КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ

УДК 517.9

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТЕЙ КОНКУРИРУЮЩИХ ВИДОВ С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПРОЦЕССОВ

ДИКАРЕВ В. А., ЯЛОВЕГА И. Г.

Проводится численный анализ и моделирование динамики численностей двух конкурирующих популяций при периодически изменяющихся характеристиках процесса. Произведенный численный анализ дает представление о том, как изменяются численности конкурирующих популяций при периодическом изменении факторов, влияющих на характеристики процессов рождения и гибели каждой из них.

1. Введение

Биологические сообщества состоят из нескольких популяций биологических видов, живущих в общей среде. Изучение взаимодействия конкурирующих видов, сосуществующих в общей среде, является одной из основных задач биологии. Обычно индивидуумы этих сообществ оспаривают одну и ту же пищу или же одни виды живут за счет других, которыми они питаются. Они могут также взаимно оказывать друг другу помощь. Классический детерминистский анализ многих проблем между видами провели в начале XX века Лотка и Вольтерра. Математический подход опирается на изучение решений некоторых дифференциальных или интегродифференциальных уравнений, поведение которых нужно детально исследовать либо количественно, либо, чаще, только качественно.

На биологическую систему, состоящую из нескольких различных популяций, влияют различные факторы. Так, в каждой отдельной популяции изменение ее внутренних свойств влечет колебание ее численности. При этом большое влияние оказывает среда обитания, свойства которой могут изменяться детерминировано или случайно. Существуют также периодически меняющиеся условия среды, зависящие от времени и причины внутреннего характера со своими периодами, не зависящими от внешних причин или дополняющими их [1-3]. Такими причинами могут быть, например, инфекционные болезни, которые часто имеют периодический характер, не зависящий от изменений условий среды. Внешние причины возникают вследствие физических явлений, изменяющих свойства среды, внутренние — зависят от питания и изменчивости сосуществующих особей.

Целью данной работы является рассмотрение процессов размножения и гибели двух конкурирующих популяций с различными периодически изменяющимися характеристиками для выявления закономерности поведения процессов.

В работе приводятся результаты численного моделирования процессов роста и гибели двух конкурирующих популяций, сосуществующих в общей среде. Проведенный анализ дает представление о том, как изменяются численности конкурирующих популяций при периодическом изменении факторов, влияющих на характеристики процессов рождения и гибели каждой из них. Получены данные о промежутке времени, начиная с которого соотношения численностей видов на последующих периодах сохраняются.

2. Постановка задачи

Рассмотрим модели роста двух видов, борющихся за одну и ту же пищу. Для того чтобы охарактеризовать единственным числом некоторую популяцию, обитающую в ограниченной области, сделаем допущение, что индивидуумы каждого вида однородны (пренебрегая возрастом и размерами). Будем также считать, что тип индивидуума не меняется со временем. Вместо разрывных целочисленных функций, представляющих численность индивидуумов, рассматриваем дифференцируемые функции, имеющие в каждый момент времени ту же целую часть, что и разрывные.

Рассмотрим рост двух конкурирующих видов N_1 и N_2, потребляющих одну и ту же пищу. Пусть $n_1(t)$ и $n_2(t)$ — численности индивидуумов в популяциях видов N_1 и N_2 соответственно в момент t. Система дифференциальных уравнений, описывающая данный процесс, имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{dn_1(t)}{dt} &= (\beta_1 - f_1(n_1, n_2))\, n_1(t); \\ \frac{dn_2(t)}{dt} &= (\beta_2 - f_2(n_1, n_2))\, n_2(t). \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь положительные постоянные β_1 и β_2 являются интенсивностями рождения, функции f_1 и f_2 — скоростями гибели видов N_1 и N_2 соответственно; f_1 и f_2 являются строго возрастающими функциями аргументов n_1, n_2, равными нулю при $n_1 = n_2 = 0$. Эти функции учитывают влияние окружающей среды, и их значения фиксируют количество потребленной пищи или занятого пространства существующими индивидуумами в момент t. Будем рассматривать величины f_1 и f_2 как линейные функции размеров обеих популяций [1,2]:

