

Т. А. ЯРХО

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПИКА СПЕКТРАЛЬНОЙ
КОМПОНЕНТЫ ПРИ БЫСТРОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ**

Решение ряда задач [1; 2], возникающих при функционировании различных радиотехнических систем в процессе передачи, приема и преобразования сигналов, базируется на спектральном анализе. Цель спектрального анализа — разложение анализируемого сигнала на монохроматические составляющие с определением их частот и амплитуд. Качество спектрального анализа принято оценивать значением двух основных взаимосвязанных характеристик: величиной частотного разрешения, минимальным расстоянием по частоте, на котором сигналы могут быть различимы, и способностью воспроизводить форму спектральной зависимости без искажений. Большинство из используемых способов определения спектров основаны на применении быстрого преобразования Фурье (БПФ), эффективного при вычислениях. Однако спектр БПФ, в связи с ограниченностью интервала наблюдения и дискретной природой метода, в общем случае является аппроксимацией истинного спектра сигнала, каче-

ство которой зависит от принадлежности исходного сигнала к определенному классу.

Единственный класс сигналов, спектр БПФ которых с точностью до постоянного множителя совпадает с истинным, — периодические сигналы с ограниченным спектром, при условии, что интервал наблюдения во временной области кратен периоду [3]. Последнее

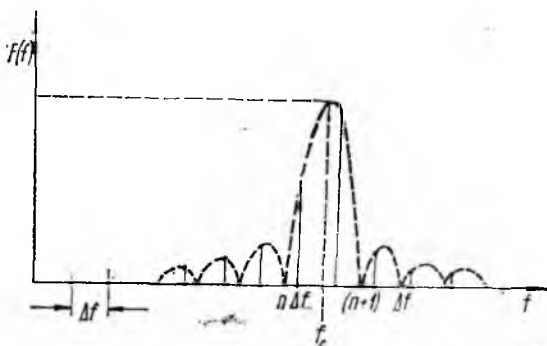


Рис. 1

условие равносильно тому, что все частотные составляющие спектра периодического сигнала кратны интервалу разрешения БПФ.

Невыполнение указанного требования в общем случае, для сигналов любого класса, влечет смещение по частоте положения пика в спектре БПФ по отношению к истинному спектру сигнала. На рис. 1 представлена амплитуда БПФ сигнала с частотой f_c , $f_c = p \Delta f$, где p — нецелое, Δf — интервал разрешения БПФ. Точность определения истинной частоты сигнала, соответствующей спектральному пику, в методе БПФ ограничивается величиной одного интервала разрешения, что является неприемлемым для многих практических задач.

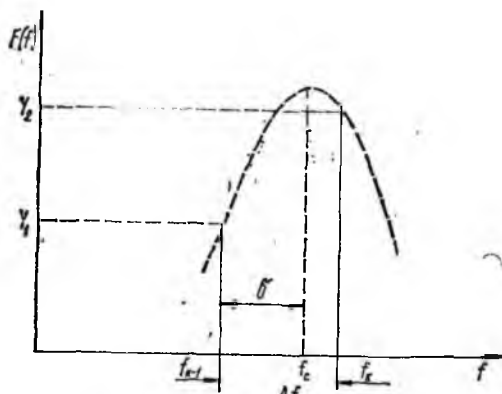


Рис. 2

Для преодоления указанного ограничения в работе [3] предложен метод определения положения пика спектральной компоненты для чисто синусоидального спектра внутри интервала разрешения БПФ $[f_{k-1}, f_k]$ с прямоугольным окном. Частота f_c , соответствующая истинному положению спектрального пика, находится путем добавления к f_{k-1} поправочного коэффициента δ , $f_c = f_{k-1} + \delta$, где δ определяется из выведенного в работе уравнения

$$Y_2 (\Delta f - \delta) \sin (\delta \pi / \Delta f) - Y_1 \delta \sin [(\Delta f - \delta) \pi / \Delta f] = 0, \quad \Delta f = f_k - f_{k-1}, \quad (1)$$

Y_1, Y_2 — значения амплитуд в точках f_{k-1} и f_k спектра БПФ с прямоугольным окном исходного сигнала (рис. 2).

Для решения трансцендентного уравнения (1) в работе [3] применен итерационный алгоритм с предварительно выбранным начальным приближением для δ . Приведен численный расчет на ЭВМ, показывающий достаточность трех-четырёх итераций процедуры для получения приемлемого результата.

Однако, произведя необходимые упрощения уравнения (1), можно показать, что оно имеет точное решение. Действительно,

$$\sin [(\Delta f - \delta) \pi / \Delta f] = \sin (\delta \pi / \Delta f). \quad (2)$$

Подставляя (2) в уравнение (1), получаем

$$Y_2 (\Delta f - \delta) \sin (\delta \pi / \Delta f) - Y_1 \delta \sin (\delta \pi / \Delta f) = 0,$$

откуда следует выражение для поправочного коэффициента

$$\delta = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} \Delta f. \quad (3)$$

Полученный результат избавляет от необходимости определять нужное количество итераций для достижения заданной точности в каждом конкретном случае анализа сигналов.

Результат существенно упрощает вычислительную процедуру определения истинного положения спектрального пика, что является важным для практической реализации метода в условиях ограниченной возможности использования прикладных программ или оперативной памяти.

На практике для выделения определенных характеристик спектральных оценок часто прибегают к сглаживанию отсчетов исходного сигнала на концах интервала наблюдения. Последовательность временных отсчетов сигнала умножают на весовые функции (окна) или, что эквивалентно, сглаживают спектральные отсчеты.

Широко используется окно Ханна, определяемое во временной области выражением

$$\omega(n) = 0,5 [1 - \cos(2\pi n/N)], \quad n = \overline{0, N-1}. \quad (4)$$

Отсчеты спектра, вычисленного при применении окна Ханна $S_x(k\Delta f)$ связаны с отсчетами спектра, полученного при использовании прямоугольного окна $S(k\Delta f)$, соотношением [4]

$$S_x(k\Delta f) = \frac{1}{2} \left\{ S(k\Delta f) - \frac{1}{2} \{ S[(k-1)\Delta f] + S[(k+1)\Delta f] \} \right\}, \quad (5)$$

$$k = \overline{1, N-2}.$$

Для чисто синусоидального сигнала спектр БПФ с прямоугольным окном определяется выражением

$$S(k\Delta f) = S_1(k\Delta f) + S_2(k\Delta f), \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (6)$$

где

$$S_1(k\Delta f) = \exp \left[-j \frac{N-1}{N} (k\Delta f + f_c) \pi / \Delta f \right] \frac{A \sin [(k\Delta f + f_c) \pi / \Delta f]}{2 \sin [(k\Delta f + f_c) \pi / N \Delta f]}; \quad (7)$$

$$S_2(k\Delta f) = \exp \left[-j \frac{N-1}{N} (k\Delta f - f_c) \pi / \Delta f \right] \frac{A \sin [k\Delta f - f_c) \pi / \Delta f]}{2 \sin [(k\Delta f - f_c) \pi / N \Delta f]}. \quad (8)$$

$k = \overline{0, N-1}.$

Здесь N — количество отсчетов; f_c — частота сигнала; A — амплитуда сигнала; Δf — интервал разрешения БПФ.

Пренебрегая влиянием значений функции $S_1(k\Delta f)$ вблизи точки f_c , считаем $S(k\Delta f) = S_2(k\Delta f)$, $k = \overline{0, N-1}$. Тогда уравнение (5) для спектра БПФ с окном Ханна указанного сигнала имеет вид

$$S_x(k\Delta f) = \frac{1}{2} \left\{ S_2(k\Delta f) - \frac{1}{2} \{ S_2[(k-1)\Delta f] + S_2[(k+1)\Delta f] \} \right\}, \quad (9)$$

