
УДК 621.372

В. И. ЧАЙКОВСКИЙ, А. Н. МИРОШНИКОВ

**ПОЛУПОЛОСНАЯ И КВАДРАТУРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ НА ОСНОВЕ
ПОЛУПЕРИОДНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ**

Полифазные фильтры с дискретной импульсной характеристикой вида $lq_n(k = \sin \pi/q(kq+n))$; $n=1, 2, \dots, < q$; $k \in M$ используются в составе цифровых КИХ-структур для интерполяции промежуточных отсчетов входной последовательности $f(k)$ в точках $k+n/q$ [1]. В частном случае при $q=2$, $n=1$ полифазный фильтр осу-

шестьляет интерполяцию в узлах, совпадающих с серединой периода дискретизации. Такой фильтр можно назвать полупериодным интерполятором и описать его работу дискретной сверткой

$$L\{f(k)\} = \sum_m f(m) \operatorname{sinc} \frac{\pi}{2} [2(m-k) + 1] = f(k + 0,5). \quad (1)$$

Для иллюстрации на рис. 1, а показана импульсная характеристика (ИХ) полупериодного интерполятора $l_{21}(k)$, на рис. 1, б — входная последовательность $f(k)$, на рис. 1, в — последовательность интерполированных отсчетов $f(k+0,5)$. Процедуры и средства полупериодной интерполяции (ППИ) можно эффективно использо-

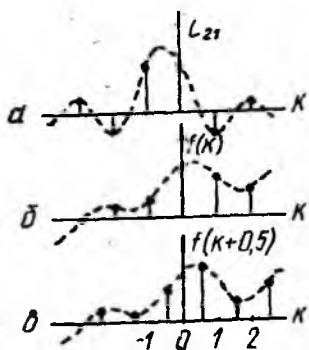


Рис. 1

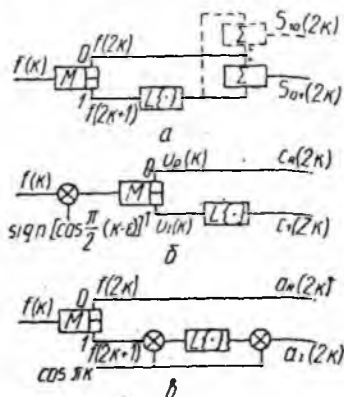


Рис. 2

вать для полуполосной фильтрации входных последовательностей и для выделения квадратурных составляющих в виде отсчетов их комплексной огибающей (КО) или аналитического сигнала (АС).

1. Полуполосный фильтр нижних частот (ППФ₀₁) имеет прямоугольную частотную характеристику (ЧХ) $H_{01}(p)$ в нормированной (приведенной к частоте дискретизации $\Omega/2\pi$) полосе частот $|p| \leq \leq 0,25$, изображенную на рис. 2, а. Там же пунктиром условно показан спектр $F(p)$ фильтруемой последовательности $f(k)$. Частотной характеристикой $H_{01}(p)$ соответствует дискретная импульсная характеристика $h_{01}(k) = \sin \pi k/2$, $k \in M$ (рис. 2, б) ППФ₀₁ сокращает ширину спектра сигнала вдвое, что позволяет вдвое увеличить период $2\pi/\Omega$ дискретизации данных на выходе. С учетом такого прореживания данных процедура ППФ₀₁ описывается дискретной сверткой

$$H_{01}\{f(k)\} = \sum_m f(m) \operatorname{sinc} \pi/2 (m - 2k).$$

Поскольку все четные (кроме центрального при $m = 0$) отсчеты ИХ $h_{01}(k)$ равны нулю,

$$H_{01}\{f(k)\} = f(2k) + \sum (2m + 1) \operatorname{sinc} \pi/2 [2(m - k) + 1].$$

С учетом представления процедуры $h\{\cdot\}$ полупериодной интерполяции (1) продукт полуполосной фильтрации ППФ₀₁

$$H_{01}\{f(k)\} = f(2k) + L\{f(2k+1)\}. \quad (2)$$

Из полученного выражения следует, что для полуполосной фильтрации в области нижних частот необходимо: разделить входную последовательность $f(k)$ на последовательности четных $f(2k)$ и нечетных $f(2k+1)$ отсчетов с помощью процедуры (М) двухпозиционного мультиплексирования данных; выполнить полупериодную интерполяцию последовательности нечетных отсчетов с помощью процедуры $L\{\cdot\}$ полифазной фильтрации (полупериодной интерполяции); объединить последовательности четных отсчетов и продуктов полупериодной интерполяции с помощью процедуры их синхронного суммирования Σ . Схема функциональных преобразований сигнала, соответствующая перечисленным процедурам, показана на рис. 3. а. Применительно к низкочастотной фильтрации следует исключить из рассмотрения показанную пунктиром процедуру вычитания из последовательности четных отсчетов продуктов полупериодной интерполяции.