$$f_i = \mu_{i1} n_1 + \mu_{i2} n_2, \quad i = 1,2. \qquad (2)$$

Известно [1], что уравнения (1) имеют стационарные решения при $\frac{dn_1(t)}{dt} = 0$ и $\frac{dn_2(t)}{dt} = 0$. Точка равновесия [1] имеет координаты

$$(A, B) \equiv \left(\frac{\beta_1\mu_{22} - \beta_2\mu_{12}}{\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21}}, \frac{\beta_2\mu_{11} - \beta_1\mu_{21}}{\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21}} \right) \qquad (3)$$

при условии, что $\mu_{11}\mu_{22} \neq \mu_{12}\mu_{21}$. Здесь точка равновесия означает, что кривые роста популяций с течением времени попадают в эту точку и по достижении становятся постоянными, т. е. численности в дальнейшем не изменяются. Равновесие является устойчивым при $\mu_{11}\mu_{22} > \mu_{12}\mu_{21}$. Если же $\mu_{11}\mu_{22} < \mu_{12}\mu_{21}$, то равновесие будет неустойчивым и точка (n_1, n_2) в конце концов переместится в зависимости от начальных условий на одну из осей n_1 или n_2.

С течением времени возможно изменение значений β_1, β_2, $\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{12}, \mu_{21}$. Изменение этих характеристик может иметь периодический характер и значительно влиять на поведение процесса в целом.

3. Численный анализ процесса рождения и гибели двух конкурирующих популяций при различных периодически меняющихся характеристиках

Изучим поведение процесса рождения и гибели двух конкурирующих популяций при воздействии факторов периодического характера. Рассмотрим период T=20, состоящий из 4 промежутков П=5. Величины П являются промежутками постоянства характеристик процесса β_1, β_2, $\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{12}, \mu_{21}$. Заметим, что значения характеристик выбраны так, чтобы во время первого периода, т. е. за временной промежуток 20, ни один из видов не погиб. Запишем систему уравнений (1) в виде:

$$\frac{dn_1(t)}{dt} = \beta_1 n_1(t) - \mu_{11} n_1^2(t) - \mu_{12} n_1(t) n_2(t);$$

$$\frac{dn_2(t)}{dt} = \beta_2 n_2(t) - \mu_{22} n_2^2(t) - \mu_{21} n_1(t) n_2(t). \quad (4)$$

Зададим численно значения $\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{12}, \mu_{21}$, такие, чтобы выполнялось условие $\mu_{11}\mu_{22} > \mu_{12}\mu_{21}$. Предполагается, что численности популяций в начальный момент времени равны и достаточно велики, и с помощью соответствующей нормировки их можно считать равными единице.

Рассмотрим процессы рождения и гибели двух конкурирующих популяций при условии периодически изменяющихся характеристик. Приведем численный пример такого процесса. Начальные условия $n_1(0) = 1$, $n_2(0) = 1$. Период T=20 состоит из следующих промежутков постоянства: на промежутке $П_1$ значения $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\mu_{11} = 0{,}025, \mu_{22} = 0{,}02, \mu_{12} = 0{,}001, \mu_{21} = 0{,}02$, на промежутке $П_2$ значения $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\mu_{11} = 0{,}04, \mu_{22} = 0{,}015, \mu_{12} = 0{,}001, \mu_{21} = 0{,}02$, на промежутке $П_3$ значения $\beta_1 = 1{,}2$, $\beta_2 = 1$, $\mu_{11} = 0{,}04, \mu_{22} = 0{,}015, \mu_{12} = 0{,}001, \mu_{21} = 0{,}03$, на промежутке $П_4$ значения $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1{,}45$, $\mu_{11} = 0{,}03, \mu_{22} = 0{,}015, \mu_{12} = 0{,}002, \mu_{21} = 0{,}03$.

