УДК 551.501:621.396

С. Ф. СИМОВСКАЯ, канд. техн. наук, *В. И. АЛЕХИН*, канд. техн. наук

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ЛОКАЦИОННОГО СИГНАЛА НА ФОНЕ ШУМА АКУСТИЧЕСКОЙ ДОПЛЕРОВСКОЙ СИСТЕМЫ

Акустические локационные системы относятся к эффективным техническим средствам для производства метеорологических наблюдений в приземном слое атмосферы. Информацию о скорости ветра при акустическом зондировании атмосферы получают измерением доплеровской частоты стохастического сигнала локатором непрерывного действия [1]. В измерительном канале локатора обработка сигнала с целью определения положения доплеровского спектра сигнала на оси частот осуществляется одним из известных методов: счетом числа пересечений нулевого уровня; с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье, при котором расчет средней частоты Доплера проводится по реализациям стационарного эхо-сигнала с применением больших высокопроизводительных ЭВМ; высокоточным способом с использованием следящих фильтров при последующем преобразовании напряжения, пропорционального средней доплеровской частоте, в цифровую форму; с применением автокорреляционного метода и др.

Оценка частоты сигнала при приеме на фоне флюктуационного шума производится известными методами на основе наблюдения и анализа некоторой реализации случайного процесса в течение фиксированного интервала времени ($0 \leqslant t \leqslant T$). Из-за наличия шума и конечного времени наблюдения сигнала любому алгоритму измерения частоты сигнала присущи ошибки, определяемые критерием качества оценки и условиями, при которых происходит процесс оценки. Известно, что при анализе непрерывной реализации на конечном интервале (0, T) используется функционал отношения правдоподобия, который при приеме узкополосного сигнала со случайной равномерно распределенной начальной фазой определяется выражением [2]

$$\hat{\lambda} = I_0 [G_0 (f)]\, e^{-q^2/2},$$

где $G_0(f)$ — выходной сигнал оптимального приемника с оцениваемым параметром f; q^2 — отношение средней мощности сигнала к мощности шума в эффективной полосе полезного сигнала; $I_0[A]$ — функция Бесселя мнимого аргумента нулевого порядка.

Оценка максимума правдоподобия доплеровской частоты узкополосного сигнала находится из решения уравнения $[\mathrm{d}G_0(f)/\mathrm{d}f]_{fm} = 0$, поскольку при обработке локационного сигнала решение уравнения находится в окрестности абсолютного максимума $G_0(f)$, который расположен внутри априорного частотного интервала. Оценка максимума правдоподобия (в первом приближении) для узкополосного сигнала является несмещенной. При определении дисперсии оценки центральной частоты спектра акустического узкополосного гауссового колебания воспользуемся формулой [2]

$$D(f_m/f_0) = 2\pi \left\{ T P_c^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\mathrm{d}\, G_0(\omega)/\mathrm{d}\,\omega}{P_c G_0(\omega) + N^0} \right]^2 \mathrm{d}\omega \right\}^{-1}. \qquad (1)$$

Здесь f_0 — центральная частота; f_m — значение частоты, соответствующее максимуму максиморуму логарифма функционала отношения правдоподобия; $G_0(\omega)$ — энергетический спектр огибающей сигнала; P_c — средняя мощность сигнала; N_0 — мощность шума; T — время наблюдения.

В связи со сложностью получения аналитического выражения для дисперсии оценки центральной частоты энергетического спектра произвольного вида ограничимся рассмотрением частного случая, когда гауссовый узкополосный сигнал имеет огибающую энергетического спектра вида

$$G_0(\omega) = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2}, \tag{2}$$

где $\alpha = 2\Delta f_c$; Δf_c — эффективная ширина энергетического спектра;

$$\Delta f_c = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega)\, d\,\omega / G_0(\omega)_{\text{макс}}.$$

На практике часто пользуются относительной ошибкой оценки центральной частоты спектра узкополосного сигнала, принимаемого совместно с флюктуационным шумом

$$\Delta_D = \sqrt{D(f_m/f_0)/(\Delta f_c^2 p)}.$$

Здесь $D(f_m/f_0)$ — дисперсия оценки центральной частоты; $p = 1/(\Delta f_c T)$.

