

# К ТЕОРИИ АДАПТИВНОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В СИСТЕМАХ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ КАНАЛОВ ПРИЕМА\*

Д.И. ЛЕХОВИЦКИЙ

Вводится совместное распределение элементов оценки максимального правдоподобия персимметричной корреляционной матрицы многомерного гауссова процесса. Обсуждаются некоторые свойства полученного распределения и его связь с известным распределением Уишарта. Приводятся примеры использования для решения задач адаптивной обработки сигналов в системах с центральной симметрией пространственно-временных каналов приема.

*Ключевые слова:* центральная симметрия, персимметрия, корреляционная матрица, оценка максимального правдоподобия, плотность распределения оценки, распределение Уишарта, якобиан преобразования.

## ВВЕДЕНИЕ

В многомерном статистическом анализе случайных процессов и полей важнейшую роль играет распределение **Уишарта**, описывающее распределение максимально правдоподобной (**МП**) оценки корреляционной матрицы (**КМ**) выборки из многомерного нормального распределения [1–3]. На основе этой оценки могут строиться, в частности, эффективные адаптивные системы пространственной и (или) временной обработки сигналов на фоне гауссовых помех различной природы [9–12].

В теоретических и практических задачах используются распределения Уишарта как действительных симметричных [1–5], так и комплексных эрмитовых [6–10] положительно определенных оценочных **КМ** общего вида, соответствующих системам с произвольным расположением в общем случае различных каналов приема. В то же время для широкого класса систем обработки достаточно характерно построение, при котором (априори неизвестная) **КМ** обладает дополнительной спецификой структуры, создающей предпосылки для повышения эффективности обработки из-за уменьшения размерности вектора параметров, подлежащего оцениванию в процессе адаптации [13, 14].

Так, в адаптивных антенных решетках (**АР**) зачастую используется центрально-симметричное расположение в пространстве попарно одинаковых приемных элементов (модулей). В этом случае **КМ** выходных сигналов **АР**, принимаемых от точечных внешних источников шумовых излучений, может быть не только эрмитовой, но и персимметричной (симметричной относительно побочной диагонали) [15–22]. В импульсных **РЛС** такой же спецификой может обладать **КМ** между периодических флуктуаций отражений на выходах временных каналов приема системы **СДЦ**.

Однако в настоящее время в литературе нет единого мнения о выигрышах в эффективности адаптивной обработки, которые можно теоретически ожидать от учета этой специфики **КМ**.

Одной из причин этого можно считать неизвестность плотности распределения **МП** оценок действительных и комплексных персимметричных **КМ**, в теории центрально-симметричных систем призванных играть ту же роль, которую в произвольных системах играют действительные и комплексные распределения Уишарта **МП** оценок **КМ** общего вида [2, 3, 23].

**Цель статьи** – получить распределения **МП** оценок персимметричных действительных и комплексных **КМ** гауссовых процессов различной природы.

## 1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПЕРСИММЕТРИЧНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МАТРИЦ

**А.** Действительная  $M \times M$  матрица  $D = \{d_{i\ell}\}_{i,\ell=1}^M$  является персимметричной, если она совпадает с матрицей, полученной после поворота  $D$  относительно побочной диагонали, т. е. при выполнении равенств

$$D = \Pi_M \cdot D^T \cdot \Pi_M, \quad d_{i\ell} = d_{M+1-\ell, M+1-i}, \quad i, \ell = 1, M, \quad (1)$$

представляющих собой математическое определение персимметрии действительной матрицы.

Если в роли  $D$  выступает корреляционная (симметричная) матрица, то справедливы дополнительные равенства

$$D = \Pi_M \cdot D^T \cdot \Pi_M = \Pi_M \cdot D \cdot \Pi_M = D^T, \quad (2)$$

$$d_{i\ell} = d_{M+1-\ell, M+1-i} = d_{M+1-i, M+1-\ell} = d_{\ell i}, \quad i, \ell \in 1, M.$$

Здесь и далее « $T$ » – символ транспонирования,

$$\Pi_v = \sum_{i=1}^v \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_{v+1-i}^T = \Pi_v^T, \quad \Pi_v \cdot \Pi_v^T = \mathbf{I}_v, \quad \Pi_v = \Pi_v^T \quad (3)$$

–  $v \times v$  ортогональная симметричная матрица перестановок с единицами на побочной диагонали,  $\mathbf{e}_i$  –  $i$ -й ( $i \in 1, v$ ) столбец единичной  $v \times v$  матрицы  $\mathbf{I}_v$ .

При четных  $M = 2 \cdot L$  матрица  $D$  (2) допускает блочное представление

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ \Pi_L \cdot D_{12} \cdot \Pi_L & \Pi_L \cdot D_{11} \cdot \Pi_L \end{bmatrix}, \quad D_{11} = D_{11}^T, \quad (4)$$

$$D_{12} = \Pi_L \cdot D_{12}^T \cdot \Pi_L,$$

\* Радиотехника. – X., 1996. – №100. – С. 140–158

где  $\mathbf{D}_{11}$  и  $\mathbf{D}_{12}$  —  $L \times L$  блоки матрицы  $\mathbf{D}$  (4).

Введем  $2 \cdot L \times 2 \cdot L = M \times M$  матрицу

$$\mathbf{S}_M = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{I}_M + \mathbf{J}_M \cdot \mathbf{\Pi}_M) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_L & \mathbf{\Pi}_L \\ -\mathbf{\Pi}_L & \mathbf{I}_L \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\mathbf{J}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_L & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_L \end{bmatrix}$$

с непосредственно проверяемыми свойствами

$$\mathbf{S}_M \cdot \mathbf{S}_M^T = \mathbf{I}_M, \quad \mathbf{S}_M \cdot \mathbf{\Pi}_M = \mathbf{J}_M \cdot \mathbf{S}_M, \quad (6)$$

$$\mathbf{J}_M \cdot \mathbf{\Pi}_M = -\mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{J}_M.$$

С ее помощью матрица  $\mathbf{D}$  (4) может быть преобразована в блочно-диагональную матрицу

$$\mathbf{D}_M = \mathbf{S}_M \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}_M^T = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_\Sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Pi}_L \cdot \mathbf{D}_\Delta \cdot \mathbf{\Pi}_L \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{D}_\Sigma = \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{\Pi}_L,$$

$$\mathbf{D}_\Delta = \mathbf{D}_{11} - \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{\Pi}_L,$$

с детерминантом

$$\det \mathbf{D}_M = |\mathbf{D}_M| = |\mathbf{D}_\Sigma| \cdot |\mathbf{\Pi}_L \cdot \mathbf{D}_\Delta \cdot \mathbf{\Pi}_L| = |\mathbf{D}_\Sigma| \cdot |\mathbf{D}_\Delta| = |\mathbf{D}|, \quad (8)$$

совпадающим с детерминантом исходной матрицы

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}_M^T \cdot \mathbf{D}_M \cdot \mathbf{S}_M \quad (9)$$

в силу ортогональности (6) матрицы  $\mathbf{S}_M$  (5).

