

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет Автоматики і комп'ютеризованих технологій

(повна назва)

Кафедра Комп'ютерно-інтегрованих технологій, автоматизації та
робототехніки

(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)
Параметрична ідентифікації лінійаризації диференціальних рівнянь
математичних моделей роботизованого виробництва
(тема)

Виконав:

здобувач 2 року навчання,
групи КТРСм-23-1

Манякін А. А.

(прізвище, ініціали)

Спеціальність 174 Автоматизація,
комп'ютерно-інтегровані технології та
робототехніка

(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Комп'ютеризовані та
роботехнічні системи

Керівник проф. Ромашов Ю.В.

(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри

(підпис)

Невлюдов І.Ш.

(прізвище, ініціали)

2025 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет	Автоматики і комп'ютеризованих технологій
Кафедра	Комп'ютерно-інтегрованих технологій, автоматизації та робототехніки
Рівень вищої освіти	другий (магістерський)
Спеціальність	174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка
Тип програми	освітньо-професійна
Освітня програма	Комп'ютеризовані та роботехнічні системи (код і повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри Невлюдов І.Ш.

(підпис)

« _____ » _____ 2024 р.

ЗАВДАННЯ НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Манякіну Артему Андрійовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Параметрична ідентифікації лінеаризації диференціальних рівнянь математичних моделей роботизованого виробництвазатверджена наказом по університету від 25.11.2024 р. № 1239 Ст2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 16.01.2025 р.3. Вихідні дані до роботи Диференціальні рівняння, що описують динамікуоб'єкта; Критеріальна функція для ідентифікації; Алгоритми параметричної ідентифікації, зокрема метод найменших квадратів; MATLAB для реалізаціїалгоритмів та аналізу результатів; Результати вимірювань перехідних процесів та їх відповідність теоретичним моделям; Стандарти проектуваннясистем автоматизації; Вимоги до точності математичних моделей.4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі Вступ; Теоретичніаспекти задачі параметричної ідентифікації моделей авоматизованого виробництва; Методичні особливості застосування параметричної ідентифікаціїдля лінеаризації диференціальних рівнянь математичних моделейроботизованого виробництва; Моделювання застосування параметричноїідентифікації для лінеаризації диференціальних рівнянь математичних моделей роботизованого виробництва; Висновки.

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій (п.5 включається до завдання за рішенням випускової кафедри) Демонстраційний матеріал представлений у форматі презентації PowerPoint (*.ppt) – 12 с. формату А4

6. Консультанти розділів роботи (п.6 включається до завдання за наявності консультантів згідно з наказом, зазначеним у п.1)

Найменування розділу	Керівник (посада, прізвище, ім'я, по батькові)	Позначка консультанта про виконання розділу	
		підпис	дата

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Затвердження теми, ознайомлення з вихідними даними та літературою	01.12.2024	Виконано
2	Аналіз теоретичних аспектів та постановка задачі	10.12.2024	Виконано
3	Розробка методів параметричної ідентифікації	17.12.2024	Виконано
4	Моделювання та розрахунки	24.12.2024	Виконано
5	Аналіз отриманих результатів	29.12.2024	Виконано
6	Оформлення пояснювальної записки та підготовка презентації	12.01.2025	Виконано
7	Остаточне узгодження роботи з керівником	15.01.2025	Виконано
8	Подання роботи до екзаменаційної комісії	16.01.2025	

Дата видачі завдання 25.11.2024

Студент _____

(підпис)

Манякін А.А.

(прізвище, ініціали)

Керівник роботи _____

(підпис)

проф. Ромашов Ю.В.

(посада, прізвище, ініціали)

Я, Манякін Артем Андрійович, як студент ХНУРЕ, розумію і підтримую політику закладу із академічної доброчесності. Я не надавав і не одержував недозволену допомогу під час підготовки кваліфікаційної роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

"4" січня 2025 р.



Манякін А. А.

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 76 с., 22 рис., 2 дод., 39 джерел.

ПАРАМЕТРИЧНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ, ЛІНЕАРИЗАЦІЯ, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, АВТОМАТИЗАЦІЯ, РОБОТИЗОВАНІ ВИРОБНИЧІ СИСТЕМИ.

Мета роботи – розробка методів та алгоритмів параметричної ідентифікації для лінеаризації диференціальних рівнянь математичних моделей об'єктів роботизованого виробництва, а також їх застосування для підвищення ефективності автоматизації технічних об'єктів.

Об'єкт дослідження – динамічні математичні моделі об'єктів автоматизації, що описують їх поведінку у формі диференціальних рівнянь, імпульсних перехідних функцій та передавальних функцій.

Предмет дослідження – процес параметричної ідентифікації математичних моделей, спрямований на лінеаризацію їх диференціальних рівнянь за допомогою критеріальних функцій та алгоритмів моделювання.

Вході роботи була проведено огляд сучасних методів параметричної ідентифікації динамічних систем та їхнього використання в задачах автоматизації. Визначено нову критеріальну умову для параметричної ідентифікації, адаптовану до задач лінеаризації математичних моделей. Реалізовано алгоритми параметричної ідентифікації у програмному середовищі MATLAB, що дозволило провести симуляцію роботи розроблених методів. Проведено порівняння моделювальних та експериментальних даних, підтверджено ефективність розроблених методів для опису об'єктів автоматизації. Надано рекомендації щодо впровадження розроблених методів у системи автоматизації роботизованих виробництв.

В результаті виконання роботи було розроблено нові алгоритми

параметричної ідентифікації для лінеаризації математичних моделей. Отримано точні математичні моделі, що відповідають реальним об'єктам автоматизації. Продемонстровано ефективність застосування моделей для підвищення якості управління в роботизованих виробничих системах. Розроблені методи забезпечують підвищення точності і адаптивності систем автоматичного управління до змінних умов експлуатації.

Кваліфікаційна робота виконана згідно ДСТУ 300815 [1] та методичними вказівками [2].

ABSTRACT

Explanatory note: 76 p., 22 fig., 2 appendices, 39 sources.

PARAMETRIC IDENTIFICATION, LINEARIZATION, DIFFERENTIAL EQUATIONS, AUTOMATION, ROBOTIC PRODUCTION SYSTEMS.

The purpose of the qualification work is the development of parametric identification methods and algorithms for the linearization of differential equations of mathematical models of objects of robotic production, as well as their application to increase the efficiency of automation of technical objects. The subject of development is dynamic mathematical models of automation facilities that describe their behavior in the form of differential equations, impulse transition functions and transfer functions.

The subject of research is the process of parametric identification of mathematical models, directing the linearization of their differential equations using additional criterion functions and modeling algorithms.

The work includes a review of modern methods of parametric identification of dynamic systems and their use in automation tasks. A new criterion condition for parametric identification adapted to the tasks of linearization of mathematical models is determined. Parametric identification algorithms are implemented in the MATLAB software environment, which allows simulating the operation of the developed methods. A comparison of modeling and experimental data is carried out, the effectiveness of the developed methods for describing automation objects is confirmed. Recommendations are given for the implementation of the developed methods in automation systems for robotic production.

As a result of the work, new parametric identification algorithms for linearization of mathematical models were developed. Accurate mathematical models corresponding to real automation objects were obtained. The effectiveness of the use of models for improving the quality of control in robotic production

systems is demonstrated. The developed methods ensure increased accuracy and adaptability of automatic control systems to variable operating conditions.

The qualification work was carried out in accordance with DSTU 300815 [1] and methodological guidelines [2].

ЗМІСТ

Перелік скорочень.....	10
Вступ.....	11
1 Стан проблеми щодо параметричної ідентифікації моделей роботизованого виробництва.....	13
1.1 Сучасні аспекти та виклики роботизованого виробництва.....	13
1.2 Моделі об'єктів автоматизації.....	16
1.3 Задачі ідентифікації роботизованого виробництва.....	21
1.4 Висновок.....	25
2 Параметрична ідентифікації та лінеаризація диференціальних рівнянь математичних моделей роботизованого виробництва.....	26
2.1 Огляд основних методів параметричної ідентифікації динамічних керованих систем.....	26
2.2 Лінеаризація диференціальних рівнянь математичних моделей роботизованого виробництва.....	39
2.3 Висновок.....	44
3 Приклад застосування параметричної ідентифікації щодо лінеаризації диференціальних рівнянь математичних моделей роботизованого виробництва.....	45
3.1 Початкові дані.....	45
3.2 Опис процесу моделювання.....	52
3.3 Аналіз отриманих результатів.....	60
3.4 Охорона праці при розробці математичних моделей	66
3.5 Висновок.....	67
Висновок.....	68
Список використаних джерел.....	69
Додаток А Апробація результатів дослідження.....	74
Додаток Б Презентація.....	75

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

ІПФ – імпульсні перехідні функції;

САУ – система автоматичного управління.

ВСТУП

Актуальність. Проектування і створення широкого класу керованих технічних і технологічних об'єктів різного призначення в якості основних етапів передбачає етап ідентифікації їх математичних моделей. Останні при цьому використовуються для вирішення широкого кола завдань на основі даних «вхід-вихід». Зокрема, при проектуванні систем автоматичного управління (САУ) моделі об'єктів автоматизації використовуються для: дослідження стійкості проєктованих САУ; синтезу регуляторів систем управління; комп'ютерного моделювання спільного функціонування об'єкта управління і синтезованого регулятора; аналізу якості процесів управління. При створенні АСУ ТП на основі математичного опису об'єктів автоматизації, наприклад, розв'язуються задачі: розробки алгоритмічного і спеціального програмного забезпечення функціональних підсистем АСУ ТП; ідентифікації параметрів і змінних стану керованих об'єктів, недоступних для вимірювання і контролю; проведення обчислювальних експериментів з оцінки показників якості та ефективності проєктованих систем управління.

Кваліфікаційна робота присвячена проблемам параметричної ідентифікації математичних моделей об'єктів автоматизації.

Метою кваліфікаційної роботи є розробка методів та алгоритмів параметричної ідентифікації для лінеаризації диференціальних рівнянь математичних моделей об'єктів роботизованого виробництва, а також їх застосування для підвищення ефективності автоматизації технічних об'єктів.

Для досягнення поставленої мети потрібно виконати наступні завдання:

- провести аналіз поточного стану проблеми застосування параметричної ідентифікації об'єктів автоматизації виробництва;
- розглянути особливості застосування параметричної ідентифікації до лінеаризації диференціальних рівнянь математичних моделей об'єктів автоматизації;

- провести моделювання параметричної ідентифікації математичної моделі об'єкту автоматизації;

- описати результати виконання параметричної ідентифікації математичної моделі об'єкту автоматизації.

Методи дослідження. В роботі використані методи математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теорії автоматичного управління та електротехніки. Для дослідження ефективності розроблених методів і алгоритмів параметричної ідентифікації об'єктів автоматизації використані технології комп'ютерного моделювання.

Також, отримані результати роботи можна віднести до Цілі сталого розвитку 8 «Гідна праця та економічне зростання», а саме п. 8.2 «Досягнення більш високого рівня економічної продуктивності через диверсифікацію, технологічний прогрес та інновації».

1 СТАН ПРОБЛЕМИ ЩОДО ПАРАМЕТРИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ МОДЕЛЕЙ РОБОТИЗОВАНОГО ВИРОБНИЦТВА

1.1 Сучасні аспекти та виклики роботизованого виробництва

Роботизоване виробництво є провідним напрямом розвитку автоматизації у промисловості, яке забезпечує інтеграцію передових технологій в механічну обробку, складання продукції, контроль якості та інші виробничі процеси. Це поєднання механіки, електроніки, комп'ютерних наук і штучного інтелекту створює потужний інструмент для підвищення ефективності підприємств.

Основними перевагами роботизованого виробництва є:

- Гнучкість виробничих процесів. Роботи дозволяють швидко адаптуватися до змін ринкових умов, наприклад, до виробництва нових типів продукції без суттєвих змін обладнання.
- Висока точність. Використання сучасних сенсорів і алгоритмів управління забезпечує мінімальні похибки у виробництві, що критично важливо для високотехнологічних галузей.
- Збільшення продуктивності. Роботизовані системи можуть працювати цілодобово, не потребуючи перерв і знижуючи вплив людського фактора.

Роботизовані системи активно використовуються в багатьох галузях промисловості:

- Автомобільна промисловість: роботи виконують зварювальні, фарбувальні роботи, складальні операції, а також контроль якості на виробничих лініях.
- Авіаційна і космічна промисловість: автоматизовані системи застосовуються для високоточної обробки компонентів та виконання збірки складних конструкцій.

- Електроніка: роботизовані платформи забезпечують автоматизоване компонування, монтаж і тестування друкованих плат.
- Медицина: хірургічні роботи, автоматизовані лабораторні комплекси та системи доставки медикаментів значно підвищують точність і швидкість медичних процедур.
- Логістика та склади: роботи використовуються для сортування, переміщення і пакування товарів, що оптимізує логістичні процеси.

Ключовими складовими роботизованого виробництва є:

- Маніпулятори та виконавчі механізми. Вони забезпечують точне виконання механічних операцій.
- Сенсори та датчики. Ці пристрої дозволяють збирати дані про об'єкти, з якими працює робот, і адаптувати поведінку системи в режимі реального часу.
- Алгоритми штучного інтелекту. Вони забезпечують адаптивність і здатність навчатися, що дозволяє роботам працювати в динамічних умовах.
- Інтеграція з системами Інтернету речей (IoT). Це дозволяє підключати роботи до єдиної мережі, що спрощує управління та моніторинг виробничих процесів.

Розвиток роботизованого виробництва супроводжується низкою викликів:

- Складність інтеграції. Впровадження роботів у наявні виробничі лінії може бути витратним і потребує значних ресурсів. Для вирішення цієї проблеми створюються стандарти інтерфейсів та адаптивні програмні засоби.
- Енергозбереження. Роботи споживають значну кількість енергії, тому важливо впроваджувати енергоефективні технології, такі як використання регенеративних приводів.
- Навчання персоналу. Оскільки управління роботами потребує спеціальних навичок, компанії інвестують у навчальні програми для підвищення кваліфікації працівників.

Майбутнє роботизованого виробництва пов'язане з концепцією Індустрії 4.0, яка об'єднує фізичні та цифрові технології. Основними напрямками розвитку є:

- Створення автономних роботів, які можуть самостійно приймати рішення.
- Інтеграція штучного інтелекту для аналізу великих обсягів даних.
- Застосування доповненої реальності для взаємодії між роботами та людьми.

