УДК 621.396.2: 621.316.2

В. А. ТИХОНОВ, Н. В. КУДРЯВЦЕВА

ПРИСОЕДИНЕННЫЕ КОМБИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ – ОБОБЩЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ НЕГАУССОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Введение

Негауссовы процессы описываются одномерными и многомерными плотностями вероятности, либо спектрами высших порядков, либо моментными или кумулянтными функциями [1– 5]. Использование статистических характеристик высших порядков позволяет повысить эффективность методов их обработки [6, 7]. При решении ряда задач статистической радиотехники необходимо применять модели негауссовых процессов, параметры которых учитывают статистические характеристики высших порядков.

Значительный практический интерес представляют статистические модели линейного предсказания, используемые при анализе как гауссовых, так и негауссовых процессов. Классические модели линейного предсказания не учитывают статистические характеристики высших порядков негауссовых случайных процессов, так как их параметры рассчитываются по корреляционным функциям. Для описания негауссовых процессов используются обобщенные модели линейного предсказания высших рангов, параметры которых рассчитываются по моментным или кумулянтным функциям [8, 9]. Обобщенные модели линейного предсказания описываются набором независимых разностных уравнений, каждое из которых характеризует отдельно статистические связи разных порядков. В статье предложены новые обобщенные модели линейного предсказания негауссовых процессов. Уравнения, описывающие их, объединяют одновременно классические и обобщенные модели, учитывающие статистики высших порядков.

Цель статьи – разработка нового класса обобщенных моделей линейного предсказания, учитывающих статистические характеристики второго и высших порядков стационарных негауссовых процессов.

Классические модели линейного предсказания

Модель авторегрессии (АР) наиболее точно описывает случайные процессы, спектры которых содержат острые пики и не имеют глубоких впадин. Для моделирования случайных процессов, спектры которых содержат широкие пики и острые минимумы, используют модель скользящего среднего (СС). Таким образом, модель СС, как правило, применяется для описания слабокоррелированных процессов с широким спектром.

В основу модели АР положена корреляция отсчета случайного процесса в текущий момент времени с некоторым числом отсчетов в предыдущие моменты времени

$$x[t] = \sum_{i=1}^{p_2} \Phi_2[i]x[t-i] + a_2[t], \tag{1}$$

где $\Phi_2[i]$ – коэффициенты АР, найденные по статистикам второго порядка, $a_2[t]$ – ошибки предсказания, представляющие собой некоррелированные случайные отсчеты, p_2 – порядок модели АР. Для нахождения параметров модели используется условие оптимальности

$$E\{a_2[t]a_2[t-i]\} = 0,\ i > 0,\ \mathrm{E}\{a_2[t]x[t-i]\} = 0,\ i > 0.$$

Таким образом, полагается, что ошибки предсказания являются статистически независимыми, а точнее некоррелированными случайными отсчетами. Для нахождения параметров модели используется система линейных уравнений, получаемая из рекуррентного уравнения Юла-Уокера [10]:

$$R[j] - \sum_{i=1}^{p_2} F_2[i]R[j-i] = 0,\ j = 1,\ldots,p_2\ . \tag{2}$$

Уравнение СС имеет вид

$$x[t] = -\sum_{i=1}^{q_2} Q_2[i]a_2[t-i] + a_2[t],$$

где $Q_2[i]$ – коэффициенты СС, $a_2[t]$ – ошибки предсказания, q_2 – порядок модели СС. Для расчета коэффициентов СС используется система уравнений [10]:

$$R[j] = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{q_2} Q_2[i-j]Q_2[i] - Q_2[j]\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{q_2} Q_2^2[i]+1\right), j = 1,2,...,q_2, \\ 0, j > q_2. \end{cases} \qquad (3)$$

Представление ошибок предсказания обобщенными моделями предсказания

Классические модели линейного предсказания описывают негауссовы процессы в рамках корреляционной теории. Они являются частным случаем обобщенных моделей линейного предсказания, параметры которых находятся по моментным или кумулянтным функциям. В [8, 9] предложено описывать негауссовы процессы набором обобщенных моделей линейного предсказания различных рангов. Ранг модели равен порядку моментных и кумулянтных функций, по которым рассчитываются параметры модели. Применяемый ранее подход не позволяет построить обобщенную модель негауссовых процессов, которая бы описывалась единой моделью линейного предсказания, т.е. характеризовалась одним разностным уравнением. Предлагаемый класс моделей назван моделями линейного предсказания – обобщенного линейного предсказания (ЛП-ОЛП). В таких моделях последовательно учитываются статистические характеристики второго, а затем и высших порядков.

