К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ПЛАСТИНКАХ С ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

И. В. Гончарюк

Харьков

В различных радиотехнических устройствах, электронных приборах и аппаратах, содержащих внутренние источники тепла, возникают температурные поля, которые влияют на их работу. Учет распределения температуры в этих технических объектах позволяет либо более рационально конструировать их, либо найти более эффективные режимы их работы.

В статье предлагается метод определения стационарного температурного поля, возникающего в пластине заданной формы с внутренними источниками тепла. Решение основано на применении R-функции [1, 2], что позволяет рассматривать пластины сложной геометрической формы.

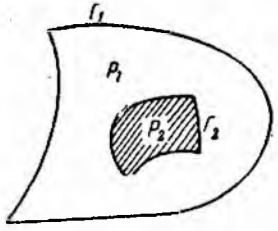


Рис. 1.

Рассмотрим пластину (рис. 1), в которой находится источник тепловой энергии, распределенный по области P_2 и имеющий мощность N. Предположим, что тепловая энергия рассеивается в окружающую среду не только кондукцией через границу области P_2, но и путем конвекции излучения с ее поверхности.

Пусть λ — коэффициент теплопроводности материала пластины, δ — ее толщина, α_1 и α_2 — коэффициенты теплоотдачи ее поверхностей, а U_c — температура окружающей среды.

Если функция $U = U_1 + U_c$ описывает стационарное поле пластины, то функция $U_1(x, y)$ должна внутри области P_1 удовлетворять дифференциальному уравнению

$$-\Delta U_1 + CU_1 = 0, \tag{1}$$

а внутри области P_2 — дифференциальному уравнению

$$-\Delta U_1 + CU_1 = \frac{N}{S\delta\lambda} \tag{2}$$

при граничном условии

$$\left.\frac{\partial U_1}{\partial n}\right|_{\Gamma_1} = 0, \tag{3}$$

где $C = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda\delta}$; S — площадь области P_2, n — нормаль к контуру Γ_1, направленная в сторону области P_1.

Решение будем искать в виде

$$U_1 = \Phi_0 + \omega_1\Phi_1, \tag{4}$$

где Φ_0 и Φ_1 пока произвольные функции, принадлежащие к классу C^2, а функция $\omega_1(x, y)$ также принадлежит к классу C^2 и обладает следующими свойствами: $\omega_1 > 0$ в области $P = P_1 \cup P_2$,

$$\omega_1\Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = 1. \tag{5}$$

Воспользуемся введенным в работе [2] дифференциальным оператором $D_1^{(1)}$, который имеет следующее свойство. Если в области P, ограниченной кусочно-гладким контуром Γ_1, функция $\omega(x, y)$ строго положительна, $\omega\Big|_{\Gamma_1} = 0$ и $\frac{\partial\omega}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = 1$, где n — нормаль к контуру Γ_1, направленная в сторону области P, а $f(x, y)$ дифференцируемая в этой области функция, то оператор $D_1^{(1)}$ определяется формулой

$$D_1^{(1)}f = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{6}$$

Так как на контуре Γ_1 $\frac{\partial\omega}{\partial x} = \cos\left(\hat{nx}\right)$, $\frac{\partial\omega}{\partial y} = \cos\left(\hat{ny}\right)$, то из (6)

$$D_1^{(1)}f\Big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial f}{\partial n}. \tag{7}$$

Другими словами, оператор $D_1^{(1)}$ отличается от обычного дифференциального оператора тем, что имеет смысл всюду в области P, а на ее границе переходит в нормальную производную функции $f(x, y)$.

Применим оператор $D_1^{(1)}$ к решению (4) и удовлетворим граничному условию (3)

$$D_1^{(1)}(\Phi_0 + \omega_1\Phi_1) = 0. \tag{8}$$

Отсюда

$$\Phi_1 = -D_1^{(1)}\Phi_0. \tag{9}$$

Подставляя найденное для Φ_1 выражение в (4), получим

$$U_1 = \Phi_0 - \omega_1 D_1^{(1)}\Phi_0. \tag{10}$$

Решение (10) удовлетворяет граничному условию (3) при любой функции $\Phi_0 \in C^2$

Выберем функцию Φ_0 в виде

$$\Phi_0 = \sum_{k=0}^{m} c_k\varphi_k, \tag{11}$$

где $\{\varphi_k\}_0^\infty$ некоторая полная в области P система функций, а c_k $(k = 0, 1, \ldots, m)$ — неопределенные коэффициенты.