При подстановке (2) в подынтегральное выражение формулы (1) и нахождении интеграла относительную дисперсию оценки центральной частоты представим как

$$\Delta_D = 2\sqrt{(1 + \sqrt{1 + q^2})^3 \sqrt{1 + q^2}\, q^{-4}}, \tag{3}$$

где $p = 1/(\Delta f_c T)$; q^2 — отношение средней мощности сигнала к мощности шума в эффективной полосе частот сигнала; $q^2 = \frac{P_c}{N_0 \Delta f_c}$.

Предполагая, что для всех значений q^2 выполняется неравенство $q^2/p \gg 1$, отмечаем, что для очень большого отношения сигнал-шум ($q^2 \gg 1$) дисперсия оценки центральной частоты энергетического спектра случайного сигнала пропорциональна отношению ширины энергетического спектра к времени наблюдения $D(f_m/f_0) = 4\Delta f_c/T$, а относительная дисперсия Δ_D стремится к постоянной величине, равной двум.

В случае, когда $q^2 \ll 1$ дисперсия оценки частоты $D(f_m/f_0) = 32\Delta f_c^2 p/q^4$, относительная дисперсия обратно пропорциональна q^2 ($\Delta_D = 4\sqrt{2}/q^2$). Приведем значения относительной ошибки Δ_D при различном отношении мощности сигнала и шума q^2, рассчитанные по формуле (3):

q^2	1	5	10	25	50	100
Δ_D	8,86	4,04	3,28	2,64	2,51	2,32

При измерении доплеровского сдвига частоты рассеянного акустического колебания, содержащего информацию о профиле и направлении ветра, возникает необходимость определения статистической точности спектрального анализа, в частности его систематической погрешности.

Считаем, что обрабатывается случайный процесс $\xi(t)$, представляющий собой сумму узкополосного гауссового сигнала $s(t)$ и гауссового белого шума $n(t)$ с известной спектральной плотностью N_0:

$$\xi(t) = s(t) + n(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Сигнал $s(t)$ и шум $n(t)$ — независимые стационарные эргодические процессы с нулевым средним значением.

Известно, что систематическая погрешность спектрального анализа (смещение оценки спектральной плотности) определяется выражением [3]

$$b[\hat{G}_\xi(f)] = M[G_\xi(f)] - G_\xi(f),$$

в котором $G_\xi(f)$, $\hat{G}_\xi(f)$ — спектральная плотность мощности процесса $\xi(t)$ и ее оценка соответственно.

Оценка спектральной плотности

$$\hat{G}_\xi(f) = \frac{1}{T}\left|\int_0^T \xi(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt\right|^2.$$

Так как сигнал $s(t)$ и шум $n(t)$, составляющие случайный процесс $\xi(t)$, независимые процессы, то

$$\hat{G}_\xi(f) = \hat{G}_c(f) + \hat{G}_n(f),$$

где

$$\hat{G}_c(f) = \frac{1}{T}\left|\int_0^T s(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt\right|^2;$$

$$\hat{G}_n(f) = \frac{1}{T}\left|\int_0^T n(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt\right|^2.$$

Для вычисления смещения оценки спектральной плотности мощности процесса $\xi(t)$ найдем математическое ожидание оценки $\hat{G}_\xi(f)$:

$$M[\hat{G}_\xi(f)] = \frac{1}{\Delta f_\phi}\int_{f-\frac{\Delta f_\phi}{2}}^{f+\frac{\Delta f_\phi}{2}} G_\xi(f')\, df' =$$

$$= \frac{1}{\Delta f_c}\int_{f-\frac{\Delta f_c}{2}}^{f+\frac{\Delta f_c}{2}} G_c(f')\, df' + \frac{1}{\Delta f_n}\int_{f-\frac{\Delta f_n}{2}}^{f+\frac{\Delta f_n}{2}} G_n(f')\, df'.$$

Представляя функции $G_c(f')$ и $G_n(f')$ рядом Тейлора в окрестности точки $f'=f$ по степеням $(f'-f)$ и ограничиваясь первыми тремя членами разложения (предварительно оценив остаток ряда Тейлора) при постоянных пределах интегрирования в течение времени T, имеем

$$M[\hat{G}_\xi(f)] \approx G_c(f) + G_n(f) + \frac{1}{24}[\Delta f_c^2 G_c''(f) + \Delta f_n^2 G_n''(f)].$$

Запишем систематическую погрешность спектрального анализа (смещение оценки спектральной плотности)

$$b[\hat{G}_\xi(f)] \approx \frac{1}{24}[\Delta f_c^2 G_c''(f) + \Delta f_n^2 G_n''(f)]. \tag{4}$$

Выражение (4) определяет систематическую погрешность спектрального анализа, когда фильтрующая система анализатора имеет постоянную частоту настройки и постоянную полосу пропускания, что имеет место при параллельном спектральном анализе и дискретном изменении частоты настройки.