Воспользуемся пакетом «MATHEMATICA» для решения задачи численными методами и построения графиков зависимости. Покажем на графиках изменение численностей популяций от времени. Графики зависимости численности популяций от времени на каждом промежутке постоянства $П_i$ (i=1,2,3,4) за время первого периода T представлены на рис.1-4 (жирная кривая на графиках – вид N_1, тонкая – вид N_2).

На рис. 1-4 представлены графики роста популяций N_1 и N_2 за время первого периода T.

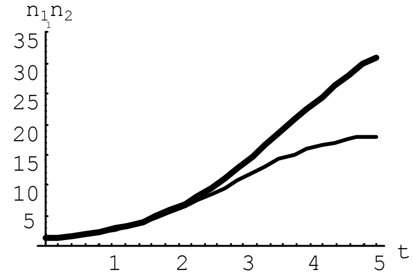

Рис. 1. График роста популяций N_1 и N_2 на промежутке $П_1$

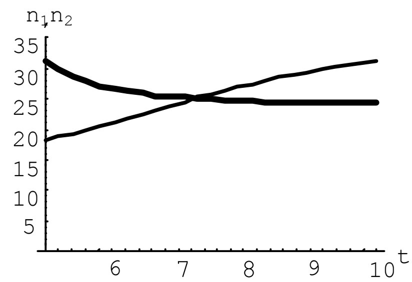

Рис. 2. График роста популяций N_1 и N_2 на промежутке $П_2$

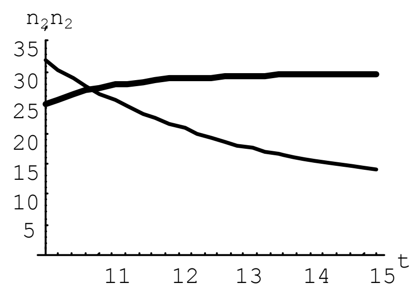

Рис. 3. График роста популяций N_1 и N_2 на промежутке $П_3$

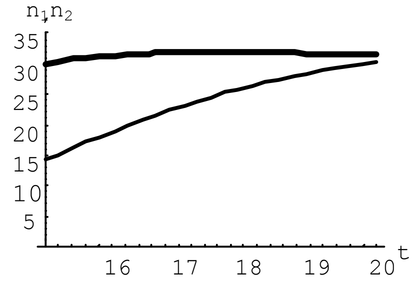

Рис. 4. График роста популяций N_1 и N_2 на промежутке $П_4$

Численными методами были получены и зафиксированы следующие значения численностей популяций на концах промежутков постоянства: $n_1(5)$=31,3,

$n_2(5)=18,2$, $n_1(10)=24,6$, $n_2(10)=31,6$, $n_1(15)=29,9$, $n_2(15)=14,2$, $n_1(20)=31,8$, $n_2(20)=30,6$. Проследим за поведением процесса во время второго периода, т. е. за промежуток времени 20-40. Сравним значения численностей популяций на концах промежутков постоянства первого и второго периода. Графики зависимости численностей популяций от времени на промежутках постоянства Π_i (i=1,2,3,4) второго периода T представлены на рис. 5-7 (жирная кривая на графиках − вид N_1, тонкая − вид N_2).