2. Полуполосный фильтр верхних частот (ППФ₁₀) имеет прямоугольную ЧХ $H_{10}(p)$ в нормированной полосе частот $0,25 \leq |p| \leq 0,5$, показанную совместно со спектром $F(p)$ на рис. 2, в. Из сравнения с рис. 2, а следует, что такая ЧХ соответствует сдвинутой на половину частоты дискретизации полуполосного фильтра нижних частот. Следовательно, ИХ ППФ₁₀ образуется из ИХ ППФ₀₁ в результате умножения последней на последовательность $\exp\{j\pi k\} = \cos \pi k$ (рис. 2, з). Таким образом, ИХ ППФ₁₀ $h_{10k} = \sin \pi k / 2 \cos \pi k$, $k \in M$. Как и в предыдущем случае, все четные (кроме центрального, равного единице) отсчеты ИХ равны нулю, а все нечетные совпадают с отсчетом ИХ ППФ₀₁, взятыми с обратным знаком. Поэтому продукт дискретной свертки входной последовательности с такой ИХ

$$H_{01}\{f(k)\} = \sum_m f(m) \operatorname{sinc} \pi/2 (m - 2k) \cos \pi (m - 2k)$$

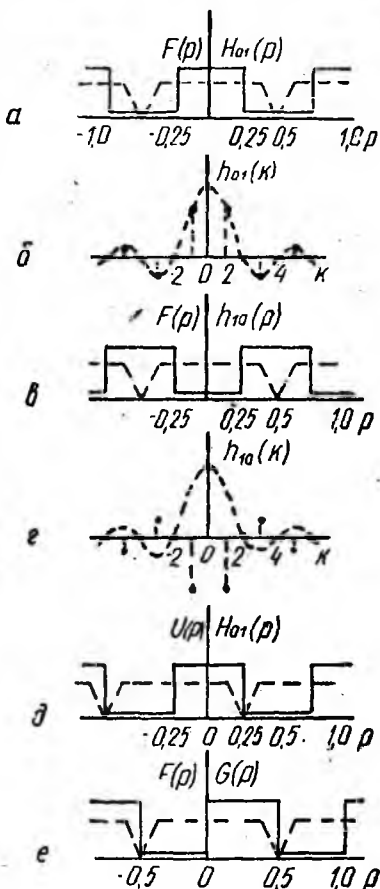


Рис. 3

однозначно представляется в виде суммы

$$H_{10} \{f(k)\} = f(2k) - L \{f(2k + 1)\}, \quad (3)$$

где, как и прежде, оператор $L\{\cdot\}$ определяет процедуру полупериодной интерполяции.

Таким образом, для полуполосной фильтрации в области высоких частот необходимо: разделить входную последовательность на последовательности четных и нечетных отсчетов; выполнить полупериодную интерполяцию последовательности нечетных отсчетов; вычесть из последовательности четных отсчетов синхронные продукты полупериодной интерполяции. Схема функциональных преобразований сигнала, соответствующая перечисленным процедурам, показана на рис. 3, а. Применительно к высокочастотной фильтрации здесь следует исключить из рассмотрения процедуру суммирования четных отсчетов и продуктов полупериодной интерполяции.

3. Двухполуполосный фильтр (ППФ₁₁) обеспечивает одновременную фильтрацию входной последовательности в нижней ($|p| \leq 0,25$) и верхней ($0,25 < |p| < 0,5$) полуполосах частот. Поскольку для каждой из них используется одна и та же процедура мультиплексирования данных (оператор M) и одна и та же процедура полупериодной интерполяции (оператор $L\{\cdot\}$), сложность двухполуполосной фильтрации не намного выше сложности полуполосной фильтрации. Для перехода к двухполуполосной фильтрации необходимо, как это показано на рис. 3, а, иллюстрирующей схему функциональных преобразований сигнала при двухполуполосной фильтрации ППФ₁₁, дополнительно реализовать еще одну процедуру объединения данных — суммирование или вычитание продуктов прямой передачи и полупериодной интерполяции.