Практический интерес представляет случай, когда принимаемый доплеровским акустическим локатором сигнал $s(t)$ — гауссовский эргодический процесс со спектральной плотностью колокольной формы

$$G_c(f) = \frac{P_c}{\Delta f_c} \exp\left\{-\frac{\pi (f-f_c)^2}{\Delta f_c^2}\right\}, \tag{5}$$

аддитивный гауссовский шум имеет спектральную плотность

$$G_n(f) = N_0 \exp\left\{-\frac{\pi (f-f_\text{ф})^2}{\Delta f_\text{ф}^2}\right\}, \tag{6}$$

где f_c, Δf_n — центральная частота и ширина энергетического спектра сигнала; $f_\text{ф}$, $\Delta f_\text{ф}$ — частота настройки фильтра, с которой совпадает частота энергетического спектра шума, и полоса пропускания фильтра.

Согласно (4) и с учетом (5), (6) смещение оценки энергетического спектра аддитивной смеси сигнала и шума $\xi(t)$ равно

$$b[\hat{G}_\xi(t)] \approx -\frac{\pi}{12}\frac{P_c}{\Delta f_c}\left\{\exp\left[-\frac{\pi(f-f_c)^2}{\Delta f_c^2}\right]\left[1-2\pi\frac{(f-f_c)^2}{\Delta f_c^2}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\Delta f_c}{q^2 \Delta f_\text{ф}} \exp\left[-\frac{\pi(f-f_\text{ф})^2}{\Delta f_\text{ф}^2}\right]\left[1-2\pi\frac{(f-f_\text{ф})^2}{\Delta f_\text{ф}^2}\right]\right\}. \tag{7}$$

Здесь q^2 — отношение мощностей сигнала и шума.

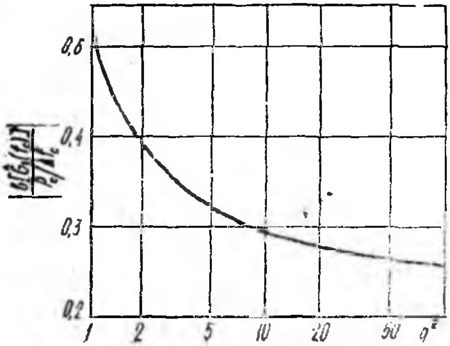
В случае, когда частота сигнала совпадает с частотой настройки фильтра ($f_c = f_\text{ф}$) и ширина спектра сигнала равна полосе пропускания фильтра ($\Delta f_c = \Delta f_ф$), смещение оценки выразится так:

$$b[\hat{G}_\xi(f)] \approx -\frac{\pi}{12}\frac{P_c}{\Delta f_ф}\left\{\left(1+\frac{1}{q^2}\right)\exp\times\right.$$
$$\left.\times\left[-\frac{\pi(f-f_ф)^2}{\Delta f_ф^2}\right]\left[1-2\pi\frac{(f-f_ф)^2}{\Delta f_ф^2}\right]\right\}. \quad (8)$$

Значение относительной систематической погрешности спектрального анализа при $f = f_c$ представим в виде

$$\frac{b[\hat{G}_\xi(f_c)]}{P_c/\Delta f_c} \approx -\frac{\pi}{12}\left(1+\frac{1}{q^2}\right). \quad (9)$$

На рисунке показана зависимость относительной погрешности спектрального анализа от отношения мощности сигнала и шума в эффективной полосе частот сигнала q^2 при нулевой расстройке энергетического спектра сигнала и помехи относительно частоты настройки фильтра.



Список литературы: 1. *Измерение скорости ветра непрерывным доплеровским акустическим локатором в условиях аэропорта* / В. И. Алехин, А. И. Рыженко, В. И. Сидько, Г. И. Сидоров // VI Всесоюз. совещ. по радиометеорологии: Тез. докл. Таллин. 1982. С. 156—157. 2. *Куликов Е. И., Трифонов А. П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. М., 1978. 296 с. 3. *Линников И. Н. Систематическая* погрешность спектрального анализа стационарных случайных процессов // Радиотехника. 1985. № 9. С. 52—53.

Поступила в редколлегию 13.07.87