**Б.** Комплексная  $M \times M$  матрица  $\mathbf{C} = \{c_{i\ell}\}_{i,\ell=1}^M = \mathbf{C}' + j \cdot \mathbf{C}''$  является персимметричной, если выполняются равенства

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{C}'^T \cdot \mathbf{\Pi}_M, \quad (10)$$

$$\mathbf{C}' = \mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{C}'^T \cdot \mathbf{\Pi}_M, \quad \mathbf{C}'' = \mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{C}''^T \cdot \mathbf{\Pi}_M.$$

Если в роли  $\mathbf{C}$  выступает корреляционная (эрмитова) матрица, то справедливы дополнительные равенства

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{C}'^T \cdot \mathbf{\Pi}_M = \mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{C}'' \cdot \mathbf{\Pi}_M = \mathbf{C}^*, \quad \mathbf{C}'^T = \mathbf{C}''^*, \quad (11)$$

$$\mathbf{C}' = \mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{C}'^T \cdot \mathbf{\Pi}_M = \mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{C}' \cdot \mathbf{\Pi}_M = \mathbf{C}'^T,$$

$$\mathbf{C}'' = \mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{C}''^T \cdot \mathbf{\Pi}_M = -\mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{C}'' \cdot \mathbf{\Pi}_M = -\mathbf{C}''^T.$$

Здесь  $(\sim)$  и  $(^*)$  — символы комплексного сопряжения и эрмитового сопряжения (комплексного сопряжения и транспонирования) соответственно.

Введем унитарную  $M \times M$  матрицу [18, 22]

$$\mathbf{T} = \{t_{i,\ell}\}_{i,\ell=1}^M = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{I}_M - j \cdot \mathbf{\Pi}_M) \quad (12)$$

со свойствами

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T = \mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Pi}_M = -j \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Pi}_M = -j \cdot \mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{T}^*, \quad (13)$$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^* = \mathbf{I}_M.$$

С ее помощью эрмитова персимметричная матрица  $\mathbf{C}$  (11) преобразуется в действительную симметричную  $M \times M$  матрицу

$$\mathbf{C}_D = \mathbf{T} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}^* = \mathbf{C}_D^T = \mathbf{C}' + \mathbf{C}''^T \cdot \mathbf{\Pi}_M \quad (14)$$

с детерминантом

$$|\mathbf{C}_D| = |\mathbf{C}' + \mathbf{C}''^T \cdot \mathbf{\Pi}_M| = |\mathbf{C}|, \quad (15)$$

совпадающим с детерминантом исходной матрицы

$$\mathbf{C} = \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{C}_D \cdot \mathbf{T} \quad (16)$$

в силу унитарности (13) матрицы  $\mathbf{T}$  (12).

## 2. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МП ОЦЕНКИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРСИММЕТРИЧНОЙ КМ

**А.** Пусть случайные действительные гауссовские (нормальные)  $M$ -мерные векторы  $\mathbf{y}_i = \{y_\ell^{(i)}\}_{\ell=1}^M$   $K$ -мерной выборки  $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^K$  взаимно независимы, имеют нулевое среднее и одинаковую неотрицательно определенную  $M \times M$  КМ  $\mathbf{D}$ , то есть

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^K, \quad \mathbf{y}_i = N(0, \mathbf{D}), \quad \bar{\mathbf{y}}_i = 0, \quad (17),$$

$$\overline{\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_\ell^*} = \mathbf{D} \cdot \delta(i - \ell), \quad i, \ell \in 1, K,$$

где  $\delta(x)$  — символ Кронекера, черта сверху — символ статистического усреднения.

Совместное распределение  $p(\mathbf{Y})$  элементов выборки  $\mathbf{Y}$  в этом случае равно [3, 5, 12]

$$p(\mathbf{Y}) = (2\pi)^{-K \cdot M/2} \cdot |\mathbf{D}|^{-K/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \text{tr}(\mathbf{D}^{-1} \mathbf{A})\right\}, \quad (18)$$

где  $\text{tr}(\Phi)$  — след (сумма диагональных элементов) матрицы  $\Phi$ ,

$$\mathbf{A} = \{a_{i\ell}\}_{i,\ell=1}^M = \sum_{i=1}^K \mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_i^T = \mathbf{A}^T = K \cdot \bar{\mathbf{D}} \quad (19)$$

—  $M \times M$  выборочная (случайная) КМ. В условиях (17), (18) матрица  $\bar{\mathbf{D}} = K^{-1} \cdot \mathbf{A}$  является МП оценкой действительной КМ  $\mathbf{D}$  общего вида [3, 11–14], а матрица  $\mathbf{A}$  “имеет распределение Уишарта  $W_M^{(\mathbf{D})}(\mathbf{A}, K, \mathbf{D})$  с  $K$  степенями свободы и матрицей параметров  $\mathbf{D}$  [5]” вида [2–5]:

$$p(\mathbf{A}) = W_M^{(\mathbf{D})}(\mathbf{A}, K, \mathbf{D}) = F_M^{(\mathbf{D})}(\mathbf{A}, K, \mathbf{D}) / f_M^{(\mathbf{D})}(K, \mathbf{D}), \quad (20a)$$

$$F_M^{(\mathbf{D})}(\mathbf{A}, K, \mathbf{D}) = |\mathbf{A}|^{(K-M-1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{D}^{-1} \mathbf{A})\right\}, \quad (20b)$$

$$f_M^{(\mathbf{D})}(K, \mathbf{D}) = 2^{\frac{K \cdot M}{2}} \pi^{\frac{M \cdot (M-1)}{4}} |\mathbf{D}|^{\frac{K}{2}} \prod_{i=1}^M \left(\frac{K+1-i}{2}\right), \quad K \geq M, \quad (20b)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция, для целых  $x = n \geq 1$  равная  $(n-1)!$ .

Под распределением случайной матрицы понимается совместное распределение определяющих ее случайных элементов [3, 10]. Тем самым (20) представляет собой “экономную” запись неотрицательной функции  $M(M+1)/2$  скалярных переменных

$$p(\mathbf{A}) = p\{a_{i\ell}\}, \quad i \in 1, M, \quad \ell \in i, M,$$

в роли которых выступают действительные диагональные и наддиагональные элементы симметричной матрицы  $\mathbf{A}$  (19), полностью ее определяющие.

Если **КМ**  $\mathbf{D}$  персимметрична, то в условиях (17) ее **МП** оценка может быть записана в виде<sup>\*</sup>

$$\hat{\mathbf{D}}_{\Pi} = \frac{1}{K} \mathbf{A}_{\Pi}, \mathbf{A}_{\Pi} = \frac{1}{2} (\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^T + \mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{\Pi}_M). \quad (21)$$

Решаемая в данном пункте задача заключается в отыскании плотности распределения матрицы  $\mathbf{A}_{\Pi}$ .

**Б.** Эта матрица как сумма двух симметричных матриц, каждая из которых есть результат поворота другой относительно побочной диагонали, также симметрична и персимметрична, что сразу следует и из определения (2). В случае четных  $M = 2 \cdot L$  (которым мы здесь ограничиваемся для упрощения обозначений) она определяется  $L \cdot (L+1)$  случайными параметрами – своими элементами  $a_{i\ell}$  при  $i \in 1, L$  и  $\ell \in i, M+1-i$ .

Из сравнения (21) с (19) следует, что первое слагаемое матрицы  $\mathbf{A}_{\Pi}$  имеет распределение Уишарта (20) с матрицей параметров  $\mathbf{D}/2$ . Такое же распределение имеет и второе слагаемое, поскольку в условиях (2) векторы  $\mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{y}_i, i \in 1, K$  “перевернутой” выборки  $\mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{Y}$  имеют те же свойства (17), что и исходные векторы  $\mathbf{y}_i$ . Если бы эти слагаемые были взаимно независимы, их сумма имела бы распределение Уишарта вида (20) с  $2 \times K$  степенями свободы и матрицей  $\mathbf{D}/2$  [3–5]. Однако для слагаемых матрицы  $\mathbf{A}_{\Pi}$  (21) это условие не выполняется, поэтому ее распределение должно быть другим.