$k = \overline{1, N-2}.$

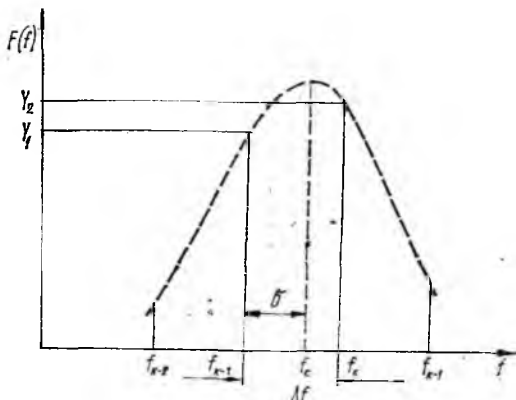


Рис. 3

Из (8), (9) следует, что в случае, когда частота сигнала f_c кратна интервалу разрешения Δf ($f_c = p\Delta f$, p — целое (10), $S_x(k\Delta f)$ обращается в 0 во всех отсчетных точках, кроме $(p-1)\Delta f$, $p\Delta f$, $(p+1)\Delta f$, где соответственно принимает значения

$$-S_2(p\Delta f)/4, \quad S_2(p\Delta f)/2, \quad -S_2(p\Delta f)/4.$$

Таким образом, в указанном частном случае частота $p\Delta f$, соответствующая максимуму амплитуды БПФ $|S_x(k\Delta f)|$ чисто синусоидального сигнала, совпадает с истинной частотой, соответствующей его спектральному пику.

В общем случае, когда для частоты сигнала f_c не выполняется условие (10), рассмотрим нахождение поправочного коэффициента δ для определения истинного положения спектрального пика внутри интервала разрешения БПФ. Введем следующие обозначения:

$$f_l = l\Delta f, \quad F(f_l) = |S_x(f_l)|, \quad l = \overline{0, N-1}. \quad (11)$$

Пусть Y_1, Y_2 — значения амплитуд в точках f_{k-1} и f_k спектра БПФ с окном Ханна указанного сигнала, $f_{k-1} < f_c < f_k$ (рис. 3). Тогда

$$Y_1 = F(f_{k-1}) = \frac{1}{2} \left| \left\{ S_2(f_{k-1}) - \frac{1}{2} [S_2(f_{k-2}) + S_2(f_k)] \right\} \right|; \quad (12)$$

$$Y_2 = F(f_k) = \frac{1}{2} \left| \left\{ S_2(f_k) - \frac{1}{2} [S_2(f_{k-1}) + S_2(f_{k+1})] \right\} \right|. \quad (13)$$

Заметим, что для больших значений $N \frac{N-1}{N} \approx 1$, и в окрестности спектрального пика

$$\sin [(f_k - f_c) \pi / N \Delta f] \approx (f_k - f_c) \pi / N \Delta f. \quad (14)$$

На основании (8) и (14) спектр БПФ чисто синусоидального сигнала с прямоугольным окном можно представить как

$$S_2(f_k) = \exp \{-j(f_k - f_c) \pi / \Delta f\} \frac{A \sin [(f_k - f_c) \pi / \Delta f]}{2(f_k - f_c) \pi / N \Delta f}, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (12) и (13) с использованием соотношений (16)

$$\begin{aligned} \cos [(f_{k-2} - f_c) \pi / \Delta f] &= \cos [(f_k - f_c) \pi / \Delta f]; \\ \sin [(f_{k-2} - f_c) \pi / \Delta f] &= \sin [(f_k - f_c) \pi / \Delta f]; \\ \cos [(f_{k-1} - f_c) \pi / \Delta f] &= -\cos [(f_k - f_c) \pi / \Delta f]; \\ \sin [(f_{k-1} - f_c) \pi / \Delta f] &= -\sin [(f_k - f_c) \pi / \Delta f]; \\ \cos [(f_{k+1} - f_c) \pi / \Delta f] &= -\cos [(f_k - f_c) \pi / \Delta f]; \\ \sin [(f_{k+1} - f_c) \pi / \Delta f] &= -\sin [(f_k - f_c) \pi / \Delta f], \end{aligned} \quad (16)$$