Ці тенденції сприяють зростанню продуктивності виробничих процесів, зменшенню витрат та впровадженню інновацій у різних галузях промисловості.

1.2 Моделі об'єктів автоматизації

Проектування систем автоматизації процесів управління технічними і технологічними об'єктами (рис. 1.1) в якості одного з основних етапів включає етап ідентифікації математичної моделі керованих об'єктів на основі фізичних законів або експериментальних даних.

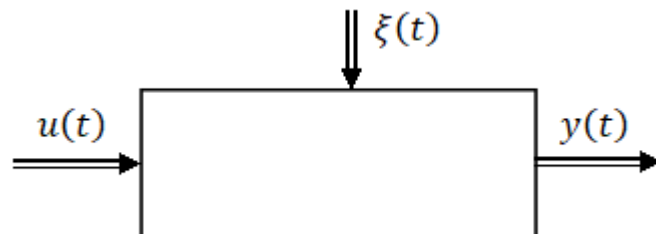


Рисунок 1.1 – Умовне зображення об'єкта управління

Для цієї мети використовуються наступні основні динамічні характеристики об'єктів:

- диференціальні та різницеві рівняння;
- імпульсні перехідні функції (ІПФ);
- передавальні функції.

Моделі об'єктів управління в просторі станів. Найбільш загальною моделлю динамічної керованої системи є векторне диференціальне рівняння в змінних стану:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), p, t], \quad x(t_0) = x^0, \quad t \in [t_0, t_k], \quad (1.1)$$

де $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ – n -вимірний вектор стану об'єкту;

$u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]^T$ – m -вимірний вектор керуючих впливів;

$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_r(t)]^T$ – r -вимірний вектор зовнішніх збурюючих впливів;

$f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ – n -вимірна вектор-функція, компоненти якої задовольняють умовам існування і єдиності відповідного завдання Коші;

$p = [p_1, p_2, \dots, p_\mu]$ – μ -вимірний вектор, складений з параметрів об'єкту;

t – неперервний час;

t_0, t_k – початковий і кінцевий моменти управління;

x^0 – початковий стан об'єкта.

Функціональний зв'язок між векторами виходу $y(t)$ і стану $x(t)$ об'єкта визначається співвідношенням [3]

$$y(t) = Cx(t) + v(t), \quad (1.2)$$

де C – $N \times n$ -вимірна дійсна матриця;

$u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)]^T$ – вектор, складений з перешкод $u_i(t)$ у каналах вимірювань керованих змінних $y_i(t)$.

Таким чином, передбачається, що перешкоди $u_i(t)$ не вимірюються, а спостерігається лише вектор виходу об'єкта $y(t)$.

У разі лінійного стаціонарного багатовимірного об'єкта векторне рівняння (1.1) має вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + M\xi(t), \\ x^0 &= x(t_0),\end{aligned}\tag{1.3}$$

де A, B, M – дійсні матриці відповідних розмірностей: $A = \{a_{ij}\}_{n \times n}$;

$$B = \{b_{iv}\}_{n \times m}, \quad M = \{m_{ie}\}_{n \times r}.$$

Сукупність елементів цих матриць складають вектор-параметр об'єкта $p = [p_1, p_2, \dots, p_\mu]$, який має розмірність $\mu = n \times n + n \times m + n \times r$.

Дискретні об'єкти (моделі) описуються різницевиими рівняннями, які, зокрема, можна отримати з (1.3) шляхом її дискретизації за часом в точках $t_k = k\Delta t$.

Моделі об'єктів управління у формі «вхід-вихід». Для математичного опису динаміки об'єктів у формі «вхід – вихід» широко використовуються диференціальні рівняння, передавальні та імпульсні перехідні функції [4, 5]. У випадку, коли об'єкт має один вихід (y_1) і два входи (u_l, ξ_1) його динамічні властивості визначаються диференціальним рівнянням:

$$\sum_{i=0}^n a_i y_1^{(n-i)}(t) = \sum_{v=0}^m b_v u_1^{(m-v)}(t) + \sum_{l=0}^r v_l \xi_1^{(r-l)}(t),\tag{1.4}$$

де $u_l(t)$ и $y_1(t)$ – вхідна і вихідна змінні моделі об'єкта відповідно;

$\xi_1(t)$ – зовнішнє збурення;

a_i, b_v, v_l – реальні параметри об'єкта, які утворюють n – вимірний вектор-параметр $p = [p_1, p_2, \dots, p_\mu] = [a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m, v_0, v_1, \dots, v_r]$, $\mu = n + m + r + 3$;

n, m, r – порядки диференціальних операторів лівої і правої частин рівняння (1.4). Передбачається, що $n > m$ і $n > r$.

Різницеве рівняння об'єкта управління у формі "вхід-вихід" можна отримати з (1.4) шляхом її дискретизації за часом в точках $t_k = k\Delta t$.

Передавальні функції динамічного об'єкта визначаються при нульових початкових умовах. Далі для наочності і без втрати спільності припустимо, що зовнішні обурення відсутні, тобто $x(t) = 0$, де 0 – нульовий вектор. Для об'єкта управління, описуваного векторним рівнянням (1.3), матриця передавальної функції об'єкта $W(s)$ визначає зображення $Y(s)$ вектора керованої змінної $y(t)$:

$$U(s) = W(s)U(s), \quad (1.5)$$

де $U(s) = L[y(t)]$, $U(s) = L[u(t)]$;

s – комплексна змінна;

L – оператор Лапласа.

При цьому $W(s)$ з урахуванням (1.2) визначається формулою [4, 5]:

$$W(s) = C[sE - A]^{-1} \times B = \begin{bmatrix} W_{11}(s), & W_{12}(s), & \dots & W_{1m}(s) \\ W_{21}(s), & W_{22}(s), & \dots & W_{2m}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N1}(s), & W_{N1}(s), & \dots & W_{Nm}(s) \end{bmatrix},$$

де передавальні функції $W_{in}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_n(s)}$, $i = \overline{1, N}$, $n = \overline{1, m}$.

У розглянутому випадку вектор-параметр об'єкта $p = [p_1, p_2, \dots, p_\mu]$ складається з елементів матриць A і B , де $\mu = n \times n + n \times m$.

При відсутності зовнішнього збурення ($x_1(t) = 0$) передавальна функція лінійної стаціонарної системи, описуваної рівнянням (1.4), представляється у вигляді наступного дробово-раціонального виразу:

$$W_1(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{\sum_{n=0}^m b_n s^n}{\sum_{n=0}^m a_n s^n}. \quad (1.6)$$

Тоді зображення $Y_1(s)$ виходу об'єкта має вигляд

$$Y_1(s) = W_1(s) \cdot U_1(s).$$

Як відомо [4, 5], імпульсна перехідна функція (ІПФ) одновимірного об'єкта визначається як його реакція на дію вхідного імпульсного сигналу при нульових початкових умовах.

Матриця ІПФ багатовимірного лінійного стаціонарного об'єкта управління визначається як зворотне перетворення Лапласа від матриці передавальних функцій $W(s)$:

$$W(s) = \begin{vmatrix} W_{11}(s), & W_{12}(s), & \dots & W_{1m}(s) \\ W_{21}(s), & W_{22}(s), & \dots & W_{2m}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N1}(s), & W_{N2}(s), & \dots & W_{Nm}(s) \end{vmatrix}.$$

При відомій матриці $w(t)$ вектор керованих змінних багатовимірного об'єкта $y(t)$ при нульових початкових умовах визначається інтегралом згортки [8]:

$$y(t) = \int_0^t w(t - t_0)u(t)dt. \quad (1.7)$$

Для одновимірного об'єкта його реакція $y_1(t)$ на вхідний сигнал $u_1(t)$ має вигляд:

$$y(t) = \int_0^t w_1(t - t_0)u_1(t)dt. \quad (1.8)$$

де скалярна ІПФ $w_1(t) = w_{11}(t)$.

У випадку, коли апріорна інформація про об'єкт мала, тобто коли об'єкт являє собою «чорний ящик», для цілей ідентифікації модель ІПФ доцільно представити в параметричному вигляді [7, 8]:

$$w_1(t) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t), \quad (1.9)$$

де c_i – невідомі дійсні параметри;

$\varphi_i(\alpha, t)$ – відомі по своїй структурі функції задані з точністю до вектор-параметра $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$.

В якості системи $\{\varphi_i\}$, зокрема, можна використовувати експоненціальні або ортогональні функції [11, 12, 13].

При цьому вектор-параметр $p = [p_1, p_2, \dots, p_\mu] = [c_1, c_2, \dots, c_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, де $\mu = 2n$. Перехідний процес $y_1(t)$ на виході об'єкта, що описується ІПФ виду (1.11), на одиничний вхідний вплив $u_1(t) = 1(t)$ визначається відношенням

$$y_1(t) = \sum_{i=1}^n c_i \int_0^t \varphi_i(p, \tau) d\tau. \quad (1.10)$$

1.3 Задачі ідентифікації роботизованого виробництва

Один з основних етапів проектування САУ полягає в ідентифікації керованої системи, тобто в побудові математичної моделі об'єкта за даними «вхід – вихід». При цьому можливі наступні випадки:

- фізичні процеси, що протікають в об'єкті управління, в достатній мірі відомі проектувальнику системи;
- через складність об'єкта апріорна інформація про закономірності його функціонування відсутня або є неповною.

У першому випадку для побудови моделі системи є можливість використання фізичних законів, що дає можливість визначити її структуру. Але значення ряду параметрів (коефіцієнтів) все ж можуть залишитися невідомими. У другому випадку практично неможливо застосування фізичних законів, а керований об'єкт розглядається як «чорний ящик» з невідомими структурою і параметрами. У зв'язку з цим з метою побудови якісної і адекватної моделі необхідно проведення експерименту над об'єктом.

У загальному випадку процес ідентифікації керованого об'єкта включає наступні основні етапи:

- проведення експерименту над об'єктом управління та отримання даних у формі «вхід – вихід»;
- вибір і формалізація критерію якості ідентифікації;
- вибір типу (класу) і структури моделі об'єкта;
- синтез (оцінка) параметрів моделі об'єкта за обраним критерієм;
- аналіз синтезованої моделі об'єкта;
- використання побудованої моделі для синтезу САУ.

З метою проведення експерименту для ідентифікації об'єкта використовуються група приладів Π_1 і Π_2 , які вимірюють і записують значення вхідного $u_1^*(t)$ і вихідного $y_1^*(t)$ сигналів в задані моменти часу. Спрощена схема отримання експериментальних даних про одновимірному об'єкті управління приведена на рис. 1.2

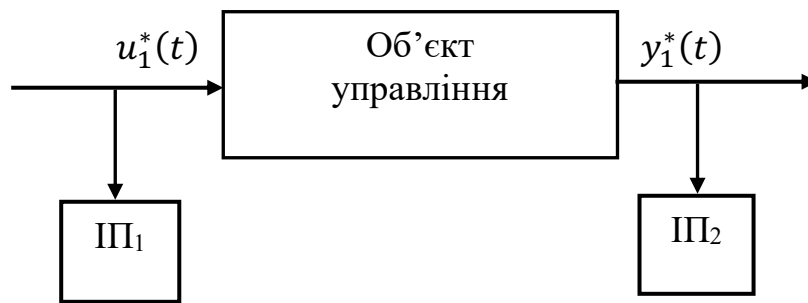


Рисунок 1.2 – Схема отримання даних про об'єкт

Як правило, експеримент проводиться в процесі функціонування об'єкта управління в активному або пасивному режимі. У першому випадку на вхід об'єкта подаються типові впливу (ступінчасті, гармонійні, імпульсні та ін.). Пасивний режим передбачає проведення експерименту в режимі нормального функціонування об'єкта.

Загалом, особливо коли об'єкт представлений як «чорна скринька», визначення структури моделі об'єкта є складною проблемою. В даний час в теорії ідентифікації систем не існує загального формалізованого методу вибору структури моделі. У той же час в її рамках найбільш розробленими є алгоритми параметричної ідентифікації [14, 15].

Далі передбачається, що структура моделі об'єкта відома. Зокрема, для передавальної функції (1.6) це означає, що апріорі задані порядки n і m поліномів її знаменника і чисельника. Тоді реакція моделі $y_1(t)$ на відомий (детермінований) вхідний сигнал $u_1(t)$ залежить від його вектор-параметра $p = [p_1, p_2, \dots, p_\mu]$, тобто $y_1(t) = y_1(p, t)$. Ввівши нев'язку

$$e_1(p, t) = y_1^*(t) - y_1(p, t), \quad t \in [t_0, t_k], \quad (1.11)$$

де $y_1^*(t)$ – реакція невідомого об'єкта на вхідний вплив $u_1^*(t)$, отримана в результаті експерименту (рис. 1.3).



Рисунок 1.3 – Схема формування помилки ідентифікації

Функція $e_1(p, t)$ визначає динамічну помилку ідентифікації об'єкта управління. Вона використовується для формування критеріальної (штрафної) функції $J(p)$, яка служить для оцінки якості ідентифікації, тобто ступеня адекватності моделі і реального об'єкта.

У більшості випадків, критеріальна функція $J(p)$ визначається як функціонал

$$J(p) = \int_{t_0}^{t_k} E_1(p, \tau) d\tau, \quad (1.12)$$

де $E_1(p, t) = E_1[e_1(p, t)]$ – невід'ємна функція, визначаюча міру помилки ідентифікації.

В якості функції $E_1(p, t)$ для багатовимірних об'єктів використовується евклідова норма вектора нев'язки (помилки ідентифікації), а для одновимірних систем квадратичні або модульні функції.

У статистичних задачах ідентифікації широке застосування отримала критеріальна функція

$$J(p) = M \left\{ \|e(p, t)\|^2 \right\}, \quad (1.13)$$

де M – символ математичного очікування.

Інший підхід до визначення штрафних функцій пов'язаний з використанням статистичних характеристик відхилення оцінки ідентифікованого вектор-параметра об'єкта $\hat{p} = [\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_\mu]$ від його справжнього значення $p^* = [p_1^*, p_2^*, \dots, p_\mu^*]$.

Очевидно, що чим менше значення функціоналу $J(p)$, тим вище якість ідентифікації моделі об'єкта.

Загальна постановка завдання параметричної ідентифікації об'єкта управління полягає в наступному. Передбачається, що задана наступна вихідна інформація:

- дані вимірювань входу $u_1^*(t)$ і виходу $y_1^*(t)$ об'єкта управління в інтервалі $[t_0, t_k]$;
- структура моделі керованого об'єкта;
- критеріальна функція $J(p)$ для ідентифікації об'єкта.