При построении модели ЛП-ОЛП сначала синтезируется классическая модель линейного предсказания, находятся ошибки предсказания, синтезируются обобщенные модели линейного предсказания ошибок предсказания. Для негауссова процесса некоррелированность ошибок предсказания классических моделей линейного предсказания не означает их статистической независимости [10]. Моментные функции выше второго порядка ошибок предсказания могут быть значимыми и описывать статистические связи высших порядков. Тогда для ошибок предсказания можно построить обобщенные модели авторегрессии (ОАР) или скользящего среднего (ОСС). В зависимости от характеристик спектров высших порядков ошибок предсказания существует несколько возможных комбинаций построения таких моделей. Для широкополосных ошибок предсказания рационально использовать модель ОСС, а для узкополосных ошибок предсказания – модель ОАР.

Модель ОАР третьего ранга ошибок предсказания с не равной нулю моментной функцией третьего порядка описывается разностным уравнением

$$a_2[t] = \sum_{i=1}^{p_3} \Phi_3^l[i]a_2[t-i] + a_3^l[t], \qquad (4)$$

где $\Phi_3^l[i]$ – коэффициенты ОАР третьего ранга, p_3 – порядок модели, $a_3^l[t]$ – ошибка предсказания модели ОАР ошибки предсказания $a_2[t]$. Индекс l в (4) означает, что обобщенные модели получены для моментной функции третьего порядка с фиксированным сдвигом l. Модель линейного предсказания 3-го ранга рассчитывается по моментным функциям 3-го порядка. Умножив правую и левую части (4) на $a_2[t-j]a_2[t-l]$ и усреднив, получим уравнение для расчета коэффициентов $\Phi_3^l[i]$

$$m_{3a_2}[j, j-l] = \sum_{i=1}^{p_3} \Phi_3^l[i] m_{3a_2}[j-i, j-l]. \qquad (5)$$

При выводе уравнения (5) учитывалась статистическая независимость третьего порядка ошибок предсказания $a'_3[t]$, являющаяся условием оптимальности обобщенной модели предсказания третьего ранга. Подобным образом находятся уравнения для расчета параметров $\Phi_s^{l,k,...,v}[i]$ произвольного ранга. Ниже для краткости записи индексы $l,k,...,v$ будут часто опускаться.

Если в уравнении (1) ошибку предсказания $a_2[t]$ представить ОАР моделью третьего ранга (4), а $a'_{3a}[t]$ представить ОАР моделью четвертого ранга и т. д., то получим уравнение вида

$$x[t] = \sum_{i=1}^{p_2} F_2[i]x[t-i] + \sum_{i=1}^{p_3} F_3[i]a_2[t-i] + ... + \sum_{i=1}^{p} F_r[i]a_{r-1}[t-i] + a_r[t]. \qquad (6)$$

Модель, описываемую уравнением (6), будем называть присоединенной моделью АР-ОАР. В зависимости от условий задачи процесс построения моделей может быть прерван на некотором ранге.

Если случайный процесс и ошибки предсказания являются негауссовыми широкополосными процессами, то рационально пользоваться моделью ОСС. Негауссова широполосная ошибка предсказания $a_2[t]$ с не равной нулю моментной функцией третьего порядка описывается как процесс ОСС третьего ранга разностным уравнением [9]

$$\alpha_2[\tau] = -\sum_{t=1}^{0_3} \Theta_3^\lambda[t]\alpha_3^\lambda[\tau-t] + \alpha_3^\lambda[\tau], \qquad (7)$$

где $Q_3^l[i]$ – коэффициенты, а q_3 – порядок модели ОСС, $a_3^l[t]$ – ошибки предсказания. Вывод уравнений для расчета коэффициентов $Q_3^l[i]$ аналогичен приведенному в [9]. Применяя подобную процедуру построения, синтезируем модели ошибок предсказания произвольного ранга.