получаем

$$Y_1 = \frac{AN\Delta f}{4\pi} \sin [(f_k - f_c) \pi / \Delta f] \left| \frac{1}{(f_{k-1} - f_c)} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(f_{k-2} - f_c)} + \frac{1}{(f_k - f_c)} \right] \right|; \quad (17)$$

$$Y_2 = \frac{AN\Delta f}{4\pi} \sin [(f_k - f_c) \pi / \Delta f] \left| \frac{1}{(f_k - f_c)} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(f_{k-1} - f_c)} + \frac{1}{(f_{k+1} - f_c)} \right] \right|. \quad (18)$$

Пусть $f_c = f_{k-1} + \delta$, тогда согласно (11)

$$\begin{aligned} f_{k-2} - f_c &= -(\Delta f + \delta); \quad f_{k-1} - f_c = -\delta; \\ f_k - f_c &= \Delta f - \delta; \quad f_{k+1} - f_c = 2\Delta f - \delta. \end{aligned} \quad (19)$$

С учетом (19) уравнения (17), (18) принимают вид

$$Y_1 = \frac{AN\Delta f}{4\pi} \sin [(\Delta f - \delta) \pi / \Delta f] \frac{\Delta f^2}{\delta(\Delta f^2 - \delta^2)}; \quad (20)$$

$$Y_2 = \frac{AN\Delta f}{4\pi} \sin [(\Delta f - \delta) \pi / \Delta f] \frac{\Delta f^2}{\delta(\Delta f - \delta)(2\Delta f - \delta)}. \quad (21)$$

Производя деление уравнения (20) на уравнение (21), после упрощений имеем

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{2\Delta f - \delta}{\Delta f + \delta}, \quad (22)$$

откуда следует выражение для поправочного коэффициента δ в рассматриваемом случае

$$\delta = \frac{2Y_2 - Y_1}{Y_1 + Y_2} \Delta f. \quad (23)$$

Выполнено моделирование на ЭВМ определения истинной частоты f_c чисто синусоидального сигнала, соответствующей спектральному

пику, внутри содержащего ее интервала разрешения БПФ $[f_{k-1}, f_k]$. При применении прямоугольного окна оценка истинной частоты f_{c1} вычислялась как $f_{c1} = f_{k-1} + \delta$, где поправка δ находилась из (3). В случае окна Ханна оценка f_{c2} определялась аналогично с использованием поправки (23).

В качестве примера ниже приведены результаты моделирования для отдельных значений f_c при $N = 512$, $\Delta f = 1$ Гц. Частота f_{max} соответствует положению максимума спектра БПФ:

| f_c | f_{max} | $ f_c - f_{max} $ | f_{c1} | $ f_c - f_{c1} $ | f_{c2} | $ f_c - f_{c2} $ |
|-------|-----------|-------------------|----------|------------------|----------|------------------|
| 97,5 | 98,0 | 0,5 | 97,6922 | 0,1922 | 97,6908 | 0,1908 |
| 113,4 | 114,0 | 0,6 | 113,6231 | 0,2231 | 113,6219 | 0,2219. |

Предложенный метод повышает точность оценки истинной частоты сигнала, соответствующей спектральному пику, определяемой по положению максимума амплитуды спектра БПФ. Достаточность выполнения трех арифметических операций для вычисления поправочных коэффициентов (3), (23) позволяет реализовать метод в рамках дополнения функций процессора БПФ.

Список литературы: 1. Емельянов С. В., Денисов М. М. Методы разделения сигналов по спектру дискретного параметра//Итоги науки и техники. Сер. техн. кибернетика. М., 1986. Т. 19. С. 3—68. 2. Кей С. М., Марпл С. Л. Современные методы спектрального анализа//Тр. ин-та инж. по электротехнике. 1981. Т. 69, № 11. С. 5—51. 3. Ng S. S. A technique for spectral component location within a FFT resolution cell// Proc IEEE Int. Conf. Acoust., Speech and Signal Process. San Diego, California. 19—21 March. New York, 1984. Vol. 3. P. 38. 8/1 — 38. 8/3. 4. Хэррис Ф. Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье//Тр. ин-та инж. по электротехнике и электронике. 1978. Т. 66, № 1. С. 60—96.

Поступила в редколлегию 22.10.87