ЗАДАЧА СТАТИСТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА

И. В. Кузьмин, Ф. А. Бекиров

Харьков

Точность — основное требование, предъявляемое к широкому классу систем управления. Система контроля, предназначенная для оценки точности динамической системы, должна характеризоваться некоторым обобщенным критерием качества. Таким критерием является информационный критерий [1].

Достоинством информационного подхода к вопросам точности является возможность перехода от произвольно применяемых или предельных оценок к средневзвешенным показателям точности в виде энтропии и количества информации. Энтропия — единая числовая средневзвешенная характеристика закона распределения, дающая простую связь с количеством информации и дезинформации, содержащейся в исследуемом процессе или вносимой мешающими факторами.

Количество информации, получаемое в процессе контроля, определяется изменением энтропии [1]

$$J_{q_k}(\varepsilon, t) = H_0(\varepsilon, t) - H_{q_k}(\varepsilon, t), \tag{1}$$

где ε — динамическая ошибка системы управления, являющаяся функцией времени;

$H_0(\varepsilon, t)$ — энтропия априорного многомерного закона распределения динамической ошибки;

$H_{q_k}(\varepsilon, t)$ — энтропия апостериорного многомерного закона распределения динамической ошибки после проведения измерения q_k.

Широкий класс систем управления, оптимальных в смысле выбранного критерия, является нелинейным. Задача определения априорного закона $H_0(\varepsilon,t)$ распределения ошибок нелинейных систем—задача анализа нелинейных динамических систем, содержащих случайные параметры и находящихся под воздействием случайных возмущений. В силу неинвариантности оператора нелинейных систем к входным воздействиям эта задача сводится к общей математической задаче преобразования случайных функций случайным оператором. Точных методов решения этой задачи нет. Достаточно общим приближенным методом решения является метод статистических испытаний. Однако при большом числе случайных параметров этот метод неприемлем из-за громоздкости вычислений.

Методом, позволяющим получить решение поставленной задачи с достаточной для практики точностью, является метