УДК 510.62

В. В. ШЛЯХОВ, канд. техн. наук, *С. Н. ГЕРАСИН*

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ n-МЕРНО СДВИНУТЫХ ПРЕДИКАТОВ

При идентификации технических систем и при моделировании работы органов чувств методом нуль-органа [1] широко используют исчисление бинарных предикатов. Рассмотрим свойства так называемых n-мерно сдвинутых предикатов, которые принадлежат к типу предикатов дифункциональности и используются в тех случаях, когда два плеча сравнения не равноправны .

Пусть на декартовом квадрате произвольного гильбертова пространства L задана двузначная функция $T(x, y)$, принимающая значения $\{0, 1\}$. Среди множества подобных функций выделим подмножество тех из них, которые представлены в виде $T(x, y) = D(F(x) + a, F(y) + b)$ **(1)**, где D — предикат равенства [1], $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x))$ — набор линейных, линейно независимых функционалов, a и b — векторы, принадлежащие n-мерному арифметическому пространству R^n.

Класс двузначных функций вида (1) будем называть n-мерно сдвинутыми предикатами. Особый интерес представляют условия, обеспечивающие принадлежность произвольного предиката заданному классу. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *Для того, чтобы $T(x, y)$ был предикатом n-мерно сдвинутым, необходимо и достаточно, чтобы он обладал следующими свойствами:*

1. Для любых $x_1, y_1, x_2, y_2 \in L$ из равенств $T(x_1, y_1) = 1$, $T(x_2, y_1) = 1$, $T(x_2, y_2) = 1$ следует $T(x_1, y_2) = 1$ (квазитранзитивность).

2. Существуют элементы $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \in L$ такие, что для любых $x, y \in L$, существуют и притом единственные наборы чисел $f_i(x)$, $i =$

$= 1, 2, \ldots, n$, $g_i(y)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющие условиям

$$T(x, \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i) = 1; \qquad (2)$$

$$T(\sum_{i=1}^{n} g_i(y) e_i, y) = 1. \qquad (2')$$

3. Функционалы $f_i(x)$, $g_i(y)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ непрерывны в смысле метрики пространства L.

4. Для любого $x \in L$ выполняется $T(x, x + \sum_{i=1}^{n} A_i e_i) = 1$, где A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ числа, не зависящие от x.

5. Для любых $x_1, x_2, y_1, y_2 \in L$ из равенств $T(x_1, y_1) = 1$, $T(x_2, y_2) = 1$ следует

$$T(x_1 + x_2 + \sum_{i=1}^{n} A_i e_i, y_1 + y_2) = 1; \qquad (3)$$

$$T(x_1 + x_2, y_1 + y_2 - \sum_{i=1}^{n} A_i e_i) = 1. \qquad (3')$$

Доказательство.

1. *Необходимость*. Для доказательства необходимости будем считать, что предикат $T(x, y)$ n-мерно сдвинут, значит он представлен в виде (1). Покажем выполнение свойств (1) — (5).

1) Выполнение квазитранзитивности показано в работе [3].

2) Покажем, что числа $f_i(x)$, $g_i(y)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ существуют и единственны для каждого $x \in L$. Запишем формулу (2) в виде $F(x) + a = F(\sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i) + b$, учитывая, что оператор F линеен, получаем

$$F(x) + a = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) F(e_i) + b,$$

или в координатной форме

$$F_k(x) + a_k - b_k = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) F_k(e_i), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (4)$$

Аналогично имеем

$$F_k(y) + b_k - a_k = \sum_{i=1}^{n} g_i(y) F_k(e_i), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (5)$$

Как видно из выражения (4), (5) есть линейные неоднородные системы, имеющие единственное решение. Это следует из того, что матрица систем (4), (5) на основании теоремы Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве является матрицей Грамма [2].

Положим в (4), (5) $x = 0$, тогда получим

$$a_k - b_k = \sum_{i=1}^{n} f_i(0) F_k(e_i),\ k = 1,\ 2, \dots, n, \tag{4'}$$

$$b_k - a_k = \sum_{i=1}^{n} g_i(0) F_k(e_i),\ k = 1,\ 2, \dots, n. \tag{5'}$$

3) Функционалы $f_i(x)$, $g_i(y)$, $i = 1, 2, \dots, n$ непрерывны в метрике пространства L, они представляют собой линейную комбинацию непрерывных функционалов $F_k(e_i)$, $k = 1, 2, \dots, n$, $i = 1, 2, \dots, n$.

