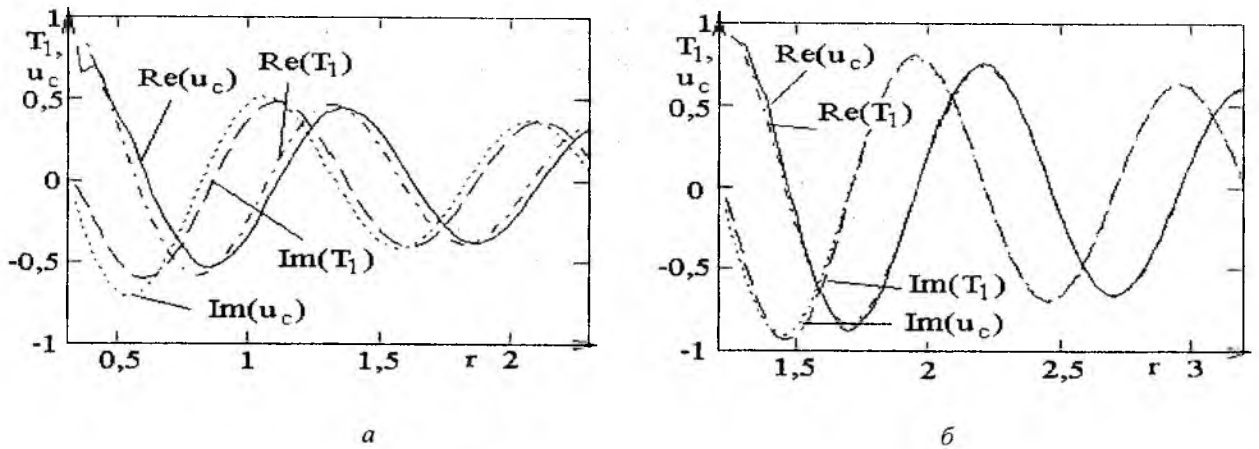


Рис. 8

Флуктуации действительной части $u_c(R, r)$ на малых расстояниях от источника (рис. 7, рис. 8) вызваны погрешностью вычислений и уменьшаются при увеличении точности расчетов.

Можно заметить, что на малых расстояниях совпадение расчетных зависимостей несколько хуже, но так как в реальных объектах неоднородности существенно больше длины волны, то для всех практически важных случаев выражение (8) достаточно точно описывает реальные процессы.

Совпадение зависимостей на рис. 7 и рис. 8, а также выбор критерия дальней зоны (рис. 5) позволяет считать, что полученные результаты позволят более точно описывать рассеянное поле в более широком диапазоне исходных параметров. Аналогичную методику можно применить для строгого описания поперечных волн с учетом их поляризации. В этом случае потребуется ввести в подынтегральные выражения поляризационный множитель. Это не приведет к принципиальным изменениям результатов, но их представление будет более громоздким, поэтому, учитывая ограниченный объем изложения, здесь рассматривалось только скалярное поле.

Дальнейшее совершенствование определится как прогрессом вычислительной техники и развитием численных методов, так и совершенствованием аналитической составляющей, в которой будут последовательно исключаться оставшиеся приближения

Список литературы: 1. Красненко Н.П. Акустическое зондирование атмосферы. Новосибирск: Наука, 1986. 166 с. 2. Алехин В.И. Исследования пограничного слоя атмосферы методом акустического зондирования // Радиотехника. 1998. №106. С. 6 – 14. 3. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 208 с. 4. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 03.06.2004