**В.** Для его отыскания разобьем исходную  $2 \cdot L \times K$  матрицу-выборку  $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^K = \{\mathbf{y}_{\ell}^{(i)}\}_{\ell=1}^{2L}$  на  $L \times K$  «верхний»  $\mathbf{Y}_B$  и “нижний”  $\mathbf{Y}_H$  блоки, так что

$$\mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Y}_B \\ \mathbf{Y}_H \end{Bmatrix}, \mathbf{Y}_B = \{\mathbf{y}_{Bi}\}_{i=1}^K, \mathbf{y}_{Bi} = \{\mathbf{y}_{\ell}^{(i)}\}_{\ell=1}^L, \mathbf{Y}_H = \{\mathbf{y}_{Hi}\}_{i=1}^K, \mathbf{y}_{Hi} = \{\mathbf{y}_{\ell}^{(i)}\}_{\ell=L+1}^{2L}. \quad (22)$$

Введем преобразованную с помощью матрицы  $\mathbf{S}_M$  (5) выборку

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^K = \mathbf{S}_M \cdot \mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{\Sigma} \\ \mathbf{V}_{\Delta} \end{Bmatrix}, \quad (23)$$

$$\mathbf{V}_{\Sigma} = \{\mathbf{v}_{\Sigma i}\}_{i=1}^K = (\mathbf{Y}_B + \mathbf{\Pi}_L \cdot \mathbf{Y}_H) / \sqrt{2},$$

$$\mathbf{V}_{\Delta} = \{\mathbf{v}_{\Delta i}\}_{i=1}^K = (\mathbf{Y}_H + \mathbf{\Pi}_L \cdot \mathbf{Y}_B) / \sqrt{2},$$

позволяющую переписать (21) с учетом (6) в виде

$$\mathbf{A}_{\Pi} = \frac{1}{2} (\mathbf{S}_M^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{S}_M + \mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{S}_M^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{S}_M \cdot \mathbf{\Pi}_M) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{S}_M^T \cdot (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T + \mathbf{J}_M \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{J}_M) \cdot \mathbf{S}_M.$$

Легко убедиться, что в силу свойств матрицы  $\mathbf{J}_M$  (5) слагаемые в скобках последнего равенства имеют одинаковые  $L \times L$  диагональные и противоположные по знаку  $L \times L$  внедиагональные блоки. Поэтому

<sup>\*</sup>Для экономии места мы опускаем вывод формулы (21), которая может быть легко получена по методике, использованной в [15, 16] при выводе **МП** оценки эрмитовой персимметричной **КМ**.

$$\mathbf{A}_{\Pi} = \mathbf{S}_M^T \cdot \mathbf{B}_V \cdot \mathbf{S}_M = \mathbf{B}_V = \{b_{i\ell}\}_{i,\ell=1}^{2L} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\Sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{\Delta} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_M \cdot \mathbf{A}_{\Pi} \cdot \mathbf{S}_M^T, \quad (24a)$$

$$|\mathbf{B}_V| = |\mathbf{B}_{\Sigma}| \cdot |\mathbf{B}_{\Delta}| = |\mathbf{A}_{\Pi}|, \quad (24b)$$

а  $L \times L$  диагональные блоки  $\mathbf{B}_{\Sigma}$  и  $\mathbf{B}_{\Delta}$  равны

$$\mathbf{B}_{\Sigma} = \{b_{i\ell}^{(\Sigma)}\}_{i,\ell=1}^L = \mathbf{V}_{\Sigma} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma}^T, \mathbf{B}_{\Delta} = \{b_{i\ell}^{(\Delta)}\}_{i,\ell=1}^L = \mathbf{V}_{\Delta} \cdot \mathbf{V}_{\Delta}^T. \quad (25)$$

Взаимосвязи (24) сводят решаемую задачу к отысканию плотности распределения матрицы  $\mathbf{B}_V$ .

**Г.** Заметим вначале, что в силу ортогональности матрицы  $\mathbf{S}_M$  якобиан преобразования  $\mathbf{Y} = \mathbf{S}_M^T \cdot \mathbf{V}$  равен единице и, следовательно, плотность  $p(\mathbf{V})$  преобразованной выборки  $\mathbf{V}$  (23) в условиях (18) равна

$$p(\mathbf{V}) = (2\pi)^{-K \cdot L} |\mathbf{D}|^{\frac{K}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} (\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{S}_M^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{S}_M) \right\}.$$

Используя известное свойство следа произведения  $\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$  и учитывая (7), (8), последнее равенство можно переписать в виде

$$p(\mathbf{V}) = (2\pi)^{-K \cdot L} |\mathbf{D}|^{\frac{K}{2}} |\mathbf{\Pi}_L \cdot \mathbf{D}_{\Delta} \cdot \mathbf{\Pi}_L|^{-\frac{K}{2}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} (\mathbf{D}_V^{-1} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T) \right\}.$$

Но, в силу (7), (23) – (25),

$$\text{tr} (\mathbf{D}_V^{-1} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T) = \text{tr} (\mathbf{D}_{\Sigma}^{-1} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma}^T) + \text{tr} (\mathbf{\Pi}_L \cdot \mathbf{D}_{\Delta}^{-1} \cdot \mathbf{\Pi}_L \cdot \mathbf{V}_{\Delta} \cdot \mathbf{V}_{\Delta}^T) = \text{tr} (\mathbf{D}_V^{-1} \cdot \mathbf{B}_V), \quad (26a)$$

поэтому

$$p(\mathbf{V}) = p(\mathbf{V}_{\Sigma}) \cdot p(\mathbf{V}_{\Delta}), \quad (26b)$$

где

$$p(\mathbf{V}_{\Sigma}) = (2\pi)^{-\frac{K \cdot L}{2}} |\mathbf{D}_{\Sigma}|^{\frac{K}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} (\mathbf{D}_{\Sigma}^{-1} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma}^T) \right\}, \quad (27a)$$

$$p(\mathbf{V}_{\Delta}) = (2\pi)^{-K \cdot L/2} |\mathbf{\Pi}_L \cdot \mathbf{D}_{\Delta} \cdot \mathbf{\Pi}_L|^{-K/2} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} ((\mathbf{\Pi}_L \cdot \mathbf{D}_{\Delta} \cdot \mathbf{\Pi}_L)^{-1} \cdot \mathbf{V}_{\Delta} \cdot \mathbf{V}_{\Delta}^T) \right\}. \quad (27b)$$

Поскольку в силу (17), (4) **КМ**

$$\overline{\mathbf{Y}_{Bi} \cdot \mathbf{Y}_{Bi}^T} = \mathbf{D}_{11}, \quad \overline{\mathbf{Y}_{Hi} \cdot \mathbf{Y}_{Bi}^T} = \mathbf{\Pi}_L \cdot \mathbf{D}_{12} \cdot \mathbf{\Pi}_L, \quad \overline{\mathbf{Y}_{Bi} \cdot \mathbf{Y}_{Hi}^T} = \mathbf{D}_{12}, \quad \overline{\mathbf{Y}_{Hi} \cdot \mathbf{Y}_{Hi}^T} = \mathbf{\Pi}_L \cdot \mathbf{D}_{11} \cdot \mathbf{\Pi}_L, \quad i \in 1, K,$$