На основі цих даних потрібно визначити такий вектор-параметр $p = p^* = [p_1^*, p_2^*, \dots, p_\mu^*]$ моделі об'єкта управління, що забезпечує мінімум критеріальної функції $J(p)$, тобто

$$\min_{p \in R^\mu} J(p) = J(p^*), \quad (1.14)$$

де R^μ – μ -вимірний арифметичний простір.

1.4 Висновок

Проведено аналіз базових проблем та моделей динамічних систем управління. Розглянуто основні принципи формалізації задачі ідентифікації, які включають аналіз імпульсних перехідних функцій, передавальних функцій та їх роль у побудові математичних моделей. Виокремлено основні фактори, що впливають на точність ідентифікації, та методи їх урахування в задачах автоматизації. Це створило базу для розробки методів параметричної ідентифікації.

2 ПАРАМЕТРИЧНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТА ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ РОБОТИЗОВАНОГО ВИРОБНИЦТВА

2.1 Огляд основних методів параметричної ідентифікації динамічних керованих систем

Як відомо [4, 8, 16], проектування регуляторів САУ здійснюється на основі моделей керованих об'єктів. При цьому в якості математичного опису їх динаміки застосовуються: диференціальні і різницеві рівняння; передавальні і імпульсні перехідні функції. В рамках теорії управління та ідентифікації розроблено цілий ряд підходів і методів побудови моделей динамічних об'єктів, які можна класифікувати на наступні три групи:

- методи структурної ідентифікації;
- методи параметричної ідентифікації;
- методи непараметричної ідентифікації.

Необхідно відзначити, що структура моделі об'єкта визначається обраним класом динамічних характеристик. Наприклад, якщо Динаміка об'єкта описується векторним рівнянням (1.3), то структура його моделі визначається розмірністю (n) вектора стану $x(t)$. У разі використання для цієї мети передавальної функції (1.6) структура моделі визначається порядками поліномів знаменника (n) і чисельника (m). Як відомо [15, 17, 18], визначення структури моделі керованого об'єкта являє собою складну проблему і в даний час в теорії ідентифікації ще не існує формалізованих методів її вирішення [18, 19]. У той же час можна зазначити, що одним із можливих підходів до синтезу структури моделі об'єкта є використання принципу складності [20, 21] на основі формування відповідних шкал складності для можливих типів моделей динамічної системи.

Найбільш розробленими в теорії управління та ідентифікації є методи і алгоритми параметричної і непараметричної ідентифікації динамічних систем.

До групи параметричної ідентифікації відносяться методи, в яких в якості математичного опису об'єктів використовуються диференціальні, різницеві рівняння і передавальні функції, з точністю до невідомих параметрів p_1, p_2, \dots, p_μ . З цієї групи найбільше застосування отримали:

- метод найменших квадратів (МНК);
- градієнтні алгоритми;
- стохастична апроксимація;
- спектральні і частотні методи;
- метод максимальної правдоподібності і апостеріорної ймовірності [15].

Методи непараметричної ідентифікації, в основному, використовуються для побудови (оцінки) імпульсних перехідних функцій (ІПФ). З цієї групи в практиці автоматизації управління широке застосування знайшли:

- метод згортки;
- кореляційний метод.

Розглянута вище класифікація методів ідентифікації динамічних систем представлена на рис. 2.1.

Методи параметричної ідентифікації. Параметрична ідентифікація включає виконання наступних основних етапів:

- вибір типу (класу) і структури моделі об'єкта управління;
- вибір і формалізація критерію $J(p)$ близькості об'єкта і його моделі;
- оцінка вектор-параметра $p^* = [p_1^*, p_2^*, \dots, p_\mu^*]$ моделі, забезпечує мінімум обраного критерію ідентифікації:

Вибір критерію ідентифікації $J(p)$ здійснюється в залежності від обсягу інформації про зовнішні збурення $\xi(t)$ і перешкоди вимірювання $v(t)$.

Метод найменших квадратів, в основному, використовується в тих випадках, коли збурення не вимірюються (не контролюються). При цьому критеріальна (штрафна) функція $J(p)$ визначається евклідовою нормою, визначеною формулою:

$$J(p) = \int_{t_0}^{t_k} \|e(p, t)\|^2 d\tau, \quad (2.1)$$

де $e(p) = [e_1(p), e_2(p), \dots, e_n(p)]^T$ – вектор помилки ідентифікації: $e(p) = y(p, t) - y^*(t)$.

У разі, коли обрана модель об'єкта управління описується лінійним диференціальним або різницеvim рівнянням, штрафна функція $J(p)$ є квадратичною функцією від параметрів моделі p_1, p_2, \dots, p_μ . При цьому розв'язання екстремальної задачі призводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь щодо компонентів вектора p . Якщо його розмірність μ велика, то розв'язок отриманої системи рівнянь представляє певні труднощі, так як процедура звернення матриці системи є складним завданням. У зв'язку з цим розроблені рекурентні алгоритми методу найменших квадратів, які дають можливість послідовно визначити оцінки параметрів моделі об'єкта без операції обертання матриці системи. При цьому шукана оцінка вектора p є незміщеною і, якщо збурення $\xi(t)$ являють собою незалежні однаково розподілені випадкові величини [3].

У випадку, коли критерії $J(p)$ є нелінійною функцією від компонентів вектора p , отримана система алгебраїчних рівнянь, що визначають необхідні умови її екстремуму, також є нелінійною функцією. При цьому для вирішення задачі (2.1), тобто для ідентифікації об'єкта можна

використовувати градієнтні методи, які діляться на 2 групи: прямі і непрямі методи. У прямих методах штрафна функція $J(p)$ мінімізується на кожному кроці за ітераційною схемою:

$$p^{i+1} = p^i - K^i \frac{\partial J(p^i)}{\partial p^i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

де p^i – значення вектора p на i -ому кроці;

$$\frac{\partial J(p^i)}{\partial p^i} = \left. \frac{\partial J(p)}{\partial p} \right|_{p=p^i} - \text{вектор градієнт функції } J(p) \text{ в точці } p^i;$$

$K^i = \text{diag}[k_v^i]_{m \times m}$ – діагональна матриця, елементами якої є додатні числа k_v^i , обрані з умов забезпечення збіжності послідовності (2.2) і необхідної швидкості збіжності.

Таким чином, в градієнтних методах процедура ідентифікації об'єкта зводиться до формування послідовності (2.2), яка завершується, якщо виконується умова

$$\left\| \frac{\partial J(p^i)}{\partial p^i} \right\| \leq \varepsilon, \quad (2.3)$$

де ε – мале додатне число.

Знайдений при цьому вектор-параметр $p^* = [p_1^*, p_2^*, \dots, p_\mu^*]$, забезпечує локальний мінімум критерію $J(p)$. У загальному випадку штрафна функція $J(p)$ може мати кілька екстремумів, що ускладнює процедуру ідентифікації об'єкта управління.

Градієнтний метод, що реалізує обчислювальний алгоритм (2.2), відомий як класичний градієнтний метод першого порядку, який призводить до повільної збіжності в околиці точки екстремуму. Для того щоб забезпечити швидку збіжність ітераційного процесу використовується метод

найшвидшого спуску або градієнтний метод другого порядку, відомий як метод Ньютона. Для цієї мети більш ефективним може виявитися метод спряженого градієнта, що поєднує переваги методів першого і другого порядків. Недоліком цих алгоритмів є те, що при високих порядках моделей об'єктів реалізація їх обчислювальних процедур представляє певні труднощі. Проблема посилюється, якщо штрафна функція є багатоекстремальною і має яружну структуру. Для цих випадків розроблені спеціальні методи, зокрема метод ярів та алгоритм масивної точки.

Тут можна відзначити, що до класу градієнтних методів можна віднести і підхід до синтезу регуляторів САУ і параметричної ідентифікації об'єктів управління. Основу цього підходу складають критеріальні умови на штрафні функції $J(p)$, які дозволяють отримати рівняння адаптації (самоналаштування) параметрів синтезованого регулятора і моделі керованого об'єкта. Обчислювальні процедури розроблених алгоритмів дають можливість ідентифікувати динамічні системи, що описуються передавальними функціями, імпульсними перехідними функціями, лінійними диференціальними і різницевиими рівняннями.

З метою параметричної ідентифікації об'єктів управління крім прямих градієнтних методів, розглянутих вище, використовуються і непрямі методи, такі як методи квазілінеаризації, диференціальної та різницевої апроксимації.

При реалізації алгоритму квазілінеаризації нелінійні функції, що входять в рівняння динаміки об'єкта, лінеаризуються на кожному кроці ітерації, наприклад, за схемою Тейлора.

Метод квазілінеаризації дозволяє:

- здійснити оцінку параметрів нелінійних моделей стаціонарних, нестаціонарних і багатовимірних об'єктів, представлених у вигляді диференціальних і різницевих рівнянь з урахуванням збурюючих впливів;
- досить ефективно розв'язувати двоточкові крайові задачі, до яких зводяться деякі задачі параметричної ідентифікації систем.

Основними недоліками методу квазілінеаризації є:

- складність і трудомісткість обчислювальних процедур через застосування методів оптимального управління при динамічних обмеженнях;
- є труднощі, пов'язані із завданням початкового наближення, від якого багато в чому залежить збіжність ітераційного процесу.

Методи стохастичної апроксимації по суті є розвитком градієнтних алгоритмів в умовах невизначеності. Спочатку вони використовувалися для розв'язування рівнянь регресії і знаходження екстремумів функцій регресії. Надалі ідеї стохастичної апроксимації почали використовуватися для розв'язування задач параметричної ідентифікації об'єктів, що описуються системою диференціальних і різницевих рівнянь з урахуванням дій зовнішніх збурень $\xi(t)$ і перешкод вимірів $\nu(t)$. При цьому великі труднощі представляє вибір аналога матриці K^i , забезпечує збіжність ітераційної процедури. При ідентифікації динамічних систем на основі стохастичної апроксимації виникає необхідність застосування методів теорії оптимального управління, зокрема, принципу максимуму, що значно ускладнює процедуру пошуку шуканого вектор-параметра об'єкта $p^* = [p_1^*, p_2^*, \dots, p_\mu^*]$.

Непараметричні методи ідентифікації. Ця група методів призначена, в основному, для визначення моделі об'єкта управління у формі ПФ. Основними з них є:

- методи, засновані на розв'язанні рівнянь типу згортки;
- кореляційний метод.

Розглянемо основні ідеї цих методів на прикладі одновимірних об'єктів управління.

У методі згортки початковим співвідношенням для ідентифікації є, зокрема, рівняння згортки (1.3):

$$y_1(t) = \int_0^t u_1(t - \tau)w_1(\tau)d\tau. \quad (2.4)$$

На основі рівняння (2.4) і спостережень (вимірювань) вхідного $u_1^*(k)$ і вихідного $y_1^*(k)$ сигналів об'єкта в дискретні моменти $t_k = k \cdot \Delta t$, $k = \overline{0, N-1}$, формується система алгебраїчних рівнянь щодо значень ПФ.

Тут без втрати загальності прийнято, що $\Delta t=1$. При $u_1^*(0) \neq 0$ існує обернена матриця U^{-1} , тому шуканий вектор \bar{w} визначається в явній формі:

$$\bar{w} = U^{-1}\bar{y}^*. \quad (2.5)$$

Трикутна структура матриці U забезпечує простоту процедури ідентифікації об'єкта на основі методу згортки. При цьому використовуються дані спостережень «вхід – вихід», записані в процесі нормальної роботи об'єкта управління без використання спеціальних вхідних тестових сигналів. Метод згортки має ряд недоліків:

- при великих N знижується точність методу, так як зростають помилки округлення;
- наявність перешкод у вимірах унеможливорює використання алгоритму;
- у разі неперервного об'єкта в більшості випадків знайдені числові значення $w(k)$, $k = \overline{0, N-1}$, необхідно перетворити в зручну форму (наприклад, у вигляді безперервної функції від часу t або передавальної функції) для застосування відповідного методу синтезу САУ.

Підвищення ефективності методу можна досягти на основі використання швидкого перетворення Фур'є.

Кореляційний метод ідентифікації об'єкта управління є статичним і застосовується для визначення ПФ $w_1(t)$ у разі, коли на його вході діє випадковий сигнал $u_1(t)$, а вимірювання вихідної величини супроводжується з перешкодою $v_1(t)$.

Для визначення ІПФ $w_1(t)$ використовується рівняння Вінера – Хопфа:

$$R_{uy}(\tau) = \int_0^{\infty} R_u(\tau - \lambda)w_1(\lambda)d\lambda, \quad (2.6)$$

де $R_u(\tau)$ – кореляційна функція випадкового сигналу $u_1(t)$;

$R_{u,y}(\tau)$ – взаємна кореляційна функція сигналів $u_1(t)$ і $y_1(t)$.

Операція дискретизації функцій в точках $\tau_k = k\Delta\tau$, $k = 0, 1, \dots, N$, які входять в співвідношення (2.6), приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\bar{R}_{uy} = \bar{R}_u \bar{w}, \quad (2.7)$$

де \bar{R}_{uy} і \bar{w} – вектори: $\bar{R}_{uy} = [R_{uy}(0), R_{uy}(1), \dots, R_{uy}(N - 1)]^T$, $\bar{w} = [w(0), w(1), \dots, w(N - 1)]^T$;

\bar{R}_u – матриця, яка визначається відношення:

$$\bar{R}_u = \begin{bmatrix} R_u(0) & R_u(-1) & \dots & R_u(-N) \\ R_u(1) & R_u(0) & \dots & R_u[-(N - 1)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_u(N) & R_u(N - 1) & \dots & R_u(0) \end{bmatrix}.$$

При цьому без втрати загальності вважається, що $\Delta\tau=1$. Матриця \bar{R}_u є симетричною, так як функція $R_u(\tau)$ представляє собою парну функцію, тобто $R_u(\tau) = R_u(-\tau)$. В результаті при відомих кореляційних функціях $R_u(\tau)$ і $R_{uy}(\tau)$ шуканий вектор \bar{w} визначається по формулі

$$\bar{w} = \bar{R}_u^{-1} \bar{R}_{uy}, \quad (2.8)$$

де \bar{R}_u^{-1} – матриця обернена \bar{R}_u .

