7. Н. И. Меркулов, А. А. Павликов, А. С. Федоров. Запоминающие устройства ВЭСМ-2. Физматгиз, 1963.

8. В. И. Рыбак. Аппаратура для обработки оптической информации с помощью универсальных вычислительных машин. Сб. «Кибернетика и вычислительная техника». Изд-во «Наукова думка», Киев, 1964.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ВКУСОВОГО АНАЛИЗАТОРА ЧЕЛОВЕКА

Ю. П. Шабанов-Кушнаренко, Ю. С. Марченко, М. Ф. Бондаренко

Цель работы — математическое описание преобразования органом вкуса человека вкусового стимула во вкусовое ощущение.

Приведем некоторые математические сведения. Пусть R^n — n-мерное евклидово пространство; M — некоторое множество; F — однозначное отображение R^n на M, удовлетворяющее следующим условиям:

а) если $Fx_1 = Fy_1$ и $Fx_2 = Fy_2$, то $F(x_1 + x_2) = F(y_1 + y_2)$ $(x_1, y_1, x_2, y_2 \in R^n)$;

b) существуют векторы $a_i \in R^n$ $(1 \leqslant i \leqslant m \leqslant n)$ такие, что для любого $x \in R^n$ найдется единственный набор вещественных чисел $\alpha_i \equiv \alpha_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ такой, что $Fx = F\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i\right)$;

c) функционалы $\alpha_i(x)$ непрерывны.

Рассмотрим отображения $L: R^n \to R^m$ и $f: R^m \to M$, причем f — биективно, а L — эпиморфизм линейных пространств.

Теорема. *Условиям a) — c) удовлетворяют отображения вида*

$$F = f^\circ L \tag{1}$$

и только они.

Доказательство. Пусть выполняются условия а) — с). Поставим в соответствие каждому $x \in R^n$ вектор $Lx \in R^m$, положив $Lx = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_m(x))$. Условие в) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между Lx и Fx. Обозначим его через f.

Осталось показать, что L — эпиморфизм. Из условия b) для любых $x, y \in R^n$ имеем

$$Fx = F\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) a_i\right), \quad Fy = F\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(y) a_i\right), \tag{2}$$

$$F(x+y) = F\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x+y) a_i\right). \tag{3}$$

Из условия а) и равенств (2) следует, что

$$F(x+y) = F\left(\sum_{i=1}^{m} (\alpha_i(x) + \alpha_i(y)) a_i\right). \tag{4}$$

Сравнивая (3) и (4), в силу условия b) имеем

$$\alpha_i(x+y) = \alpha_i(x) + \alpha_i(y) \qquad (1 \leqslant i \leqslant m).$$

Отсюда и из условия с) вытекает линейность оператора L.

Предположим, что вопреки доказываемому $ImL \neq R^m$. Тогда найдется отличный от нуля вектор $\overline{z} \in R^m$ такой, что $(Lx, \overline{z}) = 0$ тождественно по x, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x)\overline{z_i} \equiv 0 \qquad (\overline{z} = (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \ldots, \overline{z_n}))$$

и система функционалов $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^m$ линейно зависима. Но из условия b) вытекает биортогональность систем $\{a_i\}_{i=1}^m$ и $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$, а следовательно, и линейная независимость каждой из них. Полученное противоречие доказывает, что $ImL = R^m$. Следовательно, L — эпиморфизм линейных пространств $R^n \to R^m$.

Пусть теперь $F = f^\circ L$. Выполнение условия a) очевидно. Для доказательства условий b) и c) выберем линейно независимую систему векторов $\{a_i\}_{i=1}^m$ в ортогональном дополнении к ядру оператора L. Величины $\alpha_i(x)$ однозначно определяются равенством (тождественным относительно x)

$$Lx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) La_i, \tag{5}$$

причем функционалы $\alpha_i(x)$ непрерывны. Но в силу (1) равенство (5) эквивалентно равенству

$$Fx = F\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) a_i\right).$$

Теорема доказана.

Опираясь на приведенную теорему, покажем, что функционирование вкусового анализатора человека может быть описано отображением вида (1).

Точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ пространства R^n будем интерпретировать как вкусовые стимулы в виде водных растворов порознь взятых различных веществ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с весовыми концентрациями соответственно p_1, $p_2, \ldots, p_n$. Линейную комбинацию $A \in R^n$ вкусовых стимулов $A_1, A_2, \ldots$, $\ldots, A_n$, $A = \sum_{i=i}^{n} \lambda_i A_i$ будем интерпретировать как вкусовой стимул в виде совместного водного раствора веществ $a_1, a_2, \ldots, a_n$, взятых с весовыми концентрациями $\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \ldots, \lambda_n p_n$. Всевозможные вкусовые стимулы представлены множеством точек, образующим ограниченную часть положительного конуса в пространстве R^n. Символ n означает общее число различных веществ, водные растворы которых могут быть использованы в качестве вкусовых стимулов.

Элементы множества M интерпретируем как различные вкусовые ощущения, возникающие у испытуемого в ответ на действие того или иного вкусового стимула. При этом имеется в виду собственно вкусовое ощущение, в состав которого не включаются температурные и тактильные ощущения, возникающие у испытуемого одновременно со вкусовыми ощущениями в ответ на действие вкусового стимула.

Под отображением F будем понимать математическое описание преобразования вкусового стимула во вкусовое ощущение, которое осуществляется вкусовым анализатором человека.

Требование однозначности отображения F означает, что вкусовой анализатор должен реагировать всегда одним и тем же ощущением на одинаковые вкусовые стимулы, т. е. если $A' = A''$, то $FA' = FA''$.

Условие а) применительно к органу вкуса означает следующее. Пусть подобраны две пары вкусовых стимулов A_1', A_2' и A_1'', A_2'' таким образом, что стимулы каждой пары имеют одинаковый вкус, т. е. $FA_1' = FA_2'$ и $FA_1'' = FA_2''$. В этом случае суммарные стимулы $A_1' + A_1''$ и $A_2' + A_2''$ также должны иметь одинаковый вкус, т. е. $F(A_1' + A_1'') = F(A_2' + A_2'')$. Принимаем $m = 4$. В этом случае условие b) означает: должны существовать такие четыре вкусовых стимула A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0, что для произвольного стимула A найдется единственная их линейная комбинация $\alpha_1 A_1^0 + \alpha_2 A_2^0 + \alpha_3 A_3^0 + \alpha_4 A_4^0$, имеющая тот же вкус, что и стимул A, т. е.

$$FA = F(\alpha_1 A_1^0 + \alpha_2 A_2^0 + \alpha_3 A_3^0 + \alpha_4 A_4^0).$$

Условие с) означает, что при малых изменениях стимула A должны наблюдаться малые изменения коэффициентов α_1, α_2, α_3, α_4, фигурирующих в условии b).

Смысл теоремы применительно к проблеме вкуса состоит в том, что в случае выполнения трех вышеприведенных условий есть основание изображать вкусовые ощущения в виде точек четырехмерного пространства $R^m = R^4$, причем одинаковым ощущениям будут соответствовать одинаковые точки пространства, а различным — различные. Совокупность точек, изображающих всевозможные вкусовые ощущения, образует ограниченную часть пространства R^4, которую будем называть вкусовым телом. Согласно теореме, должно существовать линейное отображение $L: R^n \to R_4$, которое позволительно рассматривать в качестве математического описания функционирования вкусового анализатора человека.

Ниже на экспериментальном материале демонстрируется справедливость условий а) —с), обосновывающих использование формулы (1) для целей математического описания работы органа вкуса человека.

Опыт показывает, что для обеспечения однозначности отображения F достаточно выполнения следующих условий.

1. Перед началом эксперимента проверить сенсорную восприимчивость вкусового анализатора испытуемого (по одному дифференциальному порогу для A_1^0, A_2^0, A_3^0 и A_4^0) и сравнить со средними значениями дифференциальных порогов практически здоровых испытуемых.

2. Методику проведения опытов строить таким образом, чтобы исключить или значительно понизить обонятельные, тактильные, болевые и температурные ощущения, тесно связанные с вкусовыми.

3. Эксперимент начинать по парному методу, а затем перейти к треугольному методу сравнения, дающему более высокую точность.

4. В эксперименте предъявлять испытуемым пробы в объеме $V = 10 \div 15$ *мл*, всегда одинаковые для данного испытуемого, и рекомендовать выдерживать пробу во рту $\Theta = 5 \div 10$ *сек*; после каждой пробы прополаскивать рот водой.