то, используя определения (23), (22) и (7), нетрудно убедиться в том, что входящие в (27) матрицы  $\mathbf{D}_{\Sigma}$  и  $\mathbf{\Pi}_L \cdot \mathbf{D}_{\Delta} \cdot \mathbf{\Pi}_L$  представляют собой **КМ**.

$$\mathbf{D}_{\Sigma} = \overline{\mathbf{v}_{\Sigma i} \cdot \mathbf{v}_{\Sigma i}^T}, \quad \mathbf{\Pi}_L \cdot \mathbf{D}_{\Delta} \cdot \mathbf{\Pi}_L = \overline{\mathbf{v}_{\Delta i} \cdot \mathbf{v}_{\Delta i}^T}, \quad i \in 1, K. \quad (28)$$

Тем самым  $K$ -мерные «суммарная»  $\mathbf{V}_{\Sigma}$  и «разностная»  $\mathbf{V}_{\Delta}$  выборки (23) случайных  $L = M/2$ -мерных векторов  $\mathbf{v}_{\Sigma i}$  и  $\mathbf{v}_{\Delta i}$  ( $i \in 1, K$ ) имеют такие (нормальные) распределения (27), при которых сформированные из них по (25) ма-

трицы  $\mathbf{B}_\Sigma$  и  $\mathbf{B}_\Delta$  имеют распределения Уишарта с  $K$  степенями свободы и матрицами параметров  $\mathbf{D}_\Sigma$  и  $\mathbf{\Pi}_L \mathbf{D}_\Delta \mathbf{\Pi}_L$ :

$$p(\mathbf{B}_\Sigma) = W_L^{(D)}(\mathbf{B}_\Sigma, K, \mathbf{D}_\Sigma), \quad (29a)$$

$$p(\mathbf{B}_\Delta) = W_L^{(D)}(\mathbf{B}_\Delta, K, \mathbf{\Pi}_L \cdot \mathbf{D}_\Delta \cdot \mathbf{\Pi}_L). \quad (29б)$$

Кроме того, в силу следующей из (26) взаимной независимости выборок  $\mathbf{V}_\Sigma$  и  $\mathbf{V}_\Delta$  матрицы  $\mathbf{B}_\Sigma$  и  $\mathbf{B}_\Delta$  (25) также взаимно независимы, поэтому их совместная плотность  $p(\mathbf{B}_\Sigma, \mathbf{B}_\Delta) = p(\mathbf{B}_\Sigma) \cdot p(\mathbf{B}_\Delta)$ . Перемножая плотности (29а) и (29б) и учитывая (26), (24), (8), получим плотность  $p(\mathbf{B}_V)$  матрицы  $\mathbf{B}_V$  (24):

$$p(\mathbf{B}_V) = \frac{|\mathbf{B}_V|^{-(K-L-1)/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{D}_V^{-1} \cdot \mathbf{B}_V)\right\}}{2^{K \cdot L} \cdot \pi^{L(L-1)/2} \cdot |\mathbf{D}_V|^{K/2} \cdot \prod_{i=1}^L \Gamma^2\left(\frac{K+1-i}{2}\right)}. \quad (30)$$

Каждая из образующих ее симметричных  $L \times L$  матриц  $\mathbf{B}_\Sigma$  и  $\mathbf{B}_\Delta$  (25) определяется  $L \cdot (L+1)/2$  параметрами, так что число таких параметров в матрице  $\mathbf{B}_V$  (24), равно  $L \cdot (L+1)$ , в точности совпадает с числом параметров, определяющих матрицу  $\mathbf{A}_\Pi$  (21). Поэтому для получения на основе (30) искомой плотности  $p(\mathbf{A}_\Pi)$  достаточно определить якобиан связывающего  $\mathbf{B}_V$  и  $\mathbf{A}_\Pi$  преобразования (24).

Используя (5) и (24), легко заметить, что

$$b_{i\ell} = a_{i\ell} + a_{i,2i+1-\ell}, \quad b_{2L+1-\ell, 2L+1-i} = a_{i\ell} - a_{i,2L+1-\ell}, \\ i \in 1, L; \quad \ell \in i, L.$$

Поэтому матрица Якоби преобразования (24)

может быть записана в виде  $\mathbf{I}_{L(L+1)/2} \otimes \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , где  $\otimes$  – символ кронекеровского произведения, и, следовательно, искомый якобиан равен  $2^{L(L+1)/2}$ .

Заменяя в (30) матрицу  $\mathbf{B}_V$  на ее представление (24а) и учитывая (24б), (9), (8), получим

$$p(\mathbf{A}_\Pi) = \frac{|\mathbf{A}_\Pi|^{\frac{K-L-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{A}_\Pi)\right\}}{2^{\left(\frac{K-L-1}{2}\right) \cdot L} \cdot \pi^{L \cdot \left(\frac{L-1}{2}\right)} \cdot |\mathbf{D}|^{\frac{K}{2}} \cdot \prod_{i=1}^L \Gamma^2\left(\frac{K+1-i}{2}\right)}, \quad (31) \\ K \geq L.$$

Последняя формула описывает искомую плотность распределения действительной симметричной и персимметричной случайной матрицы  $\mathbf{A}_\Pi$  МП оценки  $\hat{\mathbf{D}}_\Pi$  (21) действительной персимметричной КМ  $\mathbf{D}$  (17), (2) четного порядка  $M = 2L$ .

### 3. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МП ОЦЕНКИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРСИММЕТРИЧНОЙ КМ

**А.** Пусть случайные комплексные нормальные  $M$ -мерные векторы  $\mathbf{y}_i = \{y_\ell^{(i)}\}_{\ell=1}^M = \mathbf{y}'_i + j \cdot \mathbf{y}''_i$   $K$ -мерной выборки  $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^K$  взаимно незави-

симы, имеют нулевое среднее и одинаковую неотрицательно определенную комплексную эрмитову  $M \times M$  КМ  $\mathbf{C} = \{c_{i\ell}\}_{i,\ell=1}^M = \mathbf{C}' + j\mathbf{C}''$ , то есть

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^K, \quad \mathbf{y}_i \sim CN(0, \mathbf{C}), \quad (32a) \\ \bar{\mathbf{y}}_i = 0, \quad \overline{\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_\ell^*} = \mathbf{C} \cdot \delta(i-\ell), \quad i, \ell \in 1, K.$$

Это означает [8, 12], что совместно нормальные реальные  $\mathbf{y}'_i$  и мнимые  $\mathbf{y}''_i$  части векторов  $\mathbf{y}_i$  ( $i \in 1, K$ ), то есть нормальны, имеют нулевое среднее и взаимно независимы составленные из них  $2 \cdot M$ -мерные действительные векторы

$$\mathbf{g}_i^T = \{\mathbf{y}'_i{}^T, \mathbf{y}''_i{}^T\} \sim N(0, \mathbf{Q}), \quad \bar{\mathbf{g}}_i = 0, \quad (32б) \\ \overline{\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_\ell^T} = \mathbf{Q} \cdot \delta(i-\ell), \quad i, \ell \in 1, K$$