Порівняно з методом згортки, статистичний підхід до ідентифікації об'єктів має перевагу, що проявляється у значному збільшенні точності оцінки ПФ за рахунок усунення невимірюваних (неконтрольованих) перешкод. Крім цього кореляційний метод не вимагає наявності апріорної інформації про об'єкт управління, в той же час дозволяє визначити його ПФ незалежно від даних «Вхід – Вихід», що надходять в процесі нормальної експлуатації технологічного об'єкта. З іншого боку, розглянутий метод може бути використаний для ідентифікації лише лінійних динамічних систем, характеристики яких змінюються повільно. Його реалізація вимагає додаткові апаратні та програмні засоби, які необхідні для отримання відповідних кореляційних функцій.

Спектральні методи ідентифікації базуються на понятті спектральних характеристик об'єктів і їх сигналів, які визначаються набором коефіцієнтів Фур'є розглянутих процесів щодо використовуваної системи ортонормованих (базисних) функцій $\{\varphi_k(t)\}$. В якості останніх широке застосування отримали функції Лягера і Уолша. Використання спектральних методів дозволяє ідентифікувати параметри моделей об'єктів, представлених у вигляді диференціальних і різницевих рівнянь, передавальних і імпульсних перехідних функцій, заданих з точністю до невідомих параметрів. Реалізація процедури ідентифікації одновимірного об'єкта на основі розглянутого методу включає наступні основні етапи:

- вибір виду і структури моделі об'єкта;
- у разі опису об'єкта диференціальним рівнянням його перетворення в еквівалентне інтегральне рівняння. При ідентифікації ПФ немає необхідності такого перетворення, так як безпосередньо використовується рівняння типу згортки (1.10) або рівняння Вінера-Хопфа (2.3);
- спектральний розклад експериментально отриманих даних про вхідному $u_1(t)$ і вихідному $y_1(t)$ сигналах об'єкта управління відносно обраної системи базисних функцій $\{\varphi_k(t)\}$;

– спектральне представлення ядер інтегрального рівняння, отриманого на другому етапі;

– на основі отриманого на другому етапі формування системи алгебраїчних рівнянь щодо шуканої спектральної характеристики об'єкта. У разі ідентифікації ПФ ця система є лінійною, де матриця \bar{A} і вектор стовпчик \bar{B} є відомими, елементи яких залежать від елементів векторів c^u і c^y .

Розв'язок векторно-матричного рівняння і визначення шуканого вектор-параметра c^w ПФ. При цьому використовуються відомі чисельні методи, зокрема, можна використовувати метод найменших квадратів.

Спектральний підхід до задач ідентифікації динамічних систем є універсальним методом, так як дозволяє побудувати моделі широкого класу об'єктів управління, що належать лінійним і нелінійним, стаціонарним і нестаціонарним, одновимірним і багатовимірним, детермінованим і стохастичним системам.

Істотним недоліком розглянутого методу є досить великий обсяг обчислень, необхідних для реалізації його алгоритму, що пов'язано з необхідністю спектрального розкладання діючих в системі сигналів, їх статистичних характеристик і динамічних характеристик ідентифікованих об'єктів, а також для вирішення системи рівнянь виду (2.12) при високих порядках їх моделей. У зв'язку з цим для розрахунку спектральних характеристик складних систем і процесів використовуються алгоритми швидкого перетворення Фур'є (ШПФ).

Частотні методи ідентифікації орієнтовані на визначення параметрів передавальних функцій об'єктів управління. Як відомо [5, 8], частотна характеристика $W_1(j\omega)$ об'єкта безпосередньо визначається по його передавальній функції $W_1(S)$. Наприклад, якщо передавальна функція задається виразом (1.3), то відповідна частотна характеристика представляється у вигляді

$$\begin{aligned}
 W_1(jw) &= W_1(S)|_{S=jw} = \frac{\sum_{n=0}^m b_n S^n}{\sum_{n=0}^m a_n S^n} = \frac{r_1(w) + jh_1(w)}{z_1(w) + a_1(w)} = \\
 &= d_1(w) + jb_1(w) = A_1(w)j_1(w),
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Ідентифікуючий вектор-параметр p включає невідомі коефіцієнти поліномів чисельника і знаменника передавальної функції $W_1(S)$, тобто $p = [p_1, p_2, \dots, p_\mu] = [a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m]$, де його розмірність $\mu = n + m + 2$.

Частотні характеристики об'єкта $A_1(w)$, $\varphi_1(w)$, $d_1(w)$, $\beta_1(w)$ можна отримати експериментальним шляхом. Для цього на його вхід подається гармонійний сигнал $u_1(t) = 1 \cdot \sin wt$ з частотою w . При цьому на виході об'єкта встановлюється сигнал $y_1(t) = A_1(w) \sin[wt + \varphi_1(w)]$. Повторюючи цю процедуру \tilde{N} разів для різних значень частоти w_k , $k = \overline{1, \tilde{N}}$, можна отримати набір значень $A_1(w_k)$ і $\varphi_1(w_k)$, $k = \overline{1, \tilde{N}}$, шляхом їх вимірювання на виході об'єкта. Далі на основі цих даних визначаються значення для характеристик $d_1(w_k)$ і $\beta_1(w_k)$ використовуючи наступні співвідношення:

$$\begin{aligned}
 \eta_1(w_k) &= A_1(w_k) \cos \varphi_1(w_k), \\
 \beta_1(w_k) &= A_1(w_k) \sin \varphi_1(w_k), \quad k = \overline{1, \tilde{N}}.
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

Слід зазначити, що ці дані можна отримати без використання формул (2.10) як виходи фільтра Фур'є [3] подаючи на його вхід сигнал $y(t)$ (рис. 2.1).

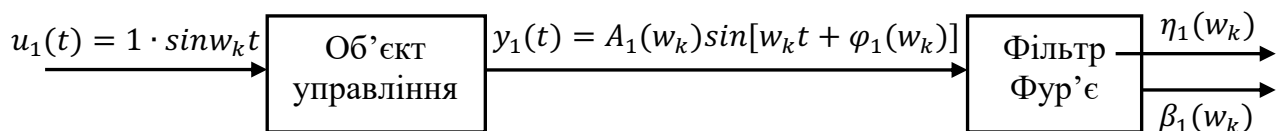


Рисунок 2.1 – Схема отримання характеристик $\eta_1(w_k)$ і $\beta_1(w_k)$

В результаті на основі співвідношення (2.10) для оцінки шуканого вектора-параметрів моделі об'єкта $p = [p_1, p_2, \dots, p_\mu]$ складається система з $2\tilde{N}$ лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} r_1(w_k) &= l_1(w_k)d_1(w_k) - m_1(w_k)\beta_1(w_k), \\ \eta_1(w_k) &= m_1(w_k)d_1(w_k) - l_1(w_k)\beta_1(w_k), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$k = \overline{1, \tilde{N}}.$$

Для розв'язання цієї системи використовуються відомі методи і алгоритми, наприклад, метод найменших квадратів.

Розглянутий частотний метод має ряд недоліків:

- експеримент для отримання даних по частотних характеристиках можливий тільки певного класу об'єктів, так як він пов'язаний з порушенням нормальної роботи об'єкта управління;
- запис частотних характеристик об'єкта вимагає додаткових апаратних і програмних засобів;
- підвищення точності ідентифікації параметрів передавальних функцій обумовлює збільшення обсягу і складності обчислювальних процедур методу, що пов'язано зі зростанням порядку системи рівнянь (2.11).

До групи параметричної ідентифікації об'єктів управління відносяться і методи, що використовують апіорну інформацію про статистичні характеристики сигналів і перешкод в каналах вимірювання. У разі, коли є апіорна інформація про щільність розподілу $r(y)$ вектора виходу об'єкту $y(t)$ в якості штрафної функції $J(p)$ використовується умовна щільність ймовірності $r(y/p)$ спостережуваного процесу $y(t)$ відносно вектор-параметра $p = [p_1, p_1, \dots, p_\mu]$.

Функція $J(p)$, називається функцією правдоподібності. Оцінка шуканого вектора-параметра $p = p^*$ визначається з умови максимуму $r(y/p)$.

Такий підхід до ідентифікації об'єктів називається методом максимальної правдоподібності. Для розв'язання екстремальної задачі використовуються відомі чисельні методи, зокрема, градієнтні методи.

Інший підхід, що стосується згаданої групи, відомий як метод максимуму задньої ймовірності, в якому передбачається, що апіорі відома щільність ймовірності $r(p)$ вектор-параметра p , а штрафна функція $J(p)$ визначається через умовну щільність ймовірності $r(p/y)$.

Оцінка вектор-параметра об'єкта $p = p^*$ знаходиться шляхом максимізації штрафної функції $J(p)$, визначається виразом. При цьому також використовуються відомі обчислювальні алгоритми.

На основі методів максимальної правдоподібності і максимуму апостеріорної ймовірності можна вирішувати задачі параметричної ідентифікації широкого класу лінійних, нелінійних, безперервних, дискретних і багатовимірних об'єктів управління при наявності випадкових збурюючих впливів. У той же час вони мають ряд недоліків:

- формалізований опис статистичних характеристик випадкових процесів вимагає значного обсягу робіт;
- побудова штрафної функції $J(p)$ представляє певні труднощі;
- реалізація алгоритмів методів пов'язана зі складними обчислювальними процедурами;
- точність отриманих оцінок параметрів моделей об'єктів погіршується при неправильному описі апіорних статистичних характеристик (математичних очікувань, коваріаційних матриць).

2.2 Лінеаризація диференціальних рівнянь математичних моделей роботизованого виробництва

Автоматизація технічних об'єктів і технологічних процесів передбачає попередню побудову їх математичних моделей. Зокрема, одним з основних етапів динамічного проектування систем автоматичного управління (САУ) є ідентифікація керованих об'єктів [9, 14, 15]. У зв'язку з цим в рамках сучасної теорії управління активно розвивається теорія ідентифікації динамічних систем [9, 14, 15, 41]. При цьому проблема синтезу конструктивних і менш трудомістких обчислювальних методів і алгоритмів побудови моделей об'єктів управління залишається актуальним завданням. Варто розглянути підхід до параметричної ідентифікації динамічних характеристик об'єктів [37-39] на основі критеріальної умови для цілей ідентифікації керованих систем. При цьому в якості основних динамічних характеристик об'єктів управління можна використовувати наступні:

- імпульсні перехідні функції (ІПФ);
- диференціальні та різницеві рівняння;
- передавальні функції.

Розглянемо одновимірну динамічну систему (об'єкт управління), на вході якої діє сигнал $u(t)$, а на виході протікає перехідний процес $y^*(t)$. Ідентифікацію параметрів об'єкта будемо здійснювати за схемою настроюється моделі, показаної на рис. 2.2.

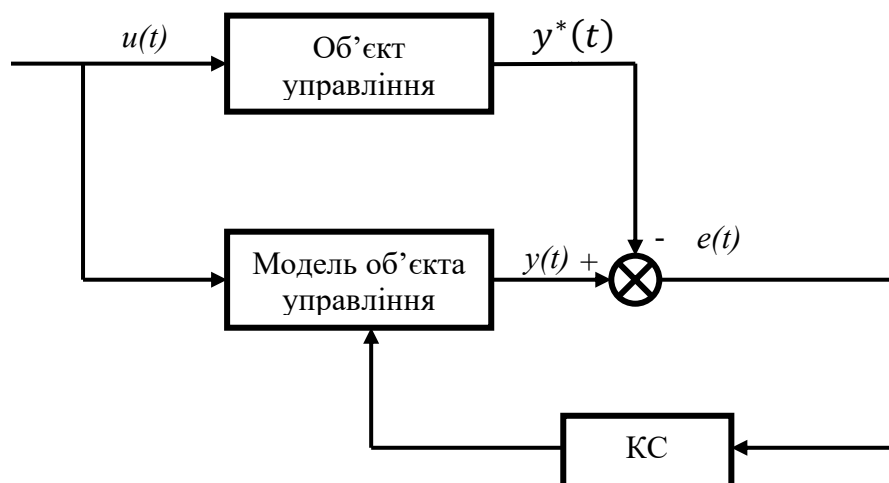


Рисунок 2.2 – Загальна схема ідентифікації об'єкта

Будемо вважати, що вихід об'єкта (перехідний процес) $y^*(t)$ є відомою функцією, яка визначається на основі експериментальних даних. При цьому ідентифікована динамічна характеристика (імпульсна перехідна функція, передавальна функція та ін.) об'єкта, тобто його ідентифікована модель представляється в параметричній формі, зокрема, у вигляді

$$y(t) = f[p, t] t \in [t_0, T], \quad (2.12)$$

де $p = [p_1, p_2, \dots, p_m]$ – m -вимірний вектор, складений із налаштовуваних параметрів моделі; t_0, T – початковий і кінцевий моменти процесу управління.

Помилка ідентифікації визначається виразом

$$e(t) = y(t) - y^*(t).$$

Попередньо, потрібно провести дискретизацію функцій $y(t)$ і $y^*(t)$ по часу:

$$\begin{aligned} y^k &= y(t_k) = y(k\Delta t), \\ y_k^* &= y^*(t_k) = y^*(k\Delta t), \quad k = \overline{0, N}, \end{aligned}$$

де $(N+1)$ – кількість дискретних точок.

Тоді помилки ідентифікації (нев'язки) в дискретних точках:

$$e_k(p) = y_k(p) - y_k^*, \quad k = \overline{0, N}.$$

Для оцінки якості ідентифікації на основі нев'язок $e_k(p)$ потрібно ввести наступну критеріальну (штрафну) функцію: $I(p) = F[e_k(p)]$, яка має властивість, що при $I(p) \rightarrow 0$ має місце і $e_k(p) \rightarrow 0$, де $k = \overline{0, N}$.

В якості критеріальних функцій $I(p)$, зокрема, можна використовувати квадратичні або модульні штрафні функції:

$$I = I(p) = \sum_{k=0}^N e_k^2, \quad (2.13)$$

$$I = I(p) = \sum_{k=0}^N |e_k|.$$

В процесі ідентифікації контур самоналаштування (КС) виконує дві основні функції:

- проводить формування критеріальної функції $I(p)$;
- проводить налаштування елементів вектор-параметра $p = [p_1, p_2, \dots, p_m]$ моделі об'єкта шляхом знаходження розв'язку екстремальної задачі виду:

$$\min_{p \in R^m} I(p) = I(p^*), \quad (2.14)$$

де $p^* = [p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*]$ – значення вектор – параметра p , який приймається в якості розв'язку задачі параметричної ідентифікації;

R^m – m -вимірний арифметичний простір.