5. Промежуток времени между сравниваемыми стимулами выдерживать $t = 20 \div 30$ *сек*, между соседними предъявлениями $\tau = 2 \div 3$ *мин*.

6. В экспериментах уделять большое внимание явлению адаптации, строго соблюдать интервалы времени между пробами, представлять пробы для оценки по мере возрастания интенсивности.

7. Число проб при проведении эксперимента ограничить до $k = 40 \div 50$, чтобы предупредить физиологическую утомляемость.

8. При проведении экспериментов исключить неадекватные раздражители (шум, запахи, мигание света, вибрации и пр.), оказывающие весьма отрицательное влияние.

Вопрос о необходимых условиях, обеспечивающих однозначность отображения F, в работе не рассматривается.

Эксперименты для демонстрации однозначности отображения проводились с вкусовыми стимулами (табл. 1) и их различными линейными комбинациями. Все растворы химических веществ — водные, указанные в таблице концентрации — весовые (число граммов растворенного вещества в 1000 *г* раствора).

Таблица 1

Наименование вкусового стимула		Обозначение стимула
1%-ный раствор сахарозы		A_1^0
0,1%-ный раствор винной кислоты		A_2^0
0,1%-ный раствор хлористого натрия		A_3^0
10^{-4}%-ный раствор солянокислого хинина		A_4^0
1%-ный раствор сорбита		A_5
1%-ный раствор маннита		A_6
1%-ный раствор дульцита		A_7
0,1%-ный раствор лимонной кислоты		A_8
0,1%-ный раствор яблочной кислоты		A_9
0,1%-ный раствор щавелевой кислоты		A_{10}
10^{-4}%-ный раствор сернокислого хинина		A_{11}
10^{-4}%-ный раствор пикриновой кислоты		A_{12}
10^{-2}%-ный раствор кофеина		A_{13}
Вино	Портвейн белый южнобережный марочный, выдержанный 3 года, винкомбинат «Золотая балка»	A_1'
Пиво	«Рижское», Харьковский пивзавод № 2, РТУ УССР 979—65	A_2'
Квас	«Московский», Харьковский облпищепром, РТУ УССР 82—66	A_3'
Виноградный сок	Сорт марочный Ркацители, консервный завод имени В. И. Ленина, Одесса, МРТУ 18/79—65	A_4'
Яблочный сок	Виноградовский консервный завод, МРТУ 18/34—65	A_5'
Томатный сок	Херсонский консервный комбинат, МРТУ 18/20—65	A_6'
Морковный сок	Консервный завод имени 1 Мая, Симферополь, МРТУ 18/23—65	A_7'
Вишневый сок	Консервный завод имени В. И. Ленина, Одесса, МРТУ 18/13—65	A_8'
Сок манго	Изготовлен в Индии	A_9'
Абрикосовый сок	Октемберянский консервный завод, АрмССР, МРТУ 18/13—65	A_{10}'

Во время проведения опытов было принято $V = 10$ *мл*, $\theta = 6$ *сек*, $\tau = 2$ *мин*, $t_{раст} = 30°C$, $\Delta t = 30$ *сек*. Эти опыты, как и все последующие, выполнялись с десятью испытуемыми. Каждый опыт состоял в предъявлении в случайном порядке пары вкусовых стимулов с одинаковыми или различными стимулами в паре. Испытуемый должен был установить, одинаков вкус стимулов или нет. Во всех случаях испытуемые указывали, что вкус одного и того же стимула одинаков. Предъявлялись следующие одинаковые в паре стимулы: 1,2 A_1^0; 2,3 A_5; 2,7 A_6; 2,8 A_7; 0,64 A_2^0; 0,7 A_8; 0,7 A_9; 0,5 A_{10}; 4,2 A_4^0; 4 A_{11}; 3,8 A_{12}; A_2'; A_3'; A_4'; A_5'; A_6'; A_7'; A_{10}'. Предъявление каждой пары перечисленных стимулов повторялось пять раз. Подобные опыты выполнялись и при других значениях параметров V, θ, τ, t, Δt, назначаемых в пределах, указанных в условиях 1)—8). Во всех без исключения случаях одинаковые стимулы имели одинаковый вкус.

