International Science Group

ISG-KONF.COM

XII
INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE "ACTUAL ISSUES OF THE DEVELOPMENT OF SCIENCE AND ENSURING THE QUALITY OF EDUCATION"

Florence, Italy

March 28 -31, 2023

ISBN 979-8-88955-323-6

DOI 10.46299/ISG.2023.1.12

ACTUAL ISSUES OF THE DEVELOPMENT OF SCIENCE AND ENSURING THE QUALITY OF EDUCATION

Proceedings of the XII International Scientific and Practical Conference

Florence, Italy
March 28 – 31, 2023

UDC 01.1

The 12th International scientific and practical conference "Actual issues of the development of science and ensuring the quality of education" (March 28 – 31, 2023) Florence, Italy. International Science Group. 2023. 428 p.

ISBN – 979-8-88955-323-6
DOI – 10.46299/ISG.2023.1.12

ЗАГАЛЬНА НЕОДНОРІДНА ГРАНИЧНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНИКА

Пшонкіна Аліна Степанівна,
студентка групи КУІБ-21-3
Харківський національний університет радіоелектроніки

Стогній Надія Петрівна
к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики
Харківський національний університет радіоелектроніки

В природі і техніці найчастіше мають місце нестаціонарні процеси теплообміну [1-2]. Теплопровідність при нестаціонарному режимі зустрічається при нагріванні або охолодженні різних об’єктів, при переходах з одного теплового режиму на інший режим. Нестаціонарні режими теплопровідності можуть бути перехідними або періодичними. Перехідні процеси характеризуються переходом від одного стаціонарного режиму до іншого стаціонарного режиму. Прикладом перехідних процесів може служити нагрівання (охолодження) тіл у газовому чи рідинному середовищі з постійною температурою. До перехідного процесу відноситься і розігрів опалювальних приладів до стаціонарного режиму. Періодичними режимами називають такі режими, при яких температура тіла коливається в часі за визначеним законом. Як приклад, можна розглядати добову зміну температури зовнішнього повітря, що впливає на температуру конструкцій будинків. В інженерній практиці перехідні процеси зустрічаються частіше і тому ці процеси будуть вивчатися надалі [3].

Формулювання задачі нестаціонарної теплопровідності здійснюють на основі математичної моделі. Математичні моделі явищ теплопровідності включають диференціальні рівняння основних досліджуваних процесів і рівняння для крайових (граничних і початкових) умов [4-5].

Постановка задачі. Знайти розв’язок рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + F(x, y, t) \qquad (1)$$

в області $D(0<x<l, 0<y<h, t>0)$, з початковими умовами

$$u(x,y,t)\big|_{t=0} = f(x,y), \tag{2}$$

і граничними умовами

$$u(x,y,t)\big|_{x=0} = \varphi_1(y,t), \tag{3}$$

$$u(x,y,t)\big|_{x=l} = \varphi_2(y,t), \tag{4}$$

$$u(x,y,t)\big|_{y=0} = \phi_1(x,t), \tag{5}$$

$$u(x,y,t)\big|_{y=h} = \phi_2(x,t), \tag{6}$$

Розв'язок поставленої задачі будемо шукати методом Фур'є, тобто у вигляді ряду Фур'є за синусами (власними функціями першої однорідної задачі) за змінною y:

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \sin\frac{n\pi}{h} y, \tag{7}$$

де невідомий коефіцієнт Фур'є визначається наступним чином

$$u_n(x,t) = \frac{2}{h}\int_0^h u(x,y,t)\sin\frac{n\pi}{h} y dy \tag{8}$$

Помножимо рівняння (1) на $\frac{2}{h}\sin\frac{n\pi}{y} y$ та проінтегруємо на проміжку $(0,h)$. Інтегруючи за частинами член, який містить похідну $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, та приймаючи до уваги умови (5) і (6), одержимо:

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2} - \left(\frac{an\pi}{h}\right)^2 u_n(x,t) + \Phi_n(x,t), \tag{9}$$

де

$$\Phi_n(x,t) = \frac{2a^2 n\pi}{h}\Big(\phi_1(x,t) - (-1)^n \phi_2(x,t)\Big) + F_n(x,t),$$

$$F_n(x,t) = \frac{2}{h}\int_0^h F(x,y,t)\sin\frac{n\pi}{h} y dy. \tag{10}$$

Початкові та граничні умови для рівняння (9) визначаються із умов (2)-(4), що мають вигляд:

$$u_n(x,t)\big|_{t=0} = f_n(x), \tag{11}$$

де

$$f_n(x) = \frac{2}{h}\int_0^h f(x,y)\sin\frac{n\pi}{h}ydy, \tag{12}$$

$$u_n(x,t)\big|_{x=0} = \varphi_{1n}(t), \tag{13}$$

$$u_n(x,t)\big|_{x=l} = \varphi_{2n}(t). \tag{14}$$

Тут

$$\varphi_{in}(x) = \frac{2}{h}\int_0^h \varphi_i(y,t)\sin\frac{n\pi}{h}ydy, \quad i=1,2. \tag{15}$$