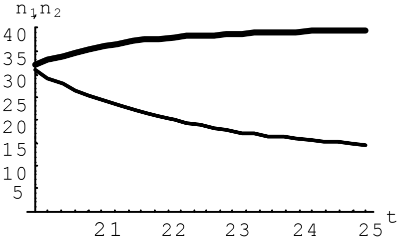

Рис. 5. График роста популяций N_1 и N_2 на промежутке Π_1

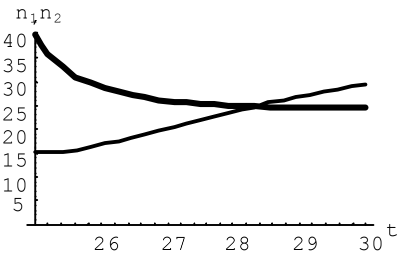

Рис. 6. График роста популяций N_1 и N_2 на промежутке Π_2

Из рис. 6 видно, что уже на втором промежутке второго периода характер поведения процесса с незначительными изменениями повторяет характер поведения на втором промежутке первого периода, но значения на концах еще не совпадают.

Рис. 7. График роста популяций N_1 и N_2 на промежутке Π_3

На рис. 5−7 представлены графики поведения процесса рождения и гибели двух конкурирующих популяций на первых трех промежутках постоянства второго периода T. Графики поведения процесса на данных промежутках второго периода отличаются от соответствующих графиков первого периода. Заметим, что на конце третьего промежутка второго периода значения численностей популяций совпадают со значениями на конце третьего промежутка первого периода. График поведения процесса на четвертом промежутке второго периода полностью совпадает с графиком на четвертом промежутке первого периода. Из проведенных расчетов видно, что, начиная со второго периода, соотношения численностей видов на концах промежутков постоянства последующих периодов сохраняются.

Аналогичные расчеты были проведены для ряда других примеров процессов рождения и гибели двух конкурирующих популяций при условиях периода T=20 и четырех промежутков постоянства с различными численными значениями характеристик на них. Анализ произведенных расчетов приводит к тому же выводу: начиная со второго периода, соотношения численностей видов на концах промежутков постоянства последующих периодов сохраняются.

4. Выводы

Проведенный в работе численный анализ предполагал наличие в общей среде двух конкурирующих популяций и определенным образом выбранного периода изменения характеристик. Аналогично может быть проведен численный анализ для трех конкурирующих популяций и измененного периода.

Научная новизна: в работе впервые проведен численный анализ соотношений численностей двух конкурирующих популяций, претендующих на одни и те же источники питания. Найдена динамика изменения численности видов в зависимости от изменения определяющих процесс характеристик. В частности, решена задача о соотношении численностей популяций при периодически изменяющихся характеристиках процесса.

Практическая значимость: на практике часто приходится сталкиваться с ситуациями, подобными той, что рассмотрена в данной работе, поскольку изменения, происходящие в окружающей среде, часто носят периодический характер. Таким образом, результаты, полученные в работе, носят прикладной характер и могут быть использованы при оценке возможных версий роста численностей конкурирующих популяций.

Сравнение с аналогами: исследования в данной области в основном сводились к рассмотрению конкретных моделей и исследованию процесса во времени. В представленной же работе показано, как влияют на процессы рождения и гибели двух конкурирующих популяций периодические изменения характеристик, определяющих процесс, какие при этом наблюдаются закономерности в эволюции численности популяций.

Представляет интерес изучить проблему размножения и гибели конкурирующих популяций с периодическими изменениями характеристик вероятностными методами.

Литература: **1.** *Бейли Н.* Математика в биологии и медицине. М.: Мир, 1970. 326 с. **2.** *Баруча-Рид А. Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, 1969. 512 с. **3.** *Карлин С.* Основы теории случайных процессов. М.: Мир, 1971. 536 с.

Поступила в редколлегию 14.06.2004

Рецензент: д-р тех. наук, проф. Руденко О.Г.

Дикарев Вадим Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры ПМ ХНУРЭ. Адрес: Украина, 61000, Харьков, пр. Ленина, 66, кв. 21, тел. 33-57-03 (дом.), 702-14-36 (раб.).

Яловега Ирина Георгиевна, аспирантка кафедры ПМ ХНУРЭ. Адрес: Украина, 61000, Харьков, ул. Новгородская, 20, кв. 14, тел. 30-44-41.