Представив в уравнении (1) ошибку предсказания $a_2[t]$ моделью ОСС третьего ранга (4), а $a_{3a}^l[t]$ — ОСС моделью четвертого ранга и т. д., получим присоединенную модель СС-ОСС, описываемую уравнением вида

$$x[t] = -\sum_{i=1}^{q_2} Q_2[i]a_2[t-i] - \sum_{i=1}^{q_3} Q_3[i]a_3[t-i] - ... - \sum_{i=1}^{q_r} Q_r[i]a_r[t-i] + a_r[t].$$

В зависимости от спектральных характеристик негауссовых процессов и ошибок предсказания можно использовать и другие комбинации моделей ЛП-ОЛП. Например, возможны комбинации моделей, описываемые уравнениями:

$$x[t] = \sum_{i=1}^{p_2} F_2[i]x[t-i] - \sum_{i=1}^{q_3} Q_3[i]a_3[t-i] - ... - \sum_{i=1}^{q_r} Q_r[i]a_{r-1}[t-i] + a_r[t], \qquad (8)$$

$$\xi[\tau] = -\sum_{t=1}^{\theta} \Theta_2[t]\xi[\tau-t] + \sum_{t=1}^{\tau_3} \Phi_3[t]\alpha_2[\tau-t] + ... + \sum_{t=1}^{\tau} \Phi_p[t]\alpha_{p-1}[\tau-t] + \alpha_p[\tau]. \qquad (9)$$

Обобщенные модели типа (8) и (9) будем называть комбинированными присоединенными моделями линейного предсказания.

Для получения выражений для расчета параметров моделей необходимо использовать критерии оптимальности моделей. Они сводится к условию статистической независимости ошибок предсказания. Так, ошибки предсказания модели s-го ранга должны удовлетворять соотношению

$$E\{a_s^{l,k,...,v}[t]a_s^{l,k,...,v}[t-j]...a_s^{l,k,...,v}[t-v]\} = 0, \; j,k,...,v > 0. \qquad (10)$$

Ошибки предсказания модели s-го ранга получают в результате обеления ошибок предсказания модели $(s-1)$-го ранга с помощью линейного преобразования. В зависимости от условий задачи и статистических характеристик высших порядков негауссова процесса подбираются ранги моделей. Порядки модели ЛП-ОЛП определяются из условия выполнения критерия оптимальности модели.

Заключение

Ошибки предсказания моделей АР и СС негауссова процесса могут содержать статистические связи некоторых порядков. Поэтому у таких процессов моментные функции ошибок предсказания являются значимыми и содержат полезную информацию. Для этих ошибок предсказания можно построить обобщенные модели линейного предсказания. В статье предложены присоединенные комбинированные обобщенные модели линейного предсказания высших рангов стационарных негауссовых процессов. Рассмотрены различные варианты построения обобщенных моделей негауссовых процессов. Предложенные модели могут быть полезны для анализа и обработки негауссовых процессов при решении различных задач статистической радиотехники.

Список литературы: 1. *Бриллинджер Д.Р.* Временные ряды. Обработка данных и теория. М.: Мир. 1980. 536 с. 2. *Леонов В.П.* Некоторые применения старших семиинвариантов в теории стационарных случайных процессов. М.: Наука, 1964. 3. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. радио. 1978. 376 с. 4. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь. 1982. 624 с. 5. *Ширяев А.Н.* Некоторые вопросы спектральной теории старших моменто // Теория вероятности и ее применение. С. 293-313. 6. *Кунченко Ю.П.* Нелинейная оценка параметров негауссовских радиотехнических сигналов. К.: Выща шк.. 1987. 191 с. 7. *Шелухин О.И. Беляев И.В.* Негауссовские процессы. СПб.: Политехника. 1992. 312 с. 8. *Тихонов В.А.* Обобщенная модель авторегрессии негауссовых процессов // Радиотехника. 2003. №132. С. 78-82. 9. Тихонов В.А. Обобщенная модель скользящего среднего негауссовых процессов // Радиотехника. 2003. № 133. С. 208-211. 10. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов. Пер. с. англ. М.. Мир. 1974. Вып.1. 406 с.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 15.06.2008