с одинаковой  $2 \cdot M \times 2 \cdot M$  корреляционной матрицей

$$\mathbf{Q} = \overline{\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_i^T} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{y}'_i \cdot \mathbf{y}'_i{}^T} & \overline{\mathbf{y}'_i \cdot \mathbf{y}''_i{}^T} \\ \overline{\mathbf{y}''_i \cdot \mathbf{y}'_i{}^T} & \overline{\mathbf{y}''_i \cdot \mathbf{y}''_i{}^T} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{C}' & -\mathbf{C}'' \\ \mathbf{C}'' & \mathbf{C}' \end{bmatrix}, \quad i \in 1, K. \quad (32в)$$

Совместное распределение элементов выборки в этом случае равно [8, 10, 12]

$$p(\mathbf{Y}) = (\pi)^{-K \cdot M} |\mathbf{C}|^{-K} \exp\{-\text{tr}(\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{A}_\mathbf{C})\}, \quad (33)$$

где

$$\mathbf{A}_\mathbf{C} = \{a_{i\ell}\}_{i,\ell=1}^M = \sum_{i=1}^K \mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_i^* = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^* = \mathbf{A}_\mathbf{C}^* = K \cdot \hat{\mathbf{C}} \quad (34)$$

–  $M \times M$  выборочная комплексная КМ. В условиях (32) матрица  $\hat{\mathbf{C}} = K^{-1} \mathbf{A}_\mathbf{C}$  является МП оценкой комплексной КМ  $\mathbf{C}$  общего вида [6–12], а матрица  $\mathbf{A}_\mathbf{C}$  “имеет введенное в [6] комплексное распределение Уишарта  $W_M^{(C)}(\mathbf{A}_\mathbf{C}, K, \mathbf{C})$  с  $K$  степенями свободы и матрицей  $\mathbf{C}$ ” [8], имеющее вид:

$$p(\mathbf{A}_\mathbf{C}) = W_M^{(C)}(\mathbf{A}_\mathbf{C}, K, \mathbf{C}) = \\ = \mathbf{F}_M^{(C)}(\mathbf{A}_\mathbf{C}, K, \mathbf{C}) / \mathbf{f}_M^{(C)}(K, \mathbf{C}), \quad (35a)$$

$$\mathbf{F}_M^{(C)}(\mathbf{A}_\mathbf{C}, K, \mathbf{C}) = |\mathbf{A}_\mathbf{C}|^{K-M} \exp\{-\text{tr}(\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{A}_\mathbf{C})\}, \quad (35б)$$

$$\mathbf{f}_M^{(C)}(K, \mathbf{C}) = \pi^{M \cdot \left(\frac{M-1}{2}\right)} |\mathbf{C}|^K \prod_{i=1}^M \Gamma(K+1-i), \quad K \geq M. \quad (35в)$$

Под комплексным распределением матрицы  $\mathbf{A}_\mathbf{C}$  понимается совместное распределение реальных и мнимых частей определяющих ее случайных элементов [6–10]. Тем самым (35) является формой записи неотрицательной функции  $M^2$  переменных

$$p(\mathbf{A}_\mathbf{C}) = p\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{MM}, a'_{i\ell}, a''_{i\ell}\}, \\ i \in 1, M-1, \ell \in i+1, M,$$

в роли которых выступают действительные диагональные элементы  $a_{ii}$  ( $i \in 1, M$ ) и  $M \cdot (M-1)$  реальных ( $a'_{i\ell}$ ) и мнимых ( $a''_{i\ell}$ ) частей наддиагональных

элементов  $a_{i\ell} = a'_{i\ell} + j \cdot a''_{i\ell}$ , ( $i \in 1, M-1; \ell \in i+1, M$ ) случайной эрмитовой матрицы  $\mathbf{A}_C$  (34), полностью ее определяющие.

Если **КМ С** персимметрична, то в условиях (32) ее **МП** опенка может быть записана в виде [10, 17, 22]:

$$\mathbf{C}'_{\Pi} = \frac{1}{K} \mathbf{A}_C, \quad \mathbf{A}_C = \frac{1}{2} (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^* + \mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{Y} \sim \cdot \mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{\Pi}_M) = \quad (36)$$

$$= \mathbf{A}_C^* = \mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{A}_C \sim \cdot \mathbf{\Pi}_M.$$

Цель данного пункта – найти плотность распределения матрицы  $\mathbf{A}_{СП}$ .

**Б.** Эта матрица как сумма двух эрмитовых матриц, каждая из которых есть результат поворота другой относительно побочной диагонали, эрмитова и персимметрична. Поэтому она полностью определяется  $M \cdot (M+1)/2$  скалярными действительными параметрами, из которых

$$r = \begin{cases} L \cdot (L-1), & M = 2L-1; \\ L^2, & M = 2 \cdot L, L = \varepsilon[(M+1)/2] \end{cases} \quad (37)$$

мнимых частей ( $a''_{i\ell}$ ), а остальные  $M \cdot (M+1)/2 - r$  – реальные ( $a'_{i\ell}$ ) части элементов  $a_{i\ell}$ ,  $i \in 1, L; \ell \in i, M+1-i$  задающих всю матрицу  $\mathbf{A}_C$ . В (37)  $\varepsilon[x]$  – целая часть  $x$ .

Из сравнения (36) с (34) следует, что первое слагаемое этой матрицы имеет распределение  $W_M^{(C)}(\mathbf{A}_C, K, C/2)$ . Такое же распределение имеет и второе слагаемое, поскольку в условиях (11) векторы  $\mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{y}_i \sim$  ( $i \in 1, K$ ) “перевернутой” и комплексно сопряженной выборки  $\mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{Y} \sim$  имеют те же свойства (36), что и исходные векторы  $\mathbf{y}_i$ . Выборки  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{Y} \sim$  кроме того, взаимно некоррелированы ( $\overline{\mathbf{Y} \cdot (\mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{Y} \sim)^*} = 0$ ) [17], однако не являются совместно нормальными [21]. Поэтому из некоррелированности не следует их взаимная независимость, что не позволяет представить совместную плотность  $p(\mathbf{Y}, \mathbf{\Pi}_M, \mathbf{Y} \sim)$  в виде произведения  $p(\mathbf{Y}) \cdot p(\mathbf{\Pi}_M, \mathbf{Y} \sim)$ , а для плотности их суммы – использовать распределение  $W_M^{(C)}(\mathbf{A}_C, 2K, C/2)$ , справедливое только в условиях взаимной независимости слагаемых\*).

**В.** Рассмотрим преобразованную унитарной матрицей  $\mathbf{T}$  (12) выборку

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^K = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{V}_{\Sigma} + j \cdot \mathbf{V}_{\Delta}, \quad (38a)$$

$$\mathbf{V}_{\Sigma} = \{\mathbf{v}_{\Sigma i}\}_{i=1}^K = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{Y}' + \mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{Y} \sim), \quad (38б)$$

$$\mathbf{V}_{\Delta} = \{\mathbf{v}_{\Delta i}\}_{i=1}^K = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{Y} \sim - \mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{Y}'),$$

позволяющую, используя (13), переписать матрицу  $\mathbf{A}_C$  (36) в виде

$$\mathbf{A}_{СП} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{T}^* \cdot (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^* + \mathbf{V} \sim \cdot \mathbf{V}^T) \cdot \mathbf{T}.$$

Очевидно, что слагаемые в скобках этого равенства взаимно комплексно сопряжены, поэтому

$$\mathbf{A}_{СП} = \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{B}_V \cdot \mathbf{T}, \quad (39)$$

где

$$\mathbf{B}_V = \{b_{i\ell}\}_{i,\ell=1}^M = \text{Re}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^*) = \mathbf{B}_{\Sigma} + \mathbf{B}_{\Delta} = \mathbf{B}_V^T, \quad (40a)$$

$$\mathbf{B}_{\Sigma} = \{b_{i\ell}^{(\Sigma)}\}_{i,\ell=1}^M = \mathbf{V}_{\Sigma} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma}^T, \quad (40б)$$

$$\mathbf{B}_{\Delta} = \{b_{i\ell}^{(\Delta)}\}_{i,\ell=1}^M = \mathbf{V}_{\Delta} \cdot \mathbf{V}_{\Delta}^T.$$

Следствием (39) является справедливость равенств

$$\mathbf{B}_V = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_{СП} \cdot \mathbf{T}^*, \quad |\mathbf{B}_V| = |\mathbf{A}_{СП}|, \quad (41)$$

в силу которых решаемая задача сводится к отысканию плотности распределения действительной симметричной матрицы  $\mathbf{B}_V$ .