Таблица 2

A	α_1	α_2	α_3	α_4
A_5	0,5 (0,45 ÷ 0,54)	0	0	0
A_6	0,445 (0,41 ÷ 0,48)	0	0	0
A_7	0,42 (0,39 ÷ 0,46)	0	0	0
A_8	0	0,92 (0,87 ÷ 0,95)	0	0
A_9	0	1,033 (0,94 ÷ 1,09)	0	0
A_{10}	0	1,276 (1,2 ÷ 1,32)	0	0
A_{11}	0	0	0	1 (0,92 ÷ 1,11)
A_{12}	0	0	0	1,143 (1,03 ÷ 1,2)
A_{13}	0	0	0	0,0025 (0,0021 ÷ 0,0028)
A_1'	3,0 (2,6 ÷ 3,38)	0,5 (0,46 ÷ 0,53)	0,6 (0,53 ÷ 0,66)	10,0 (9,1 ÷ 11,3)
A_2'	1,33 (1,17 ÷ 1,41)	0,667 (0,59 ÷ 0,73)	1,33 (1,25 ÷ 1,44)	28,7 (25 ÷ 31)
A_3'	3,0 (2,57 ÷ 3,42)	1,34 (1,2 ÷ 1,47)	1,0 (0,93 ÷ 1,11)	0
A_4'	8,34 (7,15 ÷ 9,2)	2,27 (1,86 ÷ 2,59)	1,67 (1,4 ÷ 1,94)	0
A_5'	5,67 (4,79 ÷ 6,38)	2,33 (1,94 ÷ 2,6)	1,3 (1,18 ÷ 1,43)	2,16 (1,8 ÷ 2,41)
A_6'	0,4 (0,35 ÷ 0,44)	1,0 (0,93 ÷ 1,09)	1,66 (1,43 ÷ 1,82)	0
A_7'	5,0 (4,31 ÷ 5,87)	0	1,0 (0,96 ÷ 1,09)	1,33 (1,15 ÷ 1,47)
A_8'	4,67 (4,08 ÷ 5,2)	2,1 (1,83 ÷ 2,39)	0	1,67 (1,4 ÷ 1,88)
A_9'	15,33 (12,87 ÷ 18,44)	1,43 (1,2 ÷ 1,58)	0	0
A_{10}'	18,0 (15,3 ÷ 21,1)	1,67 (1,43 ÷ 1,91)	0	1,68 (1,4 ÷ 1,95)

Опыт также показывает, что при соблюдении условий 1)—8) имеет место выполнение условия а), которое будем именовать законом аддитивности. Для демонстрации справедливости этого закона выбирались следующие пары стимулов, имеющие для всех испытуемых одинаковый вкус в каждой паре: 2,88 A_4^0 и 2,76 A_{12}, 1,06 A_1^0 и 2,14 A_5; 0,366 A_8 и 0,274 A_{10}; 0,884 A_1^0 и 1,87 A_5; 0,411 A_8 и 0,308 A_{10}; 1,24 A_4^0 и 1,18 A_{12}. Попарные суммы этих стимулов 2,88 $A_4^0 + 1{,}06\ A_1^0$ и 2,76 $A_{12} + 2{,}14\ A_5$; 0,366 $A_8 + 0{,}884\ A_1^0$ и 0,274 $A_{10} + 1{,}87\ A_5$; 0,411 $A_8 + 1{,}24\ A_4^0$ и

$0{,}308\ A_{10} + 1{,}18\ A_{12}$ также не различаются всеми испытуемыми по вкусу.

Если соблюдаются условия 1—8, при $m = 4$ выполняется условие b), которое назовем законом четырехмерности. В качестве базисных вкусовых стимулов будем использовать растворы A_1^0, A_2^0, A_3^0, A_4^0. Опыт показывает, что для произвольно взятого вкусового стимула A всегда можно так подобрать числа α_1, α_2, α_3, α_4, что стимул $\alpha_1 A_1^0 + \alpha_2 A_2^0 + \alpha_3 A_3^0 + \alpha_4 A_4^0$ будет иметь вкус стимула A. В табл. 2 для различных вкусовых стимулов указаны численные значения α_1, α_2, α_3, α_4, обеспечивающие вкусовые равенства для всех десяти испытуемых.

Опытная проверка требования единственности выбора чисел α_1, α_2, α_3, α_4 показала, что с точностью до порога различения вкусовых ощущений такая единственность существует. Величина порога различения, определяемая по вариации чисел α_1, α_2, α_3, α_4, в среднем может быть оценена величиной в 15—17%.

В табл. 2 в скобках приведены найденные опытным путем для одного испытуемого предельные значения чисел α_i, при которых стимулы A и $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_i^0$ еще воспринимаются как равные по вкусу. Имеется в виду, что изменению подвергается лишь одно из чисел α_i, остальные же сохраняют значения, указанные в табл. 2.

Таблица 3

A	α_1	α_2	α_3	α_4
A_5'	6,1	2,4	1,26	1,97
A_5'	5,84	2,13	1,38	2,24
A_5'	4,79	2,6	1,18	2,31
A_5'	5,13	2,48	1,27	2,13
A_5'	6,38	2,15	1,34	2,41
A_5'	5,93	1,94	1,29	2,33
A_5'	5,71	2.18	1,32	2,15
A_5'	4,9	2,41	1,43	2,3
A_5'	5,98	2,37	1,31	2,22
A_5'	5,65	2,51	1,40	1,8

В табл. 3 приведены результаты многократного уравнивания по вкусу стимула A_5' смесью $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_i^0$, выполненного одним и тем же испытуемым. Эти данные также свидетельствуют о справедливости закона четырехмерности (с точностью до порога различения).

В табл. 4 в виде примера показано, как изменяются числа α_i в подравниваемой смеси при плавном изменении вкусового стимула. Эксперименты проводились с одним испытуемым. В каждом опыте взяты средние значения α_i из десяти уравнений.

Как видно из табл. 4, малым изменениям стимула соответствуют незначительные по величине колебания чисел α_1, α_2, α_3, α_4, что доказывает справедливость закона непрерывности.

Таблица 4

A	α_1	α_2	α_3	α_4
$1{,}18\ A_{12} + 0{,}3\ A_{10}$	0	0,383	0	1,26
$1{,}35\ A_{12} + 0{,}3\ A_{10}$	0	0,46	0	1,5
$1{,}53\ A_{12} + 0{,}3\ A_{10}$	0	0,38	0	1,54
$1{,}7\ A_{12} + 0{,}3\ A_{10}$	0	0,40	0	2,1
$1{,}7\ A_{12} + 0{,}37\ A_{10}$	0	0,46	0	1.9
$2{,}1\ A_{12} + 0{,}45\ A_{10}$	0	0,58	0	2,15
$2{,}6\ A_{12} + 0{,}5\ A_{10}$	0	0,69	0	2,75
$2{,}6\ A_{12} + 0{,}55\ A_{10}$	0	0,65	0	2,6
$2{,}9\ A_{12} + 0{,}55\ A_{10}$	0	0,72	0	3,3
$3{,}3\ A_{12} + 0{,}6\ A_{10}$	0	0,77	0	3,58

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЗРИТЕЛЬНОГО ВОСПРИЯТИЯ ПРОСТРАНСТВА ПРИ УПРАВЛЕНИИ ДВИЖУЩИМИСЯ СИСТЕМАМИ РАЗЛИЧНОГО ВИДА

Я. Я. Белик

При управлении быстродвижущимися системами одним из основных признаков восприятия удаленности, а также положения управляемого аппарата является видимая скорость точек земной поверхности и отдельных предметов.

Видимая скорость точек Земли зависит от нескольких факторов: направления движения управляемой системы, ее линейной скорости, направления линии взора, высоты глаза оператора до Земли. Между всеми перечисленными параметрами существует связь, на основе которой работает прижизненно формирующаяся функциональная система восприятия удаленности. В качестве входных сигналов ее могут выступать все непосредственно измеряемые величины (угловые величины) либо известные из опыта линейные эталоны, запечатленные в блоке памяти.

Прежде чем рассматривать вопрос о конкретных математических моделях, выясним, какого вида комбинация линейной скорости может служить входным сигналом функциональной системы.

Расчеты показывают, что конкретный вид комбинации зависит от режимов движения.

Самый простой по форме вид получается для случая вращения аппарата вокруг своей оси без значительного смещения (например, вращение вертолета при посадке на площадку и опускании груза). Для этого случая

$$\frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{U} = \vec{\Psi}, \tag{1}$$

где $\vec{\Psi}$ — угловая скорость точек земной поверхности относительно вертолета;

$\operatorname{rot}\vec{U}$ — ротор линейных скоростей точек Земли относительно центра вращения.