Таким чином, задача ідентифікації моделі керованого об'єкта зводиться до визначення такого вектор-параметра p^* , який забезпечує мінімум штрафної функції $I(p^*)$. При цьому забезпечується близькість виходу моделі об'єкта $y(t)$ і виходу об'єкта y^* , тобто помилки ідентифікації e_k в дискретні моменти часу $t_k = k\Delta t$ прямує до нуля.

Для формулювання критеріальної умови для параметричної ідентифікації керованих систем варто розглянути наступну функцію:

$$J(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} I(\xi) \dot{I}(\xi) d\xi, \quad (2.15)$$

де τ, τ_0 – змінні, що характеризують процес ідентифікації.

Проінтегруємо праву частину виразу (2.15):

$$\int_{\tau_0}^{\tau} I(\xi) \dot{I}(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} \left[\frac{dI^2}{d\xi} \right] d\xi = \frac{1}{2} I^2(\tau) \Big|_{\tau_0}^{\tau} = 0,5 [I^2(\tau) - I^2(\tau_0)]. \quad (2.16)$$

Нехай $\tau_0 = \tau - \Delta\tau$, де $\Delta\tau$ – мале додатне число. Тоді із співвідношення (2.16) видно, що якщо для кожного τ_0 і $\tau > \tau_0$ виконується умова $J(\tau) < 0$, то модуль штрафної функції $|I(\tau)|$ спадають з плином часу τ , так як при цьому виконується нерівність:

$$I^2(\tau) < I^2(\tau - \Delta\tau). \quad (2.17)$$

В результаті можна сформулювати наступну теорему.

Теорема. Нехай початкове значення штрафної функції $I(\tau_0) \neq 0$ і для кожного τ_0 і $\tau > \tau_0$ при малому значенні $\Delta\tau = \tau - \tau_0$ виконується умова:

$$\int_{\tau_0}^{\tau} I(\lambda) \frac{dI}{d\lambda} d\lambda < 0. \quad (2.18)$$

Тоді штрафна функція $I(\tau) = I(p, \tau)$ спадає по часу τ і $\lim_{\tau \rightarrow \infty} I(p, \tau) = I(p^*)$.

Співвідношення (2.18) можна розглядати як критеріальну умову, виконання якої забезпечує мінімізацію штрафної функції $I(p, \tau)$. Контур самоналаштування (КС) виконує функцію підтримки критеріального співвідношення (2.18), забезпечуючи цілеспрямовану зміну елементів вектор-параметра $p = [p_1, p_2, \dots, p_m]$ моделі об'єкта в бажаному напрямку.

З метою використання критеріального співвідношення (2.18) для параметричної ідентифікації необхідно визначити похідну $dI/d\tau$ штрафної функції по часу τ :

$$\frac{dI}{d\tau} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial I}{\partial p_i} \dot{p}_i(\tau).$$

Далі шляхом підстановки в ліву частину співвідношення (2.18) виразу для похідної $dI/d\tau$ можна вивести систему диференціальних рівнянь, що визначає процес самоналаштування (адаптації) елементів вектор-параметра:

$$\dot{p}_i(\tau) = F_i(p, \tau), \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.19)$$

де $F_i(p, \tau)$ – функції, що визначаються із умови забезпечення критеріального співвідношення (2.18).

Знайдені розв'язки системи рівнянь (2.19) і визначають оцінку елементів шуканого вектор-параметра p^* .

У практичних розрахунках в якості розв'язку задачі параметричної ідентифікації можна взяти і вектор-параметр $p = \hat{p}$, що забезпечує виконання наступної умови $I(p^*) \leq \Delta_1$.

Отримані результати дозволяють сформулювати загальний алгоритм параметричної ідентифікації моделей керованих систем на основі критеріальної умови (2.18). Основні етапи цього алгоритму полягають в наступному:

- отримання експериментальних даних у формі "вхід-вихід" для ідентифікованого об'єкта управління;
- вибір структури і вектор-параметра $p = [p_1, p_2, \dots, p_m]$ моделі об'єкта;
- побудова штрафної функції $I(p)$;
- формування рівнянь адаптації (2.19) компонентів вектор-параметра $p = [p_1, p_2, \dots, p_m]$;
- розв'язок рівнянь самоналаштування (2.19) параметрів моделі об'єкта управління;
- визначення шуканої оцінки вектор-параметра де $p^* = [p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*]$ як розв'язок рівнянь самоналаштування (2.19) або вектор – параметра $\hat{p} = [\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_m]$.

2.3 Висновок

Сформулювати загальний алгоритм параметричної ідентифікації для лінеаризації диференціальних рівнянь. Проведено детальний аналіз алгоритмів найменших квадратів та градієнтних методів, що забезпечують ефективну мінімізацію штрафних функцій. Описано вплив вибору параметрів ідентифікації на якість моделі, а також обґрунтовано застосування цих підходів у реальних системах. Сформульований алгоритм підтверджує свою адаптивність до різних типів об'єктів автоматизації.

З ПРИКЛАД ЗАСТОСУВАННЯ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЩОДО ЛІНЕАРИЗАЦІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ РОБОТИЗОВАНОГО ВИРОБНИЦТВА

3.1 Початкові дані

Нехай, в дискретні моменти часу t_k з кроком Δt отримані експериментальні дані реакції виходу об'єкта $y(t)$ на вхідний ступінчатий вплив $u(t)=1(t)$:

$$y_k^* = y^*(t_k) = y^*(k\Delta t), \quad k = \overline{0, N}, \quad (3.1)$$

де $(N+1)$ – кількість дискретних точок.

Задача полягає у визначенні динамічної характеристики об'єкта, яка задана у вигляді перехідного процесу $y(t)$ на основі дискретних даних (3.1). Для цілей ідентифікації невідому (налаштовувану) модель об'єкта представимо в наступній параметричній формі:

$$y(t) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t), \quad (3.2)$$

де $c_0 = y_N^*$ – встановлене значення керованої змінної $y(t)$;

$\varphi_i(t)$ – параметричні функції: $\varphi_i(t) = e^{\alpha_i t}$, $i = \overline{1, n}$, c_i , α_i – невідомі параметри моделі, які складають $m = 2n$ -мірний вектор – параметр $p = [p_1, p_2, \dots, p_m] = [c_1, c_2, \dots, c_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$;

n – порядок моделі (кількість функцій $\varphi_i(t)$).

Проведемо дискретизацію функції $y(t)$:

$$y_k = y(k\Delta t) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(k\Delta t), \quad k = \overline{0, N}, \quad (3.3)$$

де $\varphi_i(k) = e^{\alpha_i k \Delta t}$.

Вводимо $(N+1)$ -мірні вектори:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= [y_0, y_1, \dots, y_N]^T, \\ \bar{y}^* &= [y_0^*, y_1^*, \dots, y_N^*]^T \end{aligned}$$

де T – знак транспонування.

У кожен момент часу $t = t_k$ помилки ідентифікації (нев'язки) визначаються виразами, тоді вектор помилки ідентифікації:

$$e = \bar{y} - \bar{y}^* = [e_0, e_1, \dots, e_N]^T. \quad (3.4)$$

Міру близькості процесів \bar{y} і \bar{y}^* можна оцінити на основі критеріальної (штрафної) функції або деякою нормою вектора e .

Проблема ідентифікації об'єкта полягає у визначенні такого вектор-параметра $p = p^* = [c_1^*, c_2^*, \dots, c_n^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*]$, який забезпечує мінімум штрафної функції $I = I(p)$.

Далі будемо вважати, що процес ідентифікації протікає в часі $t(t = \tau)$. В процесі пошуку екстремуму функції $I(p)$, вектор-параметр p змінюється в часі ($p = p(t)$), відповідно, варіюється і значення функції $I(p)$, тобто $I = I(t) = I[p(t)]$.

Тепер розглянемо застосування теореми, яка була сформована раніше для розв'язання екстремальної задачі (3.3), що еквівалентно знаходженню шуканого вектор-параметра p^* моделі об'єкта. Для цього спочатку необхідно вибрати відповідну критеріальну функцію $I = I(t) = I[p(t)]$. Далі для визначеності штрафна функція задається у вигляді (2.13):

$$I = I(p) = \sum_{k=0}^N e_k^2.$$

Спочатку, з метою використання критеріального співвідношення (2.15), визначимо похідні компонентів вектора нев'язки $e = [e_0, e_1, \dots, e_N]^T$, де з урахуванням частинних похідних маємо, що похідна обраної штрафної функції з урахуванням критеріальна функція $J(t)$, має вигляд:

$$J(t) = \sum_{i=1}^n \int_0^t I(\lambda) [\beta_i(\lambda) \dot{c}_i(\lambda) + s_i(\lambda) \dot{\alpha}_i(\lambda)] d\lambda, \quad (3.5)$$

де $t_0 = 0$.

Тепер вимагатимемо, щоб динаміка компонентів вектор-параметра $p = [c_1, c_2, \dots, c_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ підпорядковувалась наступним співвідношенням:

$$\begin{aligned} \dot{c}_i(t) &= \gamma_i \beta_i I(t), \\ \dot{\alpha}_i(t) &= \xi_i s_i I(t), \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

де γ_i, ξ_i – невідомі дійсні параметри.

Отриманий результат дозволяє сформулювати наступне твердження.

Твердження 1. Нехай задані дані по виходу об'єкта у вигляді ряду (3.1), структура його моделі в формі (3.2) і штрафна функція $I(p)$ по формуле (3.5). Тоді рівняння самоналаштування (адаптації) елементів вектор-параметра $p = [c_1, c_2, \dots, c_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ моделі (3.2) визначаються співвідношеннями (2.15), а встановивші їх розв'язки $[c_1^*, c_2^*, \dots, c_n^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*] = p^*$ є оцінкою параметрів моделі (3.2).

При цьому алгоритм параметричної ідентифікації об'єкта включає наступні основні етапи.

- проведення експерименту і отримання даних по перехідному процесу на виході об'єкта у вигляді вектора $\bar{y}^* = [y_0^*, y_1^*, \dots, y_N^*]^T$;
- задання структури моделі об'єкта у формі (3.2);
- визначення виразів для нев'язок e_k по формулі (3.4);
- складання виразів для функцій $\beta_i(t)$ и $s_i(t)$;
- формування рівнянь самоналаштування елементів вектор-параметра $p = [c_1, c_2, \dots, c_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$;
- розв'язок рівнянь самоналаштування і визначення вектор-параметра $p^* = [c_1^*, c_2^*, \dots, c_n^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*]$, елементи якого є оцінкою параметрів моделі об'єкта (2.13).

При цьому в якості функцій $\varphi_i(t)$ можна обрати і ортогональні поліноми, зокрема, функції Лаггера [10].

Розглянемо одновимірний об'єкт, для якого з дискретним кроком $\Delta t = 0,75\text{с}$ отримані експериментальні дані перехідного процесу $y(t)$ при $N=6$ (табл. 3.1).

Таблиця 3.1 – Експериментальні дані перехідного процесу $y(t)$

k	0	1	2	3	4	5	7
$k\Delta t$, сек	0	0,75	1,5	2,25	3,0	3,75	4,5
$y_k^*(k)$	0	0,75	1,03	1,15	1,2	1,23	1,24

Неперервна модель невідомого об'єкта представляється у формі:

$$y(t) = c_0 + c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t), \quad (3.7)$$

де $n=2$;

$$c_0 = 1.25;$$

$$\varphi_i(t) = e^{\alpha_i t};$$

$$i = 1, 2.$$

При цьому вектор-параметр обраної моделі $p = [p_1, p_2, p_3, p_4] = [c_1, c_2, \alpha_1, \alpha_2]$. Задача ідентифікації полягає в знаходженні вектора p , який забезпечує мінімальне значення штрафної функції $I(p)$. Рівняння контура самоналаштування (КС) параметрів моделі мають вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1(\tau) &= g_1 b_1 I(\tau), \\ \dot{\alpha}_2(\tau) &= g_2 b_2 I(\tau), \\ \dot{c}_1(\tau) &= x_1 s_1 I(\tau), \\ \dot{c}_2(\tau) &= x_2 s_2 I(\tau),\end{aligned}\tag{3.8}$$

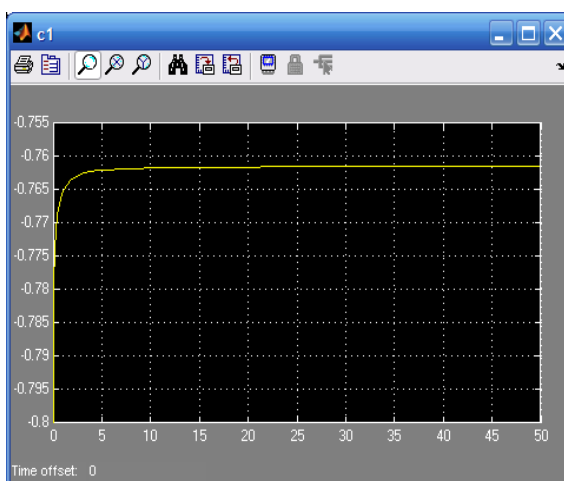
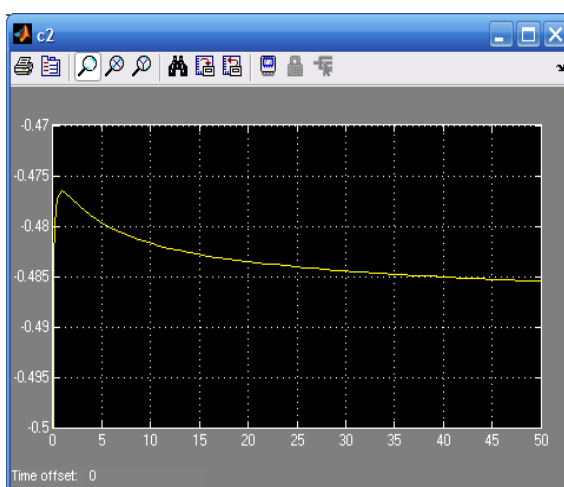
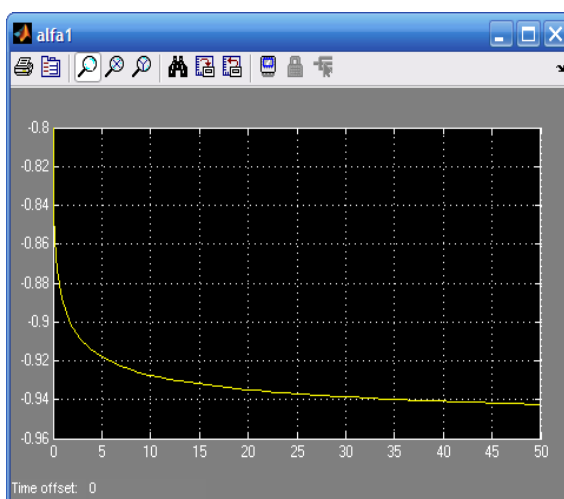
де

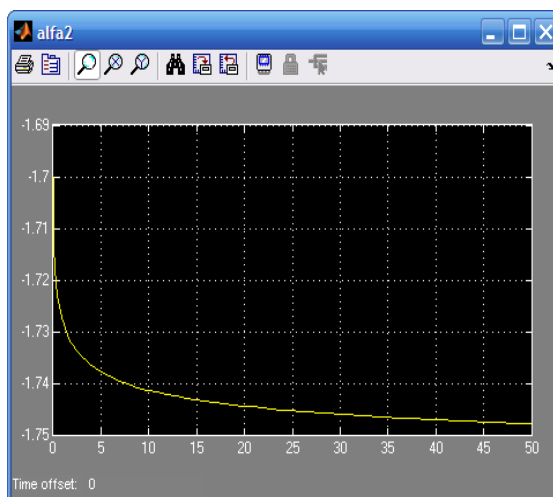
$$\begin{aligned}b_i(\tau) &= 2 \sum_{k=0}^6 e_k(\tau) j_i(k), \\ s_i(\tau) &= 2 \sum_{k=0}^6 e_k(\tau) \eta_i(k), \quad i = \overline{1, 2}, \\ j_i(k) &= e^{\alpha_i k \Delta \tau}, \quad \eta_i(k) = k \Delta \tau c_i j_i(k).\end{aligned}\tag{3.9}$$

Для вирішення системи (3.9) використано програмний комплекс Matlab, при наступних значеннях параметрів:

$$\gamma_1 = -150, \quad \gamma_2 = -200, \quad \xi_1 = -500, \quad \xi_2 = -800.$$

Динаміка самоналаштування компонентів вектора $p = [c_1, c_2, \alpha_1, \alpha_2]$ в процесі ідентифікації показана на рис. 3.1-3.4.