4. Фильтр комплексной огибающей (ФКО) по определению [2], иллюстрируемому рис. 2, д, осуществляет полуполосную фильтрацию ППФ₀₁ последовательности $u(k)$, образованной из входных отсчетов в результате смещения их спектра в область нулевых частот. Шаг смещения равен четверти частоты дискретизации входной последовательности, так что образуется спектр $U(p) = F(p + 0,25)$. Такое смещение, как известно, реализуется умножением на экспоненциальную последовательность $\exp \{j\pi k/2\}$:

$$u(k) = f(k) \exp \{j\pi k/2\} = u_R(k) + ju_I(k).$$

В вещественной составляющей продукта умножения

$$u_R(k) = f(k) \cos \pi k/2 = \begin{cases} f(2k) \cos \pi k = u_R(2k); \\ f(2k + 1) \sin \pi k = u_R(2k + 1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

все нечетные отсчеты равны нулю. В мнимой составляющей

$$u_I(k) = f(k) \sin \pi k/2 = \begin{cases} f(2k) \sin \pi k = u_I(2k) = 0; \\ f(2k + 1) \cos \pi k = u_I(2k + 1) \end{cases} \quad (5)$$

равны нулю все четные отсчеты. Таким образом, как это следует из (4), (5) для формирования последовательности $u(k)$ и разде-

ления ее вещественной и мнимой составляющих достаточно умножить входную последовательность $f(k)$ на знаковую функцию $\text{sgn} [\cos \pi/2(k-\epsilon)]$, где ϵ может принимать любые значения в интервале $0 < \epsilon < 1$, и осуществить двухпозиционное мультиплексирование M полученных данных. На рис. 3, б перечисленные процедуры обозначены операторами \otimes и M . Для выделения квадратурных составляющих КО каждая из полученных таким образом последовательностей раздельно фильтруется полуполосным фильтром нижних частот ППФ₀₁. Продукт фильтрации вещественной составляющей $u_R(k)$, как это следует из формулы (2), имеет вид

$$c_R(2k) = H_{01} \{u_R(k)\} = u_R(2k) + L \{u_R(2k+1)\} = u_R(2k), \quad (6)$$

поскольку из (4) следует, что $L \{u_R(2k+1)\} = D$. В этом случае процедура ППФ₀₁ вырождается в процедуру неискаженной передачи четных отсчетов. Продукт фильтрации мнимой составляющей [см. формулу (2)]

$$c_1(2k) = H_{01} \{u_1(k)\} = u_1(2k) + L \{u_1(2k+1)\} = L \{u_1(2k+1)\}, \quad (7)$$

поскольку по определению (5) $u_1(2k) = 0$. В этом случае процедура ППФ₀₁ вырождается в процедуру полупериодной интерполяции нечетных отсчетов. Таким образом, для выделения составляющих КО необходимо: окрасить последовательность отсчетов входного сигнала $f(k)$ знаковой весовой функцией $\text{sgn} [\cos \pi/2(k-\epsilon)]$ (оператор \otimes); осуществить двухпозиционное мультиплексирование окрашенной последовательности (оператор M); выполнить полупериодную интерполяцию нечетных отсчетов $u_1(2k+1)$ окрашенной последовательности (оператор $L\{\cdot\}$) и использовать интерполированные отсчеты в качестве мнимой составляющей КО $c_1(2k)$; использовать четные отсчеты $u_R(2k)$ окрашенной последовательности в качестве вещественной составляющей КО $c_R(2k)$. Схема функциональных преобразований сигнала, иллюстрирующая перечисленные операции, показана на рис. 3, б.

5. Фильтр аналитического сигнала (ФАС) по определению [2], иллюстрируемому рис. 2, е, обеспечивает фильтрацию входной последовательности $f(k)$ в нормированной полосе частот $0 \leq p < 0,5$. ЧХ такого комплексного фильтра $Q(p)$ совпадает со смещенной на четверть частоты дискретизации частотной характеристикой полуполосного фильтра ППФ₀₁. Ей соответствует ИХ вида $q(k) = \Delta(k) + j \sin \pi/2k \sin \pi/2k$, где дельта Кронэкера $\Delta k = 1$ при $k=0$ и $\Delta(k) = 0$ при всех других значениях k . Свертка входной последовательности с такой ИХ при условии двухкратного прореживания данных формирует аналитический сигнал (АС) $a(2k)$. Из сопоставления рис. 2, д и 2, е следует, что тот же результат можно получить, если выделить с помощью ФКО последовательность КО $c(2k)$ и сместить ее спектр на четверть частоты дискретизации входного сигнала. Смещение спектра обеспечивается умножением последовательности отсчетов КО $c(2k)$ на экспоненту $\exp \{j\pi k\} = \cos \pi k$. Поскольку (6) — вещественная составляющая КО

