УДК 532. 59

А. Ю. ПАНЧЕНКО, канд.физ.-мат.наук

К ОЦЕНКЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ВТОРИЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ ПОЛЯ ПРИ АКУСТИЧЕСКОМ ЗОНДИРОВАНИИ ТУРБУЛЕНТНЫХ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД

Практическая потребность дистанционного зондирования движущихся потоков заставляет скрупулезнее подойти к анализу известных положений. Рассеяние акустических волн турбулентной движущейся средой до настоящего времени имеет ряд невыясненных нюансов, что допускает разночтения и неадекватную интерпретацию экспериментальных результатов. Единственной причиной этому можно назвать лишь неоптимальное составление моделей реальных процессов, нерациональную или недостаточно удобную запись известных выражений. Это приводит к последовательности незначительных отклонений, которые на каждом отдельном этапе кажутся несущественными и легко исправимыми, но в итоге они могут дать столь существенное различие между теорией и экспериментом, что в некоторых случаях приводится постулировать дополнительные предположения и на их основе строить дополнительную теорию, с единственной целью в основных чертах восстановить соответствие. Однако, такой путь часто приводит в тупик. Поэтому при расширении сферы применения известных законов необходимо вновь возвращаться на начальные позиции, расширяя смысл исходных положений, и скрупулезнее проводить дальнейшие преобразования. В случае зондирования движущихся потоков это требует более детального анализа процессов, основные модели которых и математическое описание были предложены задолго до появления возможностей технической реализации дистанционного неконтактного зондирования сплошных сред.

При расчете параметров потоков реальных жидкостей и газов, как правило, требуется учитывать вязкость, но в случае анализа распространения акустических волн с высокой степенью точности можно ограничится приближением невязкой, нетеплопроводной среды. Поэтому для линеаризации системы уравнений гидродинамики и последующего получения волнового уравнения можно заранее исключить из рассмотрения вязкость, и вместо весьма сложного уравнения Навье-Стокса использовать более простое уравнение Эйлера, описывающее движение идеального газа.

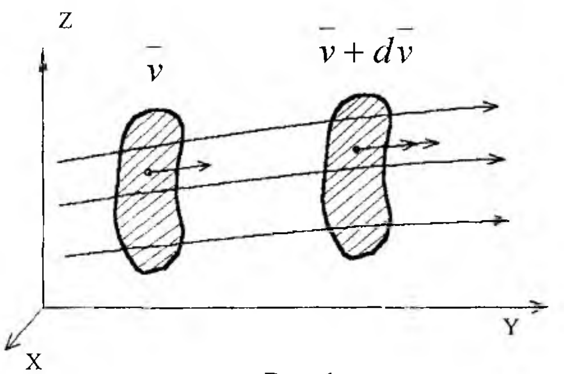

Рис. 1

Традиционный вывод уравнения Эйлера основан на втором законе Ньютона. Иногда в качестве исходной посылки берут закон сохранения импульса, который является его прямым следствием. Для вывода уравнения второй закон Ньютона записывают для малой массы газа, движущейся вместе с потоком (рис.1). В процессе вывода совершают предельный переход при стремлении массы к нулю, что позволяет представить конечное соотношение через удельные параметры среды и точечные параметры потока. В результате получается уравнение вида

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \vec{f}\,. \tag{1}$$

Производную скорости в левой части называют полной производной скорости, отнесенной к некоторому малому объему среды, движущемуся вместе с потоком. В правой части стоит сумма удельных значений сил, действующих на эту точку. Она состоит из градиента давления в самом потоке и внешней силы, если ее источники существуют.

Первое уравнение систем уравнений гидродинамики и акустики – уравнение непрерывности – записывается также для малого объема. Но этот объем неподвижен относительно выбранной системы координат (рис.2). Первое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = \omega \quad , \tag{2}$$

где ω – удельная мощность внешних источников вещества.

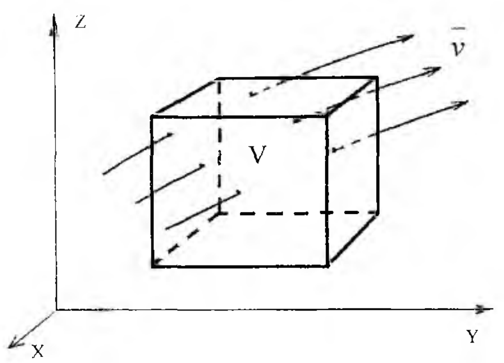

Рис. 2

Составлено оно для элементарного объема пространства (рис.2), в котором изменение плотности определяется двумя причинами: во-первых, перенос плотности потоком из соседних точек пространства; во вторых, действием внешних источников ω, если такие имеются.

Таким образом, уравнение (1) составлено для производной скорости, отнесенной к малому объему, движущемуся вместе с потоком, а уравнение (2) – для объема, неподвижного относительно выбранной системы координат. Совместно использовать эти уравнения для описания одного процесса нельзя, так как они относятся к разным объектам. Это противоречие обусловлено тем, что исходные физические законы существенно отличаются и, соответственно, их математическая интерпретация, также существенно разная. Иногда, если это допускают условия конкретной задачи, противоречие разрешается выбором системы координат, движущейся вместе с потоком. Но для большинства задач такое представление неудобно.

В известных в настоящее время источниках указывается, что Эйлер привел эти уравнения к системе с помощью следующего приема. Для совмещения объектов, для которых записаны уравнения, необходимо в уравнении (1) выделить производную скорости в локальной точке пространства. Для этого полная производная при перемещении массы от одной точки пространства к другой представлена в виде суммы производной, действующей в локальной точке, и существующего в потоке изменения скоростей по пространству – конвективной производной. Конвективная производная по отношению к движущейся массе по сути определяется переносом пространственного изменения скорости, точно так же как в уравнении непрерывности перенос градиента плотности. разницей скоростей между двумя близкорасположенными точками пространства:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \quad . \tag{3}$$

Естественно, что при этом иной смысл должен быть вложен и в слагаемые правой части (1). В этом случае $\operatorname{grad} p$ и $\vec{f}$ должны быть отнесены также к неподвижной точке пространства, а не к движущейся вместе с потоком. Но учитывая, что предельный переход приводит к бесконечно малым расстояниям, эти величины также будут отличаться на бесконечно малую величину.

В уравнении Эйлера отсутствуют иные источники, кроме источников внешней силы. Рассмотрим другой подход для вывода уравнения Эйлера, который можно провести непосредственно для точки, фиксированной относительно выбранной системы координат.

В качестве исходной переменной воспользуемся кинетической энергией, которая так же как и масса обладает свойством неуничтожимости. Ранее [1,2] использовалась полная энергия, что создавало значительные трудности при получении конечных выражений. Поэтому подобный подход для анализа процессов рассеяния звука широкого применения не нашел, по сути его анализ и использование до получения конечных выражений ограничились лишь [1]. Более того, эти трудности привели к тому, что впоследствии этот анализ был признан как грубый.

Вероятно, раздельное использование кинетической и потенциальной энергии, для которой аналогичный подход показан в [3], не делалось ранее из-за неуверенности в возможности получения векторного уравнения для скорости на основании исходного скалярного уравнения.

Для удельного значения кинетической энергии можно записать

$$\frac{\partial e_c}{\partial t} + \operatorname{div}(e_c \vec{v}) = \omega_c \quad . \tag{4}$$

Удельное значение кинетической энергии можно выразить как:

$$e_c = \rho \frac{v^2}{2} = \rho \frac{(\vec{v} \cdot \vec{v})}{2} \quad . \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), имеем:

$$\frac{v^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\left(\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)+\frac{v^2}{2}\operatorname{div}(\rho\vec{v})+\left(\rho\vec{v}\cdot\operatorname{grad}\frac{v^2}{2}\right)=\omega_c \quad . \tag{6}$$

Второе и третье слагаемое в левой части представляют собой левую часть уравнения (2), умноженную на половину квадрата скорости, их можно заменить на $\omega v^2/2$. Градиент в четвертом слагаемом можно представить на основании известной формулы векторного анализа

$$\operatorname{grad}\frac{v^2}{2}=(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}+[\vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{v}] \quad . \tag{7}$$

Тогда

$$\frac{v^2}{2}\omega+\rho\left(\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)+\rho(\vec{v}\cdot(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v})+\rho(\vec{v}\cdot[\vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{v}])=\omega_c \quad . \tag{8}$$

Четвертое слагаемое тождественно равно нулю. Объединяя под знаком скалярного произведения второе и третье слагаемые, получим:

$$\frac{v^2}{2}\omega+\rho\left(\vec{v}\cdot\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right)\right)=\omega_c \quad . \tag{9}$$