**Г.** Заметим, что в силу (32а, 32в) **КМ** «суммарных»  $\mathbf{v}_{\Sigma i}$  и «разностных»  $\mathbf{v}_{\Delta i}$  ( $i \in 1, K$ ) векторов в выборках  $\mathbf{V}_{\Sigma}$  и  $\mathbf{V}_{\Delta}$  (38б) совпадают и равны:

$$\overline{\mathbf{v}_{\Sigma i} \cdot \mathbf{v}_{\Sigma \ell}^T} = \overline{\mathbf{v}_{\Delta i} \cdot \mathbf{v}_{\Delta \ell}^T} = \mathbf{C}_{\Sigma} \cdot \delta(i-\ell), \quad (42)$$

$$\mathbf{C}_{\Sigma} = \mathbf{C}_D / 2, \quad i, \ell \in 1, K,$$

а плотность  $p(\mathbf{V})$  преобразованной выборки  $\mathbf{V}$  (38а) вследствие унитарности  $\mathbf{T}$  и (33), (9) есть

$$p(\mathbf{V}) = (2\pi)^{-K \cdot M} |\mathbf{C}_{\Sigma}|^{-K} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{C}_{\Sigma}^{-1} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^*)\right\}, \quad (43)$$

где матрица  $\mathbf{C}_D$  определена в (14).

Учитывая симметрию матриц  $\mathbf{C}_D$  и  $\mathbf{C}_{\Sigma}$  и (40), легко проверить справедливость равенств

$$\text{tr}(\mathbf{C}_{\Sigma}^{-1} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^*) = \text{tr}\{\mathbf{C}_{\Sigma}^{-1} \cdot \text{Re}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^*)\} = \quad (44)$$

$$= \text{tr}(\mathbf{C}_{\Sigma}^{-1} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma}^T) + \text{tr}(\mathbf{C}_{\Sigma}^{-1} \cdot \mathbf{V}_{\Delta} \cdot \mathbf{V}_{\Delta}^T),$$

в силу которых (43) можно записать в виде

$$p(\mathbf{V}) = p(\mathbf{V}_{\Sigma}, \mathbf{V}_{\Delta}) = p(\mathbf{V}_{\Sigma}) \cdot p(\mathbf{V}_{\Delta}), \quad (45)$$

где

$$p(\mathbf{V}_{\Sigma}) = (2\pi)^{-\frac{K \cdot M}{2}} |\mathbf{C}_{\Sigma}|^{-\frac{K}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \text{tr}(\mathbf{C}_{\Sigma}^{-1} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma} \cdot \mathbf{V}_{\Sigma}^T)\right\}, \quad (46a)$$

$$p(\mathbf{V}_{\Delta}) = (2\pi)^{-\frac{K \cdot M}{2}} |\mathbf{C}_{\Sigma}|^{-\frac{K}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{C}_{\Sigma}^{-1} \cdot \mathbf{V}_{\Delta} \cdot \mathbf{V}_{\Delta}^T)\right\}. \quad (46б)$$

Отсюда и из (18), (20), (40) следует, что плотности распределения матриц  $\mathbf{B}_{\Sigma}$  и  $\mathbf{B}_{\Delta}$  (40) равны

$$p(\mathbf{B}_{\Sigma}) = W_M^{(D)}(\mathbf{B}_{\Sigma}, K, \mathbf{C}_{\Sigma}), \quad (47a)$$

$$p(\mathbf{B}_{\Delta}) = W_M^{(D)}(\mathbf{B}_{\Delta}, K, \mathbf{C}_{\Sigma}),$$

а сами эти матрицы в силу (45) взаимно независимы.

Поэтому плотность распределения их суммы (40) равна [18, 22]

\*Такая взаимная независимость предполагалась в [17, 19], что привело к некорректности ряда результатов, на что было указано в [21].

$$p(\mathbf{B}_V) = W_M^{(D)}(\mathbf{B}_V, 2K, C_\Sigma) = \frac{|\mathbf{B}_V|^{\frac{2K-M-1}{2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}(C_\Sigma^{-1} \cdot \mathbf{B}_V)\right\}}{2^{M \cdot K} \cdot \pi^{\frac{M(M-1)}{4}} \cdot |C_\Sigma|^K \cdot \prod_{i=1}^M \Gamma\left(\frac{2K+1-i}{2}\right)} \quad (476)$$

Симметричная  $M \times M$  матрица  $\mathbf{B}_V$  определяется  $M \cdot (M+1)/2$  параметрами, что в точности совпадает с числом параметров, определяющих эрмитову персимметричную матрицу  $\mathbf{A}_{СП}$ , для элементов которой  $a_{i\ell} = a'_{i\ell} + j \cdot a''_{i\ell}$  справедливы равенства:

$$\begin{aligned} a_{i\ell} &= a_{M_\ell M_i} = \tilde{a}'_{M_i M_\ell} = \tilde{a}_{\ell i}, \quad M_k = M + 1 - k, \\ a'_{i\ell} &= a'_{M_\ell M_i} = a'_{M_i M_\ell} = a'_{\ell i}, \\ a''_{i\ell} &= a''_{M_\ell M_i} = -a''_{M_i M_\ell} = -a''_{\ell i}, \quad i, \ell \in 1, M. \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая (12), для элементов матрицы  $\mathbf{B}_V$  (41) получим:

$$\begin{aligned} b_{i\ell} &= \alpha'_{i\ell} - \alpha''_{i, M_\ell}, \quad b_{M_\ell M_i} = \alpha'_{i\ell} + \alpha''_{i, M_\ell}, \\ b_{i, M_i} &= \alpha'_{i, M_i}, \quad i \in 1, M, \quad \ell \in i, M, \end{aligned}$$

что позволяет представить якобиан преобразования (41) в виде

$$\det \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r \otimes \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_L \end{array} \right] = \det \left( \mathbf{I}_r \otimes \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = 2^r. \quad (48)$$

Заменяя в (476) матрицу  $\mathbf{B}_V$  на ее представление (41) и учитывая (48) (42), (16), (15), получим

$$p(\mathbf{A}_{СП}) = \frac{|\mathbf{A}_{СП}|^{(2K-M-1)/2} \exp\{-\text{tr}(C^{-1} \cdot \mathbf{A}_{СП})\}}{2^r \cdot \pi^{M \cdot (M-1)/4} |C|^K \cdot \prod_{i=1}^M \Gamma\left(\frac{2K+1-i}{2}\right)}, \quad (49)$$

$$r = \begin{cases} L \cdot (L-1), & M = 2 \cdot L - 1, \\ L^2, & M = 2 \cdot L \end{cases}, \quad K \geq L = \varepsilon \left[ \frac{M+1}{2} \right].$$

Последняя формула описывает искомое распределение комплексной эрмитовой персимметричной  $M \times M$  матрицы  $\mathbf{A}_{СП}$  МП оценки  $\hat{C}_П$  (36) эрмитовой персимметричной КМ  $\mathbf{C}$  (32), (11).