Рисунок 3.1 – Динаміка параметра c_1 Рисунок 3.2 – Динаміка параметра c_2 Рисунок 3.3 – Динаміка параметра a_1

Рисунок 3.4 – Динаміка параметра a_2

Як видно із графіків розв’язки системи (3.8):

$$c_1^* = -0,762, \quad c_2^* = -0,487,$$

$$\alpha_1^* = -0,949, \quad \alpha_2^* = -1,748$$

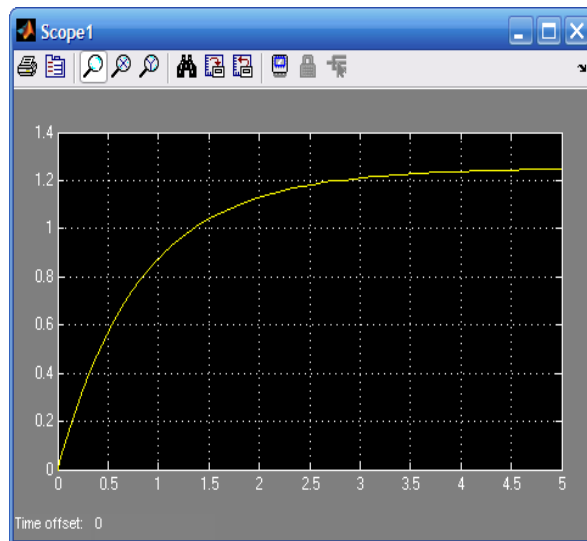
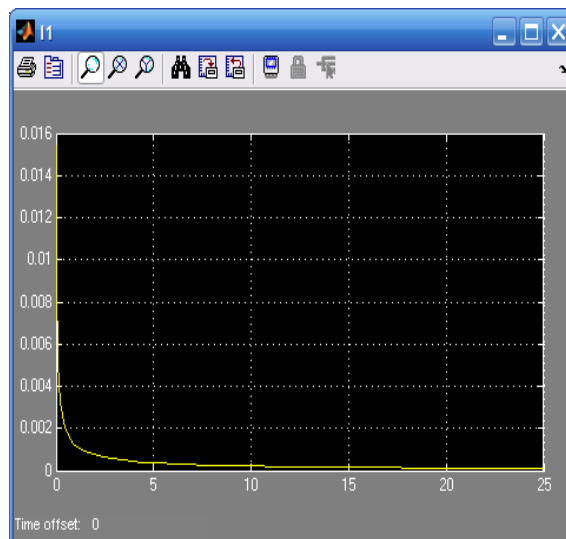
складають шуканий вектор–параметр $p^* = [c_1^*, c_2^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*] = [-0,762, -0,487, -0,949, -1,748]$.

Для оцінки якості ідентифікації в табл. 3.2 приведені початкові експериментальні дані із табл. 3.1 і результати, отримані в кінці процедури побудови моделі об’єкта.

Таблиця 3.2 – Дані, отримані в результаті побудови моделі об’єкта

k	0	1	2	3	4	5	6
$k\Delta t$, сек	0	0,75	1,5	2,25	3,0	3,75	4,5
y_k^*	0	0,75	1,03	1,15	1,2	1,23	1,24
y_k	0	0,745	1,032	1,151	1,202	1,227	1,239
e_k	0	-0,005	0,002	0,001	0,002	-0,003	-0,001

Перехідний процес $y(t)$ на виході об’єкта і динаміка штрафної функції показані відповідно на рис. 3.5 і 3.6.

Рисунок 3.5 – Перехідний процес $y(t)$ Рисунок 3.6 – Динаміка штрафної функції E

3.2 Опис процесу моделювання

Розглядається одновимірний стаціонарний об'єкт, на вході якого діє одиничний ступеневий вхідний вплив $u(t) = 1(t)$. При цьому в дискретні моменти часу $t_k = k\Delta t$ на його виході отримані значення перехідного процесу $y^*(t)$:

$$y^*(t_k) = y_k^*, \quad k = \overline{0, N}, \quad (3.10)$$

де Δt – крок дискретизації;

$(N + 1)$ – кількість дискретних точок.

Задача полягає в тому, щоб за даними спостереження (3.10) визначити імпульсну перехідну функцію (ІПФ) об'єкта. Як відомо, для лінійної стаціонарної системи функціональний зв'язок між її вихідною змінною і вхідним впливом при нульових початкових умовах.

Нехай перехідний процес представлений у наступній параметричній формі:

$$y(t) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(t), \quad (3.11)$$

c_i – невідомі поки параметри, які складають $m=n$ -мірний вектор-параметрів $c = [c_1, c_2, \dots, c_n]$. Далі будемо вважати, що вектор налаштовуваних параметрів $p = c$, а встановлене значення перехідного процесу $c_0 = y^*(N\Delta t)$, де $c_0 = const$.

У випадку, коли вхідний сигнал є ступінчатим ($u(t) = 1(t)$), а перехідний процес $y(t)$ задається у формі (3.11), ІПФ об'єкта після дискретизації функції $y(t)$ визначається в явному вигляді:

$$y_k = y(k\Delta t) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(k\Delta t), \quad k = \overline{0, N}, \quad (3.12)$$

де $\varphi_i(k) = e^{-ik\Delta t}$.

В кожен момент часу $t = t_k$ між відповідними значеннями рядів (3.10) і (3.12) існують нев'язки (помилки ідентифікації).

Для оцінки якості ідентифікації будемо використовувати наступну штрафну функцію, яка визначається формулою (2.13):

$$I = I(c) = \sum_{k=0}^N e_k^2,$$

яка визначає сумарну квадратичну помилку.

Тепер проблема ідентифікації об'єкта полягає у визначенні такого вектор-параметра $c = c^* = [c_1^*, c_2^*, \dots, c_n^*]$, який забезпечує мінімальне значення штрафної функції $I = I(c)$.

Далі будемо вважати, що процес ідентифікації протікає в часі $t (t = \tau)$. В процесі пошуку екстремуму функції $I(c)$, вектор-параметр c змінюється в часі ($c = c(t)$). Відповідно до цього алгоритму розв'язок задачі зводиться до розв'язання наступної системи рівнянь:

$$\dot{c}_i(t) = \gamma_i \beta_i(t) I(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.13)$$

де γ_i – від'ємні числа;

$\beta_i(t)$ – функції, що визначаються формулою:

$$\beta_i(t) = 2 \sum_{k=0}^N e_k(t) \varphi_i(k). \quad (3.14)$$

При цьому встановлені розв'язки c_i^* ($i = \overline{1, n}$) системи рівнянь (3.14):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_i(t) = c_i^*, \quad i = \overline{1, n},$$

є шуканими елементами вектор – параметра c^* , тобто $c^* = [c_1^*, c_2^*, \dots, c_n^*]$.

Таким чином, в результаті ідентифікації шукана ПФ об'єкта має вигляд:

$$w_1(t) = \sum_{i=1}^n k_i^* \varphi_i(t), \quad (3.15)$$

де $k_i^* = -ic_i^*$.

Для ілюстрації процедури ідентифікації розглянемо наступний приклад. Експериментальні дані, що визначають значення перехідного процесу $y^*(t)$ на виході об'єкта в дискретні моменти часу з кроком $\Delta t = 0,5c$ представлені в табл. 3.3 ($N=10$).

Таблиця 3.3 – Експериментальні дані перехідного процесу $y^*(t)$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k\Delta t$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$y_k^*(k)$	0	0,46	0,68	0,811	0,885	0,93	0,96	0,975	0,985	0,99	0,994

Неперервна модель невідомого об'єкта представляється в формі (3.11):

$$y(t) = c_0 + c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + c_3\varphi_3(t) + c_4\varphi_4(t),$$

де $n=4$; $c_0=0,994$;

$$\varphi_i(t) = e^{-it}, \quad i = \overline{1,4}.$$

При цьому вектор – параметр обраної моделі $c = [c_1, c_2, c_3, c_4]$.

Виконаємо дискретизацію неперервної функції $y(t)$ в точках $t_k = k\Delta t$:

$$y_k = y(k) = \sum_{i=1}^4 c_i \varphi_i(k), \quad k = \overline{0,10},$$

де $\varphi_i(k) = e^{-ik\Delta t}$, $i = \overline{0,4}$.

Далі визначаємо нев'язки:

$$e_k = y_k - y_k^* = \sum_{i=1}^4 c_i \varphi_i(k) - y_k^*, \quad k = \overline{0, 10},$$

і штрафну функцію:

$$I(t) = \sum_{k=0}^{10} e_k^2(t).$$

Функції $\beta_i(t)$, що визначаються формулами (3.14), мають вигляд:

$$\beta_i(t) = 2 \sum_{k=0}^{10} e_k(t) \varphi_i(k), \quad i = \overline{1, 4}.$$

Алгоритм самоналаштування параметрів моделі, що забезпечує мінімум штрафної функції $I(t)$, визначається наступними рівняннями:

$$\begin{aligned} \dot{c}_1(t) &= \gamma_1 \beta_1 I(t), \\ \dot{c}_2(t) &= \gamma_2 \beta_2 I(t), \\ \dot{c}_3(t) &= \gamma_3 \beta_3 I(t), \\ \dot{c}_4(t) &= \gamma_4 \beta_4 I(t). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Розв'язок системи, при наступних значеннях параметрів:

$$\gamma_1 = -900, \quad \gamma_2 = -900, \quad \gamma_3 = -2000, \quad \gamma_4 = -2000$$

і початкових умовах ($t_0 = 0$):

$$c_1(0) = 0, c_2(0) = 0, c_3(0) = 0, c_4(0) = 0.$$

Динаміка самоналаштування компонентів вектора $c = [c_1, c_2, c_3, c_4]$ в процесі ідентифікації показана на рис. 3.7-3.10.

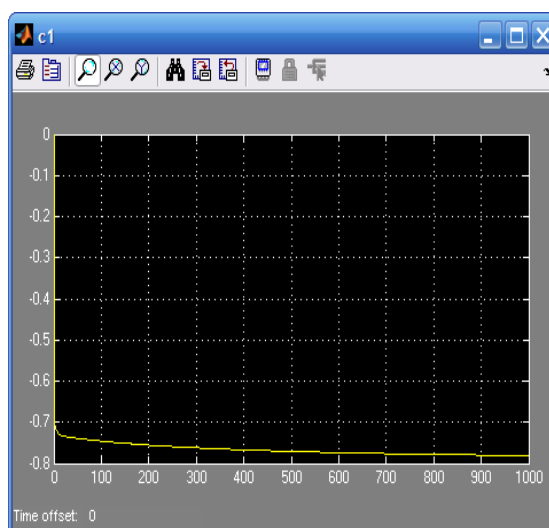


Рисунок 3.7 – Динаміка параметра c_1

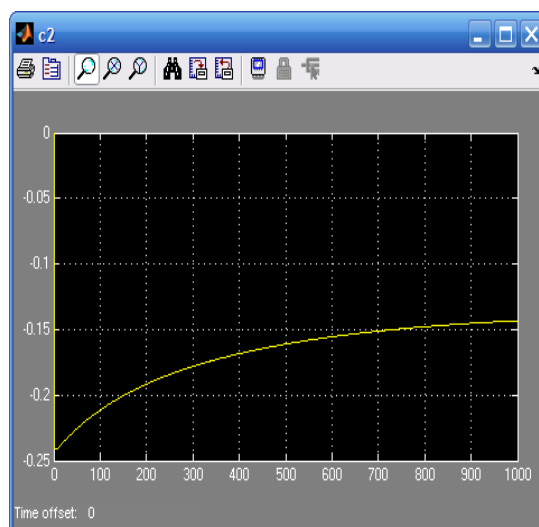
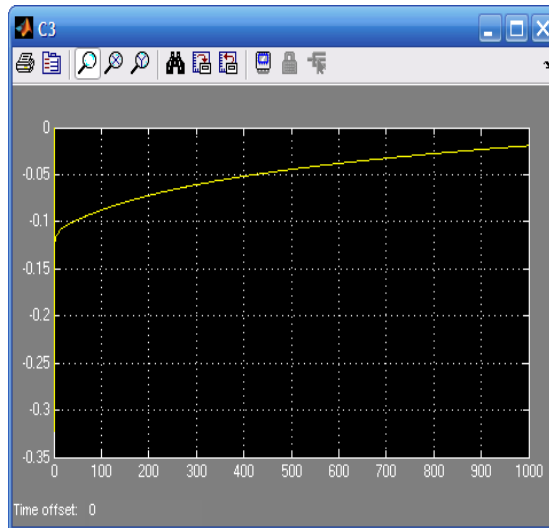
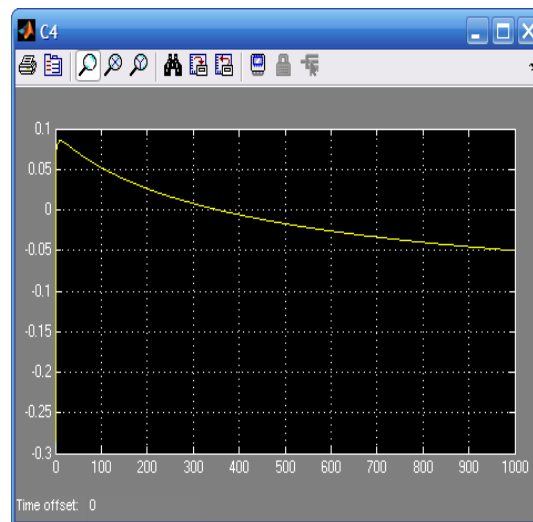


Рисунок 3.8 – Динаміка параметра c_2

Рисунок 3.9 – Динаміка параметра c_3 Рисунок 3.10 – Динаміка параметра c_4

Як видно з графіків встановленими розв'язками системи (3.16) є:

$$c_1^* = -0,78, \quad c_2^* = -0,143, \quad c_3^* = -0,02, \quad c_4^* = -0,05.$$

Отриманий вектор – параметр $c^* = [c_1^*, c_2^*, c_3^*, c_4^*] = [-0,78, -0,143, -0,02, -0,05]$ є розв'язком задачі ідентифікації моделі об'єкта (3.11).