4) Условие (4) можно переписать в виде

$$F_k(x) + a_k = F_k(x + \sum_{i=1}^{n} A_i e_i) + b_k,\ k = 1,\ 2, \dots, n,$$

учитывая линейность оператора F, имеем

$$F_k(x) + a_k = F_k(x) + \sum_{i=1}^{n} A_i F_k(e_i) + b_k,\ k = 1,\ 2, \dots, n.$$

Производя некоторые преобразования, получаем в координатной форме

$$\sum_{i=1}^{n} A_i F_k(e_i) = a_k - b_k,\ k = 1,\ 2, \dots, n. \tag{6}$$

Система (6) имеет единственное решение, как и системы (4), (5). Сравнивая систему (6) с системами (4′) и (5′), получаем $A_i = f_i(0)$, $A_i = g_i(0)$, $i = 1, 2, \dots, n$, отсюда имеем $A_i = [f_i(0) - g_i(0)]/2$, $i = 1, 2, \dots, n$ (7).

5) $T(x_1, y_1) = 1$, $T(x_2, y_2) = 1$ или $F(x_1) + a = F(y_1) + b$, $F(x_2) + a = F(y_2) + b$.

Складывая эти равенства и учитывая линейность оператора F, получаем $F(x_1 + x_2) + 2a - b = F(y_1 + y_2) + b$,

$$F(y_1 + y_2 - \sum_{i=1}^{n} A_i e_i) + b = F(y_1 + y_2) - \sum_{i=1}^{n} A_i F(e_i) + b.$$

Заменим сумму, стоящую в правой части, по формуле (6)

$$F(y_1 + y_2 - \sum_{i=1}^{n} A_i e_i) + b = F(y_1 + y_2) + a - 2b = F(x_1 + x_2) + a.$$

Аналогично доказывается, что

$$F(x_1 + x_2 + \sum_{i=1}^{n} A_i e_i) + a = F(y_1 + y_2) + b.$$

Итак,

$$T(x_1 + x_2 + \sum_{i=1}^{n} A_i e_i,\ y_1 + y_2) = 1,$$

$$T(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2 - \sum_{i=1}^{n} A_i e_i) = 1.$$

2. *Достаточность.*

Пусть x, y — произвольные элементы из L, причем, согласно свойству (2), имеем

$$T(x, \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i) = 1, \quad T(y, \sum_{i=1}^{n} f_i(y) e_i) = 1,$$

по свойству (5) получим

$$T(x+y, \sum_{i=1}^{n} (f_i(x) + f_i(y) - A_i) e_i) = 1.$$

Отсюда в силу однозначности выбора наборов $\{f_i(x)\}_{i=1}^{n}$ и $\{g_i(x)\}_{i=1}^{n}$ запишем $f_k(x+y) = f_k(x) + f_k(y) - A_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть $u_k = f_k(x) - A_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, покажем, что $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ аддитивен: $u_k(x+y) = f_k(x+y) - A_k = f_k(x) - A_k + f_k(y) - A_k = u_k(x) + u_k(y)$. Аналогично $v_k(x+y) = v_k(x) + v_k(y)$ $v_k(x) = g_k(x) + A_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ также аддитивен и, кроме того $u_k(x)$ и $v_k(x)$ непрерывны и, следовательно, линейны.

Из свойства (4) получаем

$$T(e_k, e_k + \sum_{i=1}^{n} A_i e_i) = 1, \ k = 1, 2, \ldots, n,$$

отсюда

$$f_k(e_i) = \begin{cases} A_i, & i \neq k, \\ 1 + A_i, & i = k, \end{cases} \quad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

тогда

$$u_k(e_i) = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k, \end{cases} \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Аналогично находим

$$g_k(e_i) = \begin{cases} -A_i, & i \neq k, \\ 1 - A_i, & i = k \end{cases} \quad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$v_k(e_i) = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k, \end{cases} \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Объединим эти результаты: $u_k(e_i) = v_k(e_i) = \delta_{ik}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, где δ_{ik} — символ Кронекера. Запишем следующие равенства:

$$T(x, x + \sum_{i=1}^{n} A_i e_i) = 1,$$

$$T(\sum_{j=1}^{n} g_j(x + \sum_{i=1}^{n} A_i e_i) e_j, x + \sum_{i=1}^{n} A_i e_i) = 1,$$

$$T(x, \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i) = 1.$$

Согласно квазитранзитивности имеем

$$T\Big(\sum_{j=1}^{n} g_j\big(x+\sum_{i=1}^{n} A_i e_i\big) e_j,\ \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i\Big)=1.$$