Заметим, что в частном случае  $M=1$ , когда  $L=1$ ,  $r=0$ ,  $|C|=C_{11} = |\mathbf{y}_1^{(i)}|^2 = \sigma^2$ , а  $\mathbf{A}_{СП} = a_{11} = \sum_{i=1}^K |\mathbf{y}_1^{(i)}|^2 = A_C$ , формула (49) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{A}_{СП}) &= p(A_C) = p(a_{11}) = \\ &= \frac{1}{\sigma^2 \cdot (K-1)!} \cdot \left(\frac{a_{11}}{\sigma^2}\right)^{K-1} \cdot \exp\left(-\frac{a_{11}}{\sigma^2}\right), \quad (50) \end{aligned}$$

т.е. переходит в распределение Эрланга с параметрами формы  $K$  и масштаба  $\sigma^2$ , описывающее плотность суммы  $K$  квадратов модулей независи-

мых комплексных нормальных случайных величин с нулевым средним и одинаковой дисперсией  $\sigma^2$  [24].

#### 4. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОЛУЧЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И ПРИМЕРЫ ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

Распределения (31), (49) персимметричных оценочных КМ (21), (36) имеют тот же вид, что и распределения (20), (35) оценочных КМ (19), (34) общего вида, но с увеличенным числом степеней свободы. В связи с этим на полученные распределения переносятся (с соответствующими корректировками) все хорошо известные свойства действительного [1–5] и комплексного [6–10] распределений Уишарта. Здесь отметим только некоторые из них.

##### А. Невырожденное преобразование

$$\mathbf{B}_П = \mathbf{U} \cdot \mathbf{A}_П \cdot \mathbf{U} \quad (51)$$

действительной персимметричной оценочной  $2L \times 2L$  матрицы  $\mathbf{A}_П$  (21), распределенной по (31), с неслучайной действительной симметричной и персимметричной  $2 \cdot L \times 2 \cdot L$  матрицей  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T = \mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Pi}_M$  порождает случайную симметричную и персимметричную матрицу  $\mathbf{B}_П$  (51) с тем же распределением (31), но с параметрической матрицей\*

$$\mathbf{D} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U}. \quad (52)^*$$

Действительно, в условиях (21) матрица  $\mathbf{B}_П$  (51) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_П &= \frac{1}{2} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Pi}_{2L} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{\Pi}_{2L} \cdot \mathbf{U}) = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T + \mathbf{\Pi}_{2L} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{\Pi}_{2L}), \quad (53) \end{aligned}$$

где  $\mathbf{V} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Y} = \{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^K$  – преобразованная  $K$ -мерная выборка, составленная из  $2L$ -мерных случайных векторов

$$\mathbf{v}_i = N(0, \mathbf{D}), \quad \overline{\mathbf{v}_i} = 0, \quad \overline{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_\ell^T} = \mathbf{D} \cdot \delta(i - \ell), \quad i, \ell \in 1, K. \quad (54)$$

Поэтому плотность матрицы  $\mathbf{B}$  (51) при  $K \geq L$  можно записать в виде

$$p_{\mathbf{B}_П}(\mathbf{G}) = \frac{|\mathbf{G}|^{(K-L-1)/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{G})\right\}}{2^{\left(\frac{K-L+1}{2}\right) \cdot L} \cdot \pi^{\frac{L(L-1)}{2}} \cdot |\mathbf{D}|^{\frac{K}{2}} \cdot \prod_{i=1}^L \Gamma^2\left(\frac{K+1-i}{2}\right)}, \quad (55)$$

Последняя формула позволяет, в частности, легко вычислить якобиан

$$\left| \partial(\mathbf{B}_П) / \partial(\mathbf{A}_П) \right| = p(\mathbf{A}_П) / p_{\mathbf{B}_П}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{A}_П \cdot \mathbf{U})$$

преобразования (51). Используя (31) и учитывая (52), получим, что  $\left| \partial(\mathbf{B}_П) / \partial(\mathbf{A}_П) \right| = |\mathbf{U}|^{L+1}$ .

\* Применительно к распределению (35) это свойство в [9] названо теоремой Гудмена.

Аналогичным образом нетрудно убедиться в том, что если в (51) вместо действительной матрицы  $\mathbf{A}_\Pi$  используется комплексная матрица (36) с распределением (49), а  $\mathbf{U}$  — эрмитова и персимметрична, то преобразованная матрица  $\mathbf{B}_C = \mathbf{U} \cdot \mathbf{A}_C \cdot \mathbf{U}$  имеет то же распределение (49), но с параметрической матрицей  $\mathbf{C}_U = \mathbf{U} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{U}$ . При этом якобиан преобразования оказывается равным  $|\partial(\mathbf{B}_C) / \partial(\mathbf{A}_C)| = |\mathbf{U}|^{M+1}$ .

Без использования распределений (31), (49) вычисление этих якобианов более сложно.

**Б.** В качестве второго примера найдем плотность распределения отношения двух квадратичных форм

$$v = \hat{S} / S, \quad S = (\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{x})^{-1}, \quad (56)$$

$$\hat{S} = (\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{C}_\Pi^{-1} \cdot \mathbf{x})^{-1} = (K \cdot \mathbf{x}^* \cdot \mathbf{A}_{C\Pi}^{-1} \cdot \mathbf{x})^{-1},$$

где  $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + j \cdot \mathbf{x}''$  — случайный комплексный  $M$ -мерный вектор,  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{C}_\Pi$  —  $M \times M$  комплексная персимметричная **КМ** векторов  $\mathbf{y}_i$  выборки  $\mathbf{Y}$  (32) и ее **МП** оценка (36) соответственно,  $\mathbf{A}_C$  — случайная матрица (36) с распределением (49).

Рассматриваемая задача возникает, в частности, при анализе эффективности адаптивной обработки в связных системах с **ФАР** [10], “сверхразрешающих” алгоритмов спектрального оценивания [7] и т.д. В условиях, когда  $\mathbf{C}$  является **КМ** общего вида, а вместо матрицы  $\mathbf{A}_C$  используется матрица (34) с распределением Уишарта (35), для отношения (56) справедлива формула

$$v = K^{-1} \cdot d, \quad (57a)$$

где  $d$  — случайная величина с плотностью [7, 10]

$$p_d(x) = [(K - M)!]^{-1} \cdot x^{K-M} \cdot \exp\{-x\} \quad (57b)$$

Эрланга с параметром формы  $K - M + 1$  и равным единице параметром масштаба [24].

Для отыскания плотности  $v$  (56) в рассматриваемых условиях воспользуемся для матрицы  $\mathbf{A}_C$  ее представлением (39). Тогда, учитывая свойства (13) матрицы  $\mathbf{T}$  (12), для  $\hat{S}$  получим

$$\hat{S} = (K \cdot \mathbf{z}^* \cdot \mathbf{B}_V^{-1} \cdot \mathbf{z})^{-1}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}, \quad (58)$$

где  $\mathbf{B}_V$  — действительная симметричная матрица (40) с плотностью (47).