Таким чином, шукана ППФ має вигляд:

$$w_1(t) = \sum_{i=1}^4 k_i \varphi_i(t), \quad (3.17)$$

де коефіцієнти k_i мають наступні числові значення:

$$k_1 = 0,78, \quad k_2 = 0,286, \quad k_3 = 0,06, \quad k_4 = 0,2.$$

Для оцінки якості ідентифікації в табл. 3.4 наведені вихідні експериментальні дані з табл. 3.3 і результати, отримані в кінці процедури побудови моделі об'єкта.

Таблиця 3.4 – Дані, отримані в результаті побудови моделі об'єкту

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k\Delta t$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y_k^*	0	0,46	0,68	0,811	0,885	0,93	0,96	0,975	0,985	0,99	0,994
y_k	0	0,459	0,691	0,818	0,892	0,935	0,961	0,977	0,986	0,991	0,995
e_k	0	-0,001	0,011	0,007	0,007	0,005	0,001	0,002	0,002	0,001	0,001

Отриманий в результаті ідентифікації об'єкта перехідний процес $y(t)$ і динаміка штрафної функції показані відповідно на рис. 3.11 і 3.12.

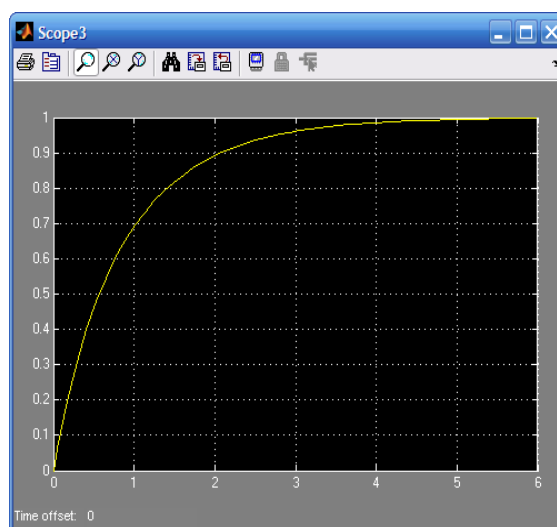


Рисунок 3.11 – Перехідний процес $y(t)$

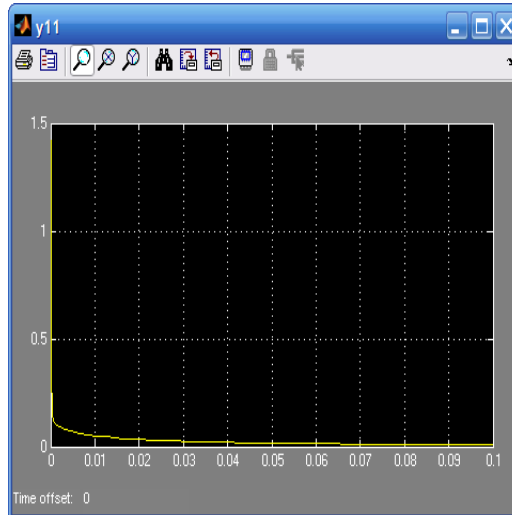


Рисунок. 3.12 – Динаміка штрафної функції $I(t)$

3.3 Аналіз отриманих результатів

Нехай є деякий дискретний об'єкт управління, що має вихідну змінну y і вхідний вплив u . Припустимо, що для цього об'єкта експериментальним шляхом в дискретні моменти часу $t_k = k\Delta t$ отримані дані «вхід - вихід» [37]:

$$\begin{aligned} y^*(k) &= y^*(k\Delta t), \\ u^*(k) &= u^*(k\Delta t), \quad k = \overline{0, N}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

де Δt – крок дискретизації по часу;

$N+1$ – кількість точок дискретизації.

Передбачається, що структура моделі розглянутого об'єкта управління задається наступним лінійним різницеvim рівнянням:

$$\begin{aligned} y(k) + \alpha_1 y(k-1) + \alpha_2 y(k-2) + \dots + \alpha_n y(k-n) &= \\ = \eta_0 u(k) + \eta_1 u(k-1) + \dots + \eta_m u(k-r), \end{aligned} \quad (3.19)$$

де a_i, b_ν – дійсні параметри об'єкта, які утворюють m -мірний вектор – параметр $p = [p_1, p_2, \dots, p_m] = [a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_r]$, $m = n + r + 1$; n і r – цілі додатні числа. Будемо вважати, що $n > r$.

Завдання ідентифікації полягає у визначенні такого вектор-параметра $p^* = [p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*] = [a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*, b_0^*, b_1^*, \dots, b_r^*]$, що забезпечує достатню близькість змінної $y(k)$ моделі (3.18) і виходу об'єкта $y^*(k)$ в дискретні моменти времени $t_k = k\Delta t$.

Оцінка якості ідентифікації здійснюється на основі штрафної функції:

$$I(p) = \sum_{k=0}^N e_k^2(p).$$

Для мінімізації оціночної функції $I(p)$ використовується критеріальне співвідношення (2.15), для підтримки динаміка параметрів $\alpha_i(\tau)$ і $\eta_\nu(\tau)$ повинна підпорядковуватись наступним рівнянням:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_i(\tau) &= \gamma_i \beta_i(\tau) I(\tau), & i &= \overline{1, n}, \\ \dot{\eta}_\nu(\tau) &= \xi_\nu s_\nu(\tau) I(\tau), & \nu &= \overline{0, r}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

В результаті встановлені розв'язки системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_i(\tau) &= \alpha_i^*, & i &= \overline{1, n}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_\nu(\tau) &= \eta_\nu^*, & \nu &= \overline{0, r}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

є оцінками параметрів різницевого рівняння (3.19), тобто вектор-параметр $p^* = [p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*] = [a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*, b_0^*, b_1^*, \dots, b_r^*]$.

Нехай, в результаті експерименту в дискретні моменти часу t_k з кроком $\Delta t = 0.2$ с отримані дані «вхід – вихід», які приведені в табл. 3.5. При

цьому вважається, що на вході об'єкта діє одиничний ступінчатий вплив, тобто $u(t_k)=1$, а $N=12$.

Таблиця 3.5 – дані «вхід – вихід»

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$k\Delta t$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
$y_k^*(k)$	0	0,18	0,5	0,775	0,96	1,045	1,065	1,055	1,03	1,015	1,006	1,002	1,0

Структуру моделі об'єкта в формі «вхід – вихід» задамо у вигляді:

$$y(k) + \alpha_1 y(k-1) + \alpha_2 y(k-2) = \eta_0 u(k), \quad (3.22)$$

тобто $n=2$, а $m=0$.

Задача полягає у визначенні вектор-параметра $p^* = [p_1^*, p_2^*, p_3^*] = [\alpha_1^*, \alpha_2^*, \eta_0^*]$ на основі даних, представлених в табл. 3.5.

Штрафна функція

$$I_1(t) = \sum_{k=2}^{12} e_k^2(t),$$

де

$$e_k = y^*(k) - y(k), \quad k = \overline{2, 12}.$$

При цьому вихідна змінна моделі об'єкта

$$y(k) = -[\alpha_1 y^*(k-1) + \alpha_2 y^*(k-2)] + \eta_0 u^*(k), \quad k = \overline{2, 12}. \quad (3.23)$$

Рівняння самоналаштування параметрів (3.20) запишуться у вигляді

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha}_1(\tau) &= \gamma_1 \beta_1 I(\tau), \\
 \dot{\alpha}_2(\tau) &= \gamma_2 \beta_2 I(\tau), \\
 \eta_0(\tau) &= \xi_0 s_0 I(\tau),
 \end{aligned}
 \tag{3.24}$$

де

$$\begin{aligned}
 \beta_i &= 2 \sum_{k=2}^{12} e(k) y(k-i), \quad i = 1, 2, \\
 s_0(t) &= -2 \sum_{k=2}^{12} e(k).
 \end{aligned}$$

Розв'язок системи рівнянь (3.24) при наступних значеннях параметрів

$$\gamma_1 = -700, \quad \gamma_2 = -700, \quad \xi_0 = -700$$

і початкових умовах

$$\alpha_1(0) = -1,0, \quad \alpha_2(0) = 0,4, \quad \eta_0(0) = 0,3.$$

Процес самоналаштування компонентів вектора в процесі ідентифікації показано на рис. 3.13-3.15, а динаміка штрафної функції на рис. 3.16.

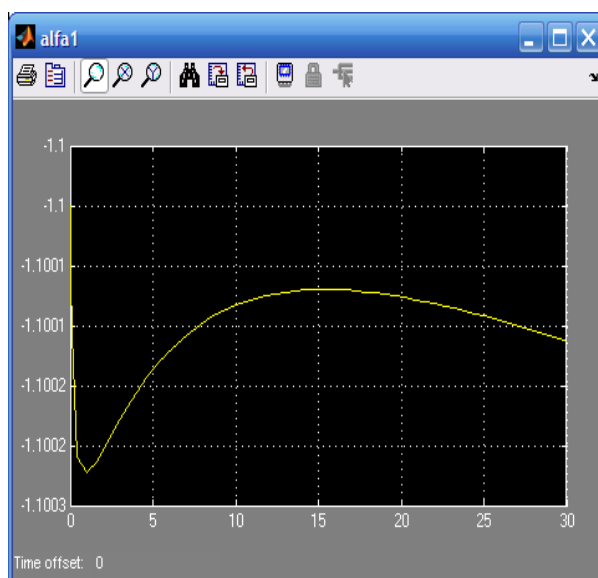


Рисунок 3.13 – Процес самоналаштування параметра α_1

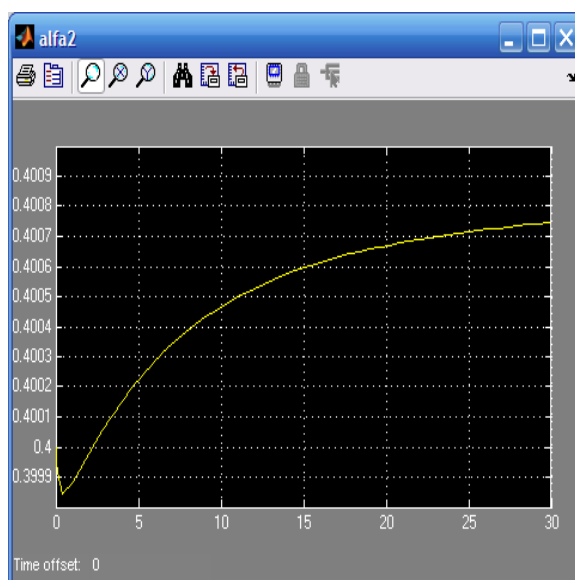


Рисунок 3.14 – Процес самоналаштування параметра α_2

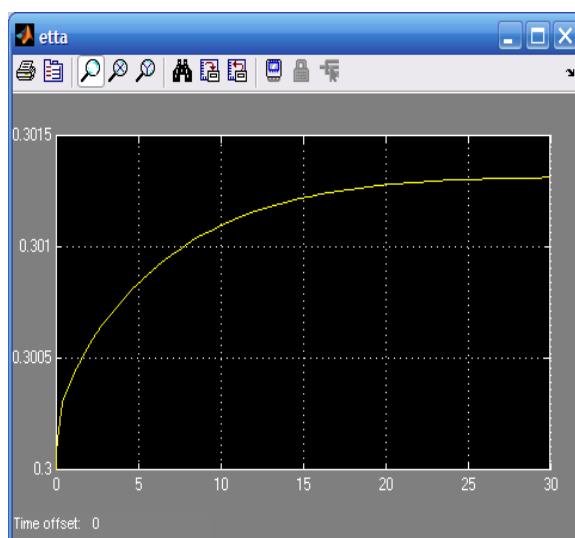
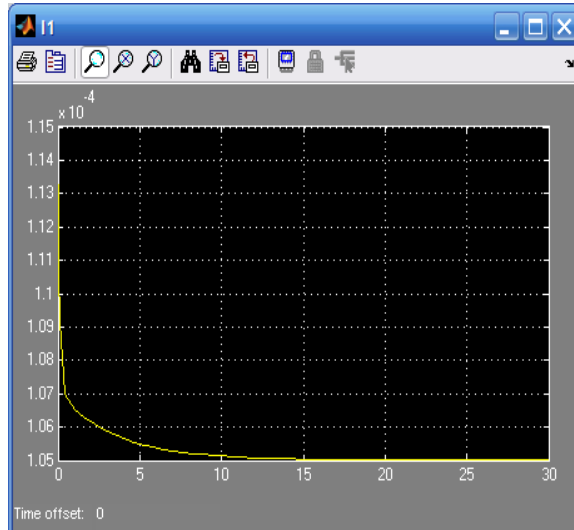


Рисунок 3.15 – Процес самоналаштування параметра η_0

Рисунок 3.16 – Динаміка штрафної функції I_1

Як видно з графіків встановленими розв'язками системи (3.24) є:

$$\alpha_1^* = -1,1, \quad \alpha_2^* = 0,4, \quad \eta_0^* = 0,3.$$

Таким чином, в якості оцінки вектор-параметра дискретної моделі об'єкта (3.21) можна прийняти $p^* = [p_1^*, p_2^*, p_3^*] = [-1,1, 0,4, 0,3]$.