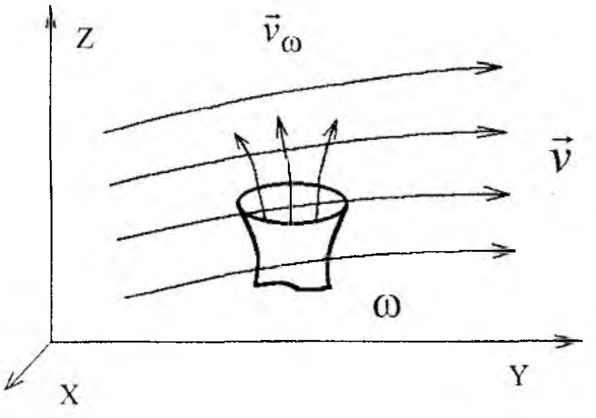

Рис. 3

Второй сомножитель в скалярном произведении представляет сумму первых двух слагаемых уравнения Эйлера. Но в уравнении Эйлера не присутствует источник массы ω, появившийся в левой части. Тем не менее его появление имеет ясный физический смысл. Задавая источник вещества в уравнении непрерывности, ничего не было сказано относительно скорости, которую сообщает веществу источник в момент ее поступления в поток. Умолчание подразумевает нулевую скорость, значит, для того, чтобы вновь поступившее вещество стало двигаться совместно с остальным веществом потока, ему должна перейти часть кинетической энергии потока. Первое слагаемое в данном уравнении представляет этот механизм (рис.3). Однако, сделанное в начале вывода приближение относительно среды, как об идеальном газе, накладывает более строгие ограничения на действие внешних источников массы. Приближение идеального газа частично предполагает отсутствие взаимодействие между его молекулами. А именно, такого взаимодействия, которое обеспечивает передачу тепла, и такого, которое обеспечивает передачу момента количества движения через вязкость. Оставлена только та часть, которая обуславливает давление. Поэтому, строго говоря, поток не может передать поступившему веществу свою скорость. Для этого газ должен обладать вязкостью. В идеальном газе в этом случае будут существовать два потока молекул, не изменяющие своего направления. Таковы издержки сделанного предположения. Поэтому, говоря о действии источника вещества в потоке идеального газа, необходимо сразу определять его так, чтобы скорость вносимого вещества была равна скорости потока, или решать локальную задачу передачи моментов количества движения с учетом вязкости.

Далее рассмотрим источники кинетической энергии. Здесь нужно рассмотреть два механизма: первый – действие силы на движущуюся массу, находящуюся в заданной точке пространства. Этот механизм может содержать две составляющих – обусловленную градиентом давления в самом потоке и обусловленную некоторой внешней силой. Второй механизм возникнет в том случае, если действующий в потоке источник вещества будет сообщать ему некоторую начальную скорость. Для полного исключения этого механизма из рассмотрения нужны основания, а при анализе его действия необходимо учитывать издержки приближения идеального газа, которые отмечены выше. Тогда

$$\omega_c = (\mathrm{grad}\, p \cdot \vec{v}) + (\vec{f} \cdot \vec{v}) + \omega \frac{(\vec{v}_\omega \cdot \vec{v}_\omega)}{2} \quad . \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9), получим:

$$\left(\vec{v} \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\, p - \frac{1}{\rho}\vec{f}\right)\right) + \frac{\omega}{\rho}\frac{(\vec{v} \cdot \vec{v})}{2} = \frac{\omega}{\rho}\frac{(\vec{v}_\omega \cdot \vec{v}_\omega)}{2} \quad . \tag{11}$$

При выполнении для источника массы вышеперечисленных условий слагаемые, которые его содержат, скомпенсируют друг друга. Тогда скалярное произведения в правой части должно быть равно нулю, что при ненулевой скорости потока потребует равенства нулю второго сомножителя, представляющего собой уравнение Эйлера в каноническом виде.

Представленный подход инвариантен тому, с помощью которого получено уравнение непрерывности. Кроме того. инвариантность подходов состоит и в том, что в обоих случаях исходными переменными являются скалярные величины, для которых справедлив закон сохранения, и в обоих случаях совершался переход к удельным значениям при стремлении к нулю объема, фиксированного относительно выбранной системы координат. Последующий переход от уравнения сохранения кинетической энергии к уравнению Эйлера является лишь формальными преобразованиями.

Можно отметить, что представленный подход является более строгим, поскольку заставил обратить внимание на действие источников вещества. Кроме того, прослеживая путь возникновения каждого из слагаемых, можно заметить, что конвективная производная $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ возникла из второго слагаемого в левой части уравнения сохранения – $\mathrm{div}(e_c \vec{v})$, таким образом, по аналогии с уравнением непрерывности, можно сказать, что конвективное слагаемое само представляет механизм изменения скорости в выбранной точке пространства за счет переноса этого свойства из соседней точки. Это положение полностью соответствует строгим математическим представлениям. Конвективная производная является произведением вектора скорости $\vec{v}$ на дифференциальную диаду $\nabla\vec{v}$ – тензор второго ранга, которую иногда называют градиентом вектора $\mathrm{Grad}\,\vec{v}$ [2].

Действующие силы $\mathrm{grad}\, p$ и $\vec{f}$ в этом случае также оказываются отнесенными к выбранной точке пространства.

Сделанные выше выводы относительно источников вещества необходимы для корректного представления источников вторичного поля акустических волн, образовавшегося на неоднородностях среды для решения задач в приближении однократного рассеяния. Эта соответствует случаю, когда источником вторичного поля является сама турбулезированная среда, облучаемая звуковыми волнами. При этом не имеет значения, введены эти источники в исходной системе акустических уравнений, или представлены в совокупности с другими в конечном волновом уравнении. Конечно же, при представлении вида источников, как в случае однократного рассеяния, так и, тем более, в случае генерации звука турбулентным потоком, необходимо учесть возможные последствия приближения невязкого газа.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод о высокой эффективности инвариантного подхода и математического аппарата, которые дают возможность строго, без дополнительных предположений получить уравнения для вектора, используя исходные положения для скалярной величины.

Список литературы: 1. *Блохинцев Д.И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 208 с. 2. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с. 3. *Панченко А.Ю.* Уравнение состояния в системе уравнений акустики для неоднородной движущейся среды // Радиотехника. 1997. Вып. 103. С. 169–174.

Харьковский государственный технический университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 4.04.2001