Для практических задач адаптивной обработки в системах с центральной симметрией каналов приема основной интерес представляет случай, когда вектор  $\mathbf{x}$  удовлетворяет условию  $\mathbf{x} = \mathbf{\Pi}_M \cdot \mathbf{x}^*$ . При этом преобразованный вектор  $\mathbf{z} = (1 - j) \cdot \mathbf{x}_A / \sqrt{2}$ , а (58) преобразуется к виду:

$$\hat{S} = (K \cdot \mathbf{x}_A^T \cdot \mathbf{B}_V^{-1} \cdot \mathbf{x}_A)^{-1}, \quad \mathbf{x}_A = \mathbf{x}' - \mathbf{x}''.$$

Воспользовавшись далее методикой [7, 10], можно показать, что искомое значение  $v$  (56) в рассматриваемых условиях равно:

$$v = K^{-1} \cdot d_1,$$

где  $d_1$  — случайная величина с плотностью

$$p_{d_1}(\mathbf{x}) = (\Gamma(K - (M - 1) / 2))^{-1} \cdot \mathbf{x}^{K - (M + 1) / 2} \cdot \exp\{-\mathbf{x}\}.$$

В частности, при нечетных  $M = 2L - 1$ ,  $p_{d_1}(\mathbf{x})$  переходит в распределение Эрланга

$$p_{d_1}(\mathbf{x}) = ((K - L)!)^{-1} \cdot \mathbf{x}^{K - L} \cdot \exp\{-\mathbf{x}\}$$

с параметром формы  $K - L + 1$ , на  $L - 1$ , превосходящим соответствующий параметр распределения (57б).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной результат данной работы — распределения (31), (49), которые по аналогии с [6–8] могут быть названы **модифицированными распределениями Уишарта** случайных **персимметричных КМ** вида (21), (36) гауссовских процессов (полей). Их использование позволяет распространить большинство результатов многомерного статистического анализа [3, 23] и на класс таких матриц, имеющих многочисленные приложения, в частности, в задачах адаптивной пространственно-временной обработки сигналов в системах с центральной симметрией каналов приема [10, 17–22].

Автор глубоко признателен **П.М. Флексер** за многочисленные обсуждения, **Ю.И. Абрамовичу**, указавшему в [21] на неточности [17, 19], **В.М. Кошевому** и **В.В. Радионову**, чья статья [22] “подказала” возможное направление решения поставленной задачи.

## Литература

- [1] *Wishart I.* // *Biometrika* 20A (1928). — P. 32–52.
- [2] Уишарта распределение // *Мат. энциклопедия.* — М., 1985. — Т. 5. — С. 493.
- [3] *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ. — М.: Физматгиз, 1963, — 500 с.
- [4] *Крамер Г.* Математические методы статистики. — М.: Мир, 1976.
- [5] *де Гроот М.* Оптимальные статистические решения. — М.: Мир, 1974.
- [6] *Goodman N.R.* // *Ann. Math. Statist.* — 1963. — V.34. — P. 152–177.
- [7] *Capon I., Goodman N.R.* // *Proc. IEEE.*—1970. — V.AES-10. — № 6. — P. 853–863.
- [8] *Бриллинджер Д.* Временные ряды. Обработка данных и теория. — М., 1990.
- [9] *Reed I.S., Mallet I.D., Brennan L.E.* // *IEEE Trans. on Aerosp. and Electr. syst.* — 1974. — V. AES-10. — № 6. — P. 853–863.
- [10] *Brennan L.E., Reed I.S.* // *IEEE Trans on Aerosp. and Electr. System.*— 1982.— № 1.— V. AES-18.
- [11] *Ширман Я.Д., Манжос В.Н.* Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1981. — 416 с.
- [12] *Монзинго Р.А., Миллер Т.У.* Адаптивные антенные решетки. Введение в теорию / Пер. с англ.— М.: Радио и связь, 1986. — 448 с.

- [13] Стратонович Р. Л. Принципы адаптивного приема.— М.: Сов. радио, 1973.
- [14] Репин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем.— М.: Сов. радио, 1977.
- [15] Nitzberg R. // IEEE Trans. Aerosp and Electr Syst.— 1980.— AES-16.— № 1.
- [16] Лифанов Е.И., Лихарев В.А. // Радиотехника.— 1983.— № 5.— С. 53.
- [17] Зарицкий В.И., Кокин В.Н., Леховицкий Д.И., Саламатин В.В. // Радиофизика.— 1985.— Т. XXVIII.— № 7.— С. 863 (Изв. высш. учеб. заведений).
- [18] Аверочкин В.А., Баранов П.Е., Токолов В.С. // Изв. вузов. Радиоэлектроника.— 1987.— Т. 30.— № 4.— С. 78.
- [19] Кошевой В.М., Радионов В.В. // Радиотехника.— 1991.— №6.— С. 36.
- [20] Свердлик М. Б., Шпатаковский В.Э. // Радиотехника и электроника.— 1989.— Т. 34.— № 4.— С. 160.
- [21] Абрамович Ю.И., Горохов А.Ю. // Радиотехника и электроника.— 1993.— Т. 38.— № 1.— С. 101.
- [22] Кошевой В. М., Радионов В. В. // Радиотехника и электроника.— 1994.— №11.— С. 1779—1788.
- [23] Гирко В.Л. Многомерный статистический анализ.— К.: Выща шк., 1988.
- [24] Хастингс Н., Пикок Дж. Справочник по статистическим распределениям.— М.: Статистика, 1980.

Поступила в редколлегию 31.10.2011

**Леховицкий Давид Исаакович**, фото и сведения об авторе см. на с. 404.

УДК 621.391:519.2

**До теорії адаптивної обробки сигналів у системах із центральною симетрією каналів приймання** / Д.І. Леховицький // Прикладна радіоелектроніка: наук.-техн. журнал. — 2011. Том 10. № 4. — С. 429-436.

Уводиться сумісний розподіл елементів оцінки максимальної правдоподібності персиметричної кореляційної матриці багатомірного гаусівського процесу. Обговорюються деякі властивості отриманого розподілу і його зв'язок з відомим розподілом Уишарта. Приводяться приклади використання для рішення завдань адаптивної обробки сигналів у системах із центральною симетрією просторово-часових каналів приймання.

*Ключові слова:* центральна симетрія, персиметрія, кореляційна матриця, оцінка максимальної правдоподібності, щільність розподілу оцінки, розподіл Уишарта, якобіан перетворення.

Бібліогр.: 24 найм.

UDC 621.391:519.2

**On the theory of adaptive signal processing in systems with central symmetry of receiving channels** / D.I. Lekhovyt'skiy // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. 2011. Vol. 10. № 4. — P. 429-436.

The paper introduces the joint distribution of the elements of maximum likelihood estimate of a persymmetrical covariance matrix of the multivariate Gaussian process. Some properties of derived distribution and its connection with the known Wishart distribution are discussed. Examples of application for solving the problems of adaptive signal processing in systems with central symmetry of space-time receiving channels are demonstrated.

*Keywords:* central symmetry, persymmetry, covariance matrix, maximum likelihood estimate, probability density function of the estimate, Wishart distribution, Jacobian of transformation.

Ref: 24 items.