Отсюда

$$g_k(y)=g_k\big(x+\sum_{i=1}^{n} A_i e_i\big),\ k=1,\ 2,\dots,\ n,$$

$$g_k\big(x+\sum_{i=1}^{n} A_i e_i\big)=g_k\big(\sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i\big),\ k=1,\ 2,\dots,\ n.$$

Перейдем к линейным функционалам:

$$v_k\big(x+\sum_{i=1}^{n} A_i e_i\big)+A_k=v_k\big(\sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i\big)+A_k,\ k=1,\ 2,\dots,\ n.$$

Отсюда

$$v_k(x)+A_k=f_k(x)=u_k(x)+A_k,\ k=1,\ 2,\dots,\ n.$$

Следовательно, $v_k(x)=u_k(x),\ k=1,\ 2,\dots,\ n,$

$$f_k(x)=u_k(x)+A_k,$$
$$g_k(x)=u_k(x)-A_k,\ k=1,\ 2,\dots,\ n.$$

Снова используем свойство (1):

$$T\big(\sum_{i=1}^{n} g_i(y) e_i,\ y\big)=1,\ T(x,\ y)=1,$$

$$T\big(x,\ \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i\big)=1,\ \text{отсюда}$$

$$T\big(\sum_{i=1}^{n} g_i(y) e_i,\ \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i\big)=1.$$

В силу однозначности выбора функционалов $f_k(x),\ k=1,\ 2,\dots,\ n$ имеем

$$f_k\big(\sum_{i=1}^{n} g_i(y) e_i\big)=u_k\big(\sum_{i=1}^{n} g_i(y) e_i\big)+A_k=\sum_{i=1}^{n} g_i(y) v_k(e_i)+$$
$$+A_k=g_k(y)+A_k,\ k=1,\ 2,\dots,\ n.$$

Итак $f_k(x)=g_k(y)+A_k,\ k=1,\ 2,\dots,\ n$, или

$$u_k(x)+A_k=u_k(y)-A_k+A_k,\quad k=1,\ 2,\dots,\ n;$$
$$u_k(x)+A_k=u_k(y),\quad k=1,\ 2,\dots,\ n;$$
$$u_k(x)+\frac{f_k(0)}{2}=u_k(y)+\frac{g_k(0)}{2},$$

или

$$D\left(u(x)+\frac{f(0)}{2},\ v(y)+\frac{g(0)}{2}\right)=1.$$

Доказательство достаточности, а значит, и всей теоремы, закончено.

Рассмотрим некоторые важные для приложений частные случаи. Пусть пространство L есть пространство суммируемых с квадратом функций $L_2[0, 1]$. В этом пространстве скалярное произведение определено следующим образом:

$$(x, y) = \int_0^1 x(t)\, y(t)\, dt.$$

Тогда на основании теоремы Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве [2] получим, что оператор имеет вид

$$F(x) = \left(\int_0^1 x(t)\, a_1(t)\, dt, \int_0^1 x(t)\, a_2(t)\, dt, \ldots, \int_0^1 x(t)\, a_n(t)\, dt\right),$$

где $a_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ — система линейно независимых элементов из $L_2[0, 1]$, их называют еще — ядрами линейных функционалов.

Предикат $T(x, y)$ в этом случае запишем

$$T(x, y) = D\left(\left(\int_0^1 x(t)\, a_1(t)\, dt + [f_1(0)]/2, \int_0^1 x(t)\, a_2(t)\, dt + [f_2(0)/2], \ldots \right.\right.$$

$$\ldots, \int_0^1 x(t)\, a_n(t)\, dt + [f_n(0)]/2\Big), \Big(\int_0^1 x(t)\, a_1(t)\, dt + [g_1(0)]/2,$$

$$\left.\left.\int_0^1 x(t)\, a_2(t)\, dt + [g_2(0)/2], \ldots, \int_0^1 x(t)\, a_n(t)\, dt + [g_n(0)]/2\right)\right),$$

где D предикат равенства на $R^n \times R^n$.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Начала теории интеллекта. Проблемы и перспективы.— М., 1982.— 210 с. Деп. в ВИНИТИ, 20.03.82, № 3324. 2. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа.— М., 1965.— 520 с. 3. *Герасин С. Н.* и др. О предикатах диффункциональности / С. Н. Герасин, Д. Э. Ситников, С. Ю. Шабанов-Кушнаренко // Пробл. бионики.— 1987.— Вып. 39.— С. 11—17.

Поступила в редколлегию 09.12.86