В табл. 3.6 представлені результати із табл. 3.5 і дискретні значення змінної $y(k)$, $k = \overline{2, 12}$, отримані на основі співвідношення (3.23) при $\alpha_1 = \alpha_1^*$, $\alpha_2 = \alpha_2^*$, $\eta_0 = \eta_0^*$.

Таблиця 3.6 – Дискретні значення змінної $y(k)$

K	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$k\Delta t$	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
$y_k^*(k)$	0,5	0,775	0,96	1,045	1,065	1,055	1,03	1,015	1,006	1,002	1,0
$y(k)$	0,499	0,779	0,954	1,047	1,066	1,054	1,06	1,05	1,03	1,005	1,001
$e(k)$	0,001	-0,004	0,006	-0,002	-0,001	0,001	-0,03	-0,035	0,024	0,003	0,001

Перехідний процес $y(t)$ на виході об'єкта показано на рис. 3.17.

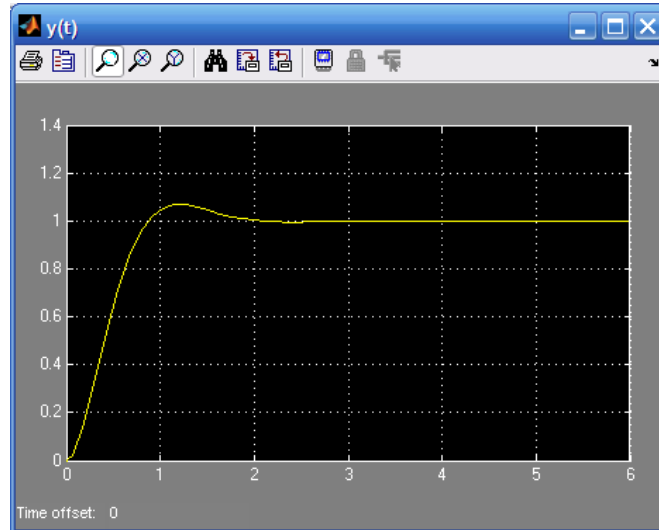


Рисунок 3.17 – Перехідний процес $y(t)$

3.4 Охорона праці при розробці математичних моделей

Забезпечення охорони праці є важливим аспектом під час проведення наукових досліджень і практичної реалізації розроблених алгоритмів у виробництві. Відповідно до Закону України "Про охорону праці", кожен працівник має право на безпечні умови праці, а роботодавець зобов'язаний забезпечити відповідність умов праці вимогам законодавства.

У процесі виконання роботи можливі наступні ризики [38]:

- робота з електронними пристроями (комп'ютерами) може спричинити напруження зору, м'язову втому;
- використання спеціалізованого програмного забезпечення, такого як MATLAB, вимагає постійного зосередження, що може вплинути на психофізіологічний стан дослідника;
- робота у виробничому середовищі при впровадженні результатів моделювання може бути пов'язана з ризиками, такими як шум, вібрації, можливість травматизму.

Заходи з охорони праці:

- ергономіка робочого місця;
- техніка безпеки;
- організація перерв;
- підготовка персоналу;

При впровадженні результатів роботи у виробничі процеси необхідно:

- забезпечити наявність засобів індивідуального захисту для працівників (окуляри, рукавички тощо);
- розробити інструкції з експлуатації нового обладнання або технологічного процесу;
- проводити регулярний моніторинг умов праці та здоров'я працівників.

3.5 Висновок

Проведено моделювання для оцінки точності та ефективності розробленого алгоритму параметричної ідентифікації. Використано реальні дані для тестування моделі, що дозволило оцінити її стабільність і адаптивність до змінних умов. Зроблено висновок, що алгоритм демонструє високий рівень точності, а графічні результати підтверджують відповідність моделі експериментальним даним. Цей підхід може бути впроваджений у сучасних автоматизованих системах управління.

ВИСНОВОК

Представлена робота присвячена задачам параметричної ідентифікації технічних об'єктів у роботизованому виробництві. Розв'язки цих задач здійснюються на основі критеріальної умови, отриманої для цілей ідентифікації. Застосування запропонованого критеріального співвідношення дозволило виділити методи і алгоритми побудови моделей об'єктів керованих технічних систем.

Основні результати роботи:

- розглянута нова критеріальна умова для цілей параметричної ідентифікації динамічних об'єктів управління;
- розглянуті алгоритми ідентифікації моделей лінійних стаціонарних об'єктів управління, що описуються імпульсними перехідними функціями і різницеvими рівняннями.

Розроблені методи параметричної ідентифікації та лінеаризації математичних моделей можуть бути застосовані для оптимізації роботи роботизованих маніпуляторів і автоматизованих систем. Використання цих моделей дозволить значно підвищити точність і ефективність рухів маніпуляторів, що, у свою чергу, сприятиме зниженню енергоспоживання та скороченню часу виконання виробничих операцій. Це особливо важливо для галузей із високими вимогами до швидкості та точності

Також, отримані результати роботи можна віднести до Цілі сталого розвитку 8 «Гідна праця та економічне зростання», а саме п. 8.2 «Досягнення більш високого рівня економічної продуктивності через диверсифікацію, технологічний прогрес та інновації».

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. ДСТУ 3008-15. Документація. Звіти у сфері науки та техніки. структура та правила оформлення. Введ. 2015-06-22. К. Держстандарт України, 2017. 29 с.
2. Методичні вказівки з підготовки та захисту кваліфікаційної роботи здобувачами другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності 151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології, освітньо-професійних програм: «Автоматизоване управління технологічними процесами»; «Комп'ютерно-інтегровані технологічні процеси і виробництва»; «Комп'ютеризовані та робототехнічні системи». / Упоряд. І. Ш. Невлюдов, Р. В. Артюх, В. В. Безкоровайний, Н. П. Демська, В. В. Євсєєв, О. І. Филипенко, О. М. Цимбал. – Харків: ХНУРЕ, 2021. – 55 с.
3. Невлюдов І. Ш. Управління якістю виробів : навч. посіб. для студ. вищих навч. закладів / І. Ш. Невлюдов, Д. А. Янушкевич, Л. С. Іванов ; М-во освіти і науки України, Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. – Харків : ХНУРЕ, 2021. – 364 с.
4. Kovalenko I., Romanenko V. Self-Organizing Data Mining: A Modern Approach to Extract Knowledge from Big Data / I. Kovalenko, V. Romanenko. — Kyiv: Technical Sciences Publishing, 2021. — 240 p.
5. Ivanov D., Petrenko A. Nonlinear System Identification: Advances in Neural and Fuzzy Modeling / D. Ivanov, A. Petrenko. – Kyiv: Ukrainian Scientific Publishing, 2022. – 820 p.
6. Цимбал О. М. Системи адаптації роботів і технологія OpenCV : навч. посіб. / О. М. Цимбал, А. І. Бронніков ; Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. – Харків : ХНУРЕ, 2019. – 144 с.
7. Ali Haider, Bassem S. Bassil, Joaquín Soriano-López, Hafiz M. Qasim, Cristina Sáenz de Pipaón, Masooma Ibrahim, Daipayan Dutta, Yong-Sun Koo, Jorge J. Carbó, Josep M. Poblet, José Ramón Galán-Mascarós, Ulrich Kortz.

9-Cobalt(II)-Containing 27- Tungsto-3-germanate(IV): Synthesis, Structure, Computational Modeling, and Heterogeneous Water Oxidation Catalysis. *Inorganic Chemistry* 2019, 58 (17) , 11308- 11316. DOI: 10.1021/acs.inorgchem.9b01495.

8. Мельник В.О., Кравченко Л.П., Романюк І.С. Задачі, методи та алгоритми оптимізації / В.О. Мельник, Л.П. Кравченко, І.С. Романюк. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2021. – 820 с.
9. Гаврилюк І.П., Макаров В.Л. Методи обчислень. Частина 1. — Київ: Вища школа, 2020. — 367 с.
10. Гаврилюк І.П., Макаров В.Л. Методи обчислень. Частина 2. — Київ: Вища школа, 2020. — 431 с.
11. Стоян В.А. Моделювання та ідентифікація динаміки систем з розподіленими параметрами. — Київ: ВПЦ «Київський університет», 2020. – 12 с.
12. Теорія динамічних систем : навч. посіб. / Володимир Володимирович Пічкур, Олексій Володимирович Капустян, Валентин Володимирович Собчук. – Луцьк : Вежа-Друк, 2020. – 348 с.
13. Побудова зворотного перетворення Лапласа від комплексної дроборациональної функції із застосуванням аналітичної матричної експоненти Л.Г. Бистров, А.А. Попов, Д.П. Тетерин.
14. Льюнг Л. "Ідентифікація систем: основи та алгоритми". Київ: Техніка, 2020. – 248 с.
15. Ейкхофф П. "Методи ідентифікації в сучасних системах керування". Харків: Вища школа, 2021. – 312 с.
16. Солодовніков В.В., Шрамко П.С. "Методи самонастроювання: моделі та алгоритми". Київ: ВПЦ "Київський університет", 2019. – 196 с.
17. Льюнг Л. Ідентифікація систем: основи та алгоритми; Київ: Техніка, 2020. – 432 с.
18. Ейкхофф П. "Методи ідентифікації в сучасних системах керування". Харків: Вища школа, 2021. – 681 с.

19. Семенов А.Д. Ідентифікація об'єктів управління: навч. посібник/А.Д. Семенов, Д.В. Артамонов, А.В. Брюхачов. Пенза: Вид-во Пенз. держ. ун-ту. 2022. 11 с.
20. Олссон Г. Цифрові системи автоматизації та управління / Г. Олссон, Д. Піані. СПб.: Невський діалект, 2019. 274 с.
21. Солодовніков В.В. Розрахунок та проектування аналітичних самоналаштовуються систем з еталонними моделями/В.В. Солодовніков, П.С. Шрамко. М: Машинобудування, 2020. 134 с.
22. Методичні рекомендації для студентів бакалаврів спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» Ткачов В.В., Бубликов А.В., Цвіркун Л.І., Проценко С.М., Бойко О.О., Славинський Д.В., – Д.: «НГУ», 2019. – 27 с.
23. Бойко О.О. Методичні вказівки до лабораторних робіт з проектування систем автоматизації для студентів напрямку підготовки «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / О.О. Бойко – Д.: Державний ВНЗ «НГУ», 2019. – 109 с. – Режим доступу: <https://goo.gl/Ev6J4Z>. – Назва з домашньої сторінки Інтернету.
24. Бойко О.О., Проценко С.М. Методичні вказівки до лабораторних робіт з програмування систем реального часу для студентів напрямків підготовки «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», «Комп'ютерна інженерія» / О.О. Бойко, С.М. Проценко – Д.: Державний ВНЗ «НГУ», 2019. – 168 с. – Режим доступу: <https://goo.gl/rBf8Zm>. – Назва з домашньої сторінки Інтернету.
25. Глонь О.В. Моделювання систем керування в умовах невизначеностей // О.В. Глонь, В.М. Дубовой – Вінниця: УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2024. – 169с.
26. Дивак М. П. Теоретичні засади побудови моделей "вхід-вихід" статичних систем методами аналізу інтервальних даних / М.П. Дивак // Дис. Доктора технічних наук. – Тернопіль: Тернопільська академія народного господарства, 2023. – 304 с.

27. Дивак М.П. Метод локалізації гарантованих оцінок в задачах параметричної ідентифікації / М.П. Дивак // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2020. – №4. – С. 12 – 17
28. Дивак М.П. Обчислювальні аспекти методів локалізації розв'язків задач параметричного оцінювання в умовах обмежених похибок / М.П. Дивак // Відбір та обробка інформації. – 2022. – №16 (92) – С. 43 – 47.
29. Дивак М.П. Ідентифікація параметрів моделі на основі аналізу інтервальних даних / М.П. Дивак , О.В. Крамар // Вісн. Тернопільського держ. техн. унів. – Тернопіль. – 2019. – Т. 4. – №1. – С. 76 – 80.
30. Дивак М.П. Особливості побудови інтервальної системи алгебричних рівнянь та методу її розв'язку в задачах ідентифікації лінійного інтервального різницевого оператора. / М.П. Дивак, Т.М. Дивак // Зб. Наук. Праць ДонНТУ. Серія інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка – 2020. – Вип 10(153). – С. 224 – 229.
31. Крищук В.М. Інтервальні методи оптимізації допусків / В.М. Крищук, Г. М. Шило, М.П. Гапоненко // Вісн. НУ “Львівська політехніка”. Комп'ютерні системи проектування: Теорія і практика. – 2022. – № 373. – С. 196 – 201.
32. Марценюк Є.О. Ідентифікація дискретних динамічних моделей процесів з інтервальною невизначеністю у біогазових установках переробки органічного сміття / Є.О. Марценюк, М.П. Дивак, Ю.Р. Піговський, Т.М. Дивак // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія „Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка” – 2021. Вип. 11 (164). – С. 181 – 188.
33. Марценюк Є.О. Особливості розв'язку задач параметричної ідентифікації динамічних систем в умовах інтервальної невизначеності / Є.О. Марценюк // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2020. – Т. 12, №1.– С. 30– 38.
34. Томашевський В.М. Моделювання систем / В.М. Томашевський – К.: Видавнича група ВНУ, 2020. – 352 с.

35. Alefeld G. Interval analysis: theory and applications / G. Alefeld, G. Mayer // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2022. – № 121. – P. 421 – 464.
36. Blumensaat F. Modeling of two-stage anaerobic digestion using the IWA Anaerobic Digestion Model No.1 (ADM1) / F. Blumensaat, J. Keller. // *Water Research*. – Vol. 39. – 2021. – P. 171 – 183.
37. Mailleret L. Nonlinear adaptive control for bioreactors with unknown kinetics / L. Mailleret, O. Bernard, J. -P. Steyer // *Automatica*. – 2019. – № 40. – P. 1379–1385.
38. Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни "Охорона праці в галузі" для студентів усіх спеціальностей галузі автоматизації та приладобудування денної форми навчання / упоряд.: Г. В. Пронюк, Н. М. Сердюк, Т. Є. Стиценко ; М-во освіти і науки України, ХНУРЕ. – Харків : ХНУРЕ, 2016. – 116 с.