С учетом (11) решение (10) можно переписать так:

$$U_1 = \sum_{k=0}^{m} c_k \psi_k, \tag{12}$$

причем последовательность

$$\psi_k = \varphi_k - \omega_1 D_1^{(1)} \varphi_k \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m) \tag{13}$$

представляет собой относительно полную в области P систему координатных функций. Выберем теперь коэффициенты c_k ($k = 0, 1, \ldots, m$) так, чтобы в некотором смысле наилучшим образом удовлетворить дифференциальным уравнениям (1) и (2). Для их отыскания примем вариационный метод Ритца. Функционал вариационной задачи, соответствующий рассмотренной краевой задаче, имеет вид

$$I(U_1) = \iint_{(P)} [(\operatorname{grad} U_1)^2 + CU_1 - 2\rho U_1]\, dP, \tag{14}$$

где

$$\rho = \begin{cases} \dfrac{N}{S\delta\lambda} & \text{если } (x,\ y) \in P_2, \\ 0 & \text{если } (x,\ y) \in P_1. \end{cases} \tag{15}$$

Константы c_k ($k = 0, 1, \ldots, m$) находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{m} c_k \alpha_{ks} + \beta_k = 0 \quad (s = 0,\ 1,\ \ldots,\ m). \tag{16}$$

Здесь

$$\alpha_{ks} = \iint_{(P)} \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x} \frac{\partial \psi_s}{\partial x} + \frac{\partial \psi_k}{\partial y} \frac{\partial \psi_s}{\partial y} + C\psi_k \psi_s \right) dxdy, \tag{17}$$

$$\beta_k = 2\rho \iint_{(P)} \psi_k dxdy \quad (k,\ s = 0,\ 1,\ \ldots,\ m). \tag{18}$$

В качестве примера, иллюстрирующего данный алгоритм, была решена задача для пластины прямоугольной формы с внутренним источником тепла прямоугольной формы (рис. 2) при следующих значениях параметров:

$a_1 = 12{,}5$ *см*, $b_1 = 12{,}5$ *см*, $a_2 = 4$ *см*, $b_2 = 5$ *см*,
$N = 50$ *вт*, $\alpha_1 = 0{,}99 \cdot 10^{-3}$ *вт/см²град*,
$\alpha_2 = 0{,}785 \cdot 10^{-3}$ *вт/см²град*, $\lambda = 1{,}7$ *вт/см град*,
$U_c = 20$ *град*.

В качестве полной системы функций была взята следующая система:

$$\{\varphi_k\}_0^\infty = \{x^k y^s\}_{k,\,s=0}^\infty \quad (k,\ s = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Приближенное решение задачи с учетом симметрии области P имеет вид

$$U(x, y) = 41{,}160 - 0{,}277\left(x - 2\omega_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x}\right) - 0{,}250\left(y - 2\omega_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial y}\right) + \\ + 0{,}84310^{-3}x^3\left(x - 4\omega_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x}\right) + 0{,}88110^{-3}xy\left[xy - 2\omega_1\left(y\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \right.\right. \\ \left.\left. + x\frac{\partial \omega_1}{\partial y}\right)\right] + 0{,}71710^{-3}y^3\left(y - 4\omega_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial y}\right), \qquad (19)$$

где

$$\omega_1 = f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2}, \qquad (20)$$

причем

$$f_1 = \frac{1}{2a_1}(a_1^2 - x^2),$$

$$f_2 = \frac{1}{2b_1}(b_1^2 - y^2). \qquad (21)$$

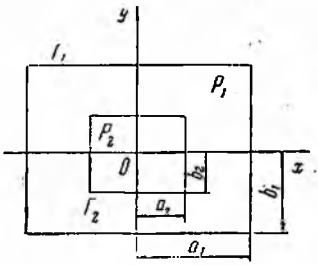


Рис. 2.

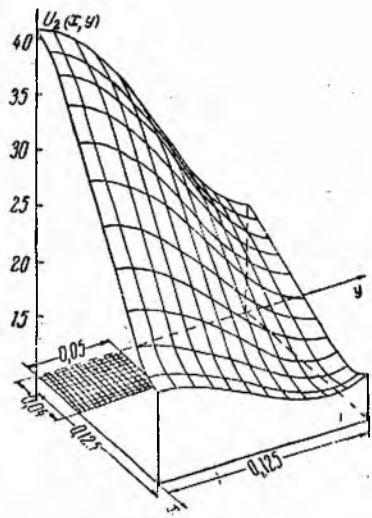


Рис. 3.

На рис. 3 показана поверхность распределения температуры по одной четвертой части пластины, отражающая физический смысл решенной задачи.

Применение R-функций позволяет применить указанный алгоритм для решения данного класса задач с помощью ЭЦВМ в случае, если области P_1 и P_2 имеют сложную геометрическую форму.

Время решения приведенного примера на ЭЦВМ «Урал-2» составило 6 минут.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Рвачев. Геометрические приложения алгебры логики. Изд-во «Техника», Киев, 1967.

2. В. Л. Рвачев. К вопросу о построении координатных последовательностей. «Дифференциальные уравнения», № 6, Минск, 1970.