Задача (9), (11), (13), (14) співпадає з одномірною першою граничною задачею, розв'язок якої можна записати у вигляді:

$$u_n(x,t) = \int_0^l \frac{\exp(-\lambda_n^2 t) f_n(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}\right]\right)d\tau +$$

$$+\int_0^t \exp\left[-\lambda_n^2(t-\tau)\right]\varphi_{1n}(\tau)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{x+2kl}{2a\sqrt{\pi}\sqrt{(t-\tau)^3}}\exp\left[-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\tau -$$

$$-\int_0^t \exp\left[-\lambda_n^2(t-\tau)\right]\varphi_{2n}(\tau)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{x-l+2kl}{2a\sqrt{\pi}\sqrt{(t-\tau)^3}}\exp\left[-\frac{(x-l+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]d\tau +$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^l \frac{\exp\left[-\lambda_n^2(t-\tau)\right]\Phi_n(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right)d\xi\,. \tag{16}$$

Запишемо тепер формули

$$\frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\lambda_n^2 t\right]\sin\frac{\lambda_n y}{a}\sin\frac{\lambda_n\eta}{a} =$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2t}\right]-\exp\left[-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2t}\right]\right), \quad (17)$$

$$\frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\lambda_n^2t\right]h\sin\frac{\lambda_n y}{a}=\frac{1}{2\left(a\sqrt{\pi t}\right)^3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left((y+2mh)\exp\left[-\frac{(y+2mh)^2}{4a^2t}\right]\right), \quad (18)$$

$$\frac{2}{h}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\exp\left[-\lambda_n^2t\right]h\sin\frac{\lambda_n y}{a}=$$

$$=\frac{1}{2\left(a\sqrt{\pi t}\right)^3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left((y-h+2mh)\exp\left[-\frac{(y-h+2mh)^2}{4a^2t}\right]\right). \quad (19)$$

В цих формулах слід вважати $\lambda_n=\frac{an\pi}{h}$.

Підставляючи значення коефіцієнта Фур'є (16) у формулу (7), враховуючи позначення (10), (12), (15) і формули (17)-(19), а також формально помінявши порядки інтегрування суми, одержимо розв'язок задачі у вигляді:

$$u(x,y,t)=\int_0^l d\xi\int_0^h\frac{f(\xi,\eta)}{4a^2\pi t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2t}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2t}\right]\right)\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2t}\right]-\exp\left[-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2t}\right]\right)d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_0^h\frac{\varphi_1(\eta,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x+2kl)\left(\exp\left[-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right)\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]-\exp\left[-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right)d\eta-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_0^h\frac{\varphi_2(\eta,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(x-l+2kl)\left(\exp\left[-\frac{(x+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right)\times$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]-\exp\left[-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right)d\eta+$$

$$+\int_0^t d\tau \int_0^l \frac{\phi_1(\xi,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (y+2mh)\left(\exp\left[-\frac{(y+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right)\times$$

$$\times \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right)d\xi -$$

$$-\int_0^t d\tau \int_0^l \frac{\phi_2(\xi,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (y-h+2mh)\left(\exp\left[-\frac{(y-h+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right)\times$$

$$\times \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right)d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_0^l d\xi \int_0^h \frac{F(\xi,\eta,\tau)}{4a^2\pi(t-\tau)} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{(x-\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi+2kl)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right)\times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left[-\frac{(y-\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]-\exp\left[-\frac{(y+\eta+2mh)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right)d\eta. \qquad (20)$$

Досить легко перевірити, що формально знайдений розв'язок (20) дійсно задовольняє диференціальному рівнянню (1), початковій умові (2) та граничним умовам (3)-(6), якщо задані функції неперервні, і, крім того, функція $F(x,y,t)$ задовольняє умовам Гьольдера за першими двома аргументами.

Отож, в роботі відновлений чіткий алгоритм розв'язування, який схований за записом умови і отриманим результатом, для неоднорідної задачі теплопровідності для прямокутника. Це дасть змогу узагальнити та систематизувати знання студентів із даної теми, спонукати їх виходити за рамки курсу «Диференціальні рівняння у частинних похідних», вести свою навчально-дослідницьку, наукову роботу.

Список літератури:

1. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1964. – 286 с.

2. Будак Б.М., Самарский А.А. Сборник задач по математической физике. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. – 684 с.

3. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 444 с.

4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.:

Наука, 1977. – 735 с.
5. Толстов Г.П. Ряды Фурье. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1981. – 396 с.