$f(2k) = f(2k) \cos \pi k$, то ее умножение на $\cos \pi k$ формирует вещественную составляющую АС в виде

$$a_R(2k) = u_R(2k) \cos \pi k = f(2k) \cos^2 \pi k = f(2k). \quad (8)$$

Мнимая составляющая КО (7) $c_I(2k) = L \{f(2k+1) \cos \pi k\}$. Следовательно, мнимая составляющая АС определяется выражением $a_I(2k) = \cos \pi k L \{f(2k+1) \cos \pi k\}$ (9). Из соотношений (8), (9) следует, что для выделения квадратурных составляющих АС необходимо: разделить входную последовательность $f(k)$ на последовательности четных $f(2k)$ и нечетных $f(2k+1)$ отсчетов с помощью процедуры двухпозиционного мультиплексирования (оператор M) и использовать выделенную таким образом последовательность четных отсчетов $f(2k)$ в качестве вещественной составляющей АС $a_R(2k)$; окрасить выделенную последовательность нечетных отсчетов $f(2k+1)$ знаковой функцией $\cos \pi k = (-1)^k$ (оператор \otimes); осуществить полупериодную интерполяцию окрашенной последовательности (оператор $L\{\cdot\}$); окрасить интерполированную последовательность знаковой функцией $\cos \pi k = (-1)^k$ (оператор \otimes) и использовать результат в качестве мнимой составляющей АС $a_I(2k)$. Схема функциональных преобразований сигнала, реализующая перечисленные операции, показана на рис. 3, в. Учитывая известное представление мнимой составляющей аналитического сигнала в виде преобразования Гильберта, можно отождествлять с ним представленные на рис. 3, в нижней ветви преобразования.

Рассмотренные процедуры в программной или аппаратной реализации можно использовать для предварительной цифровой обработки сигналов. Выделение КО или АС обеспечивает сужение полосы сигналов, двукратное понижение частоты дискретизации и двухканальное (векторное) их представление. Это особенно полезно при необходимости регулировать фазу или задержку сигналов в цифровых системах пространственной обработки. Полуполосная фильтрация в рассмотренном варианте весьма экономична и обеспечивает определенные преимущества при реализации многополосной КИХ — фильтрации сигналов или дискретно перестраиваемых фильтров [3].

Рассмотренные процедуры фильтрации иллюстрировались на примерах обработки низкочастотных сигналов, спектр которых ограничен диапазоном $\pm \Omega/2$. Однако все они одинаково пригодны и для обработки полосовых сигналов в диапазоне частот $(\omega_0 - \Omega/2) \leq |\omega| \leq (\omega_0 + \Omega/2)$ (2) с целочисленно кратными Ω границами. В этом легко убедиться, сопоставив нормированный (приведенный к частоте дискретизации Ω/π) спектр дискретного полосового сигнала с приведенным к свойственной ему частоте дискретизации $\Omega/2\pi$ спектром низкочастотного сигнала. При обработке полосовых сигналов полуполосным фильтром ППФ₀₁ выделяется спектр основного лепестка в диапазоне $(\omega_0 - \Omega/2) \dots \omega_0$. Фильтр ППФ₁₀ выделяет спектр в диапазоне $\omega_0 \dots (\omega_0 + \Omega/2)$. Двухполосная фильтрация разделяет спектр полосового сигнала на две равные части так же, как и при обработке низкочастотного сигнала. Фильт-

ры комплексной огибающей и аналитического сигнала. Однако по случаю обработки низкочастотного сигнала выделяются лепесток спектра со смещением его центра к нулевой (ФКО) или в его натуральном представлении (ФАС).

Список литературы: 1. *Belanger M. G., Bonnerot G., Coudreuse M. Digital filtering by polyphase network: Application to sample rate alteration and filter bank* // IEEE Trans. ASSP.—24.—1976.—Р. 109—114. 2. *Френкс Л. Теория сигналов.*—М.: Сов. радио, 1974.—200 с. 3. *Капеллини В., Константинович А., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применение.*—М.: Энергоатомиздат, 1983.—180 с.

Поступила в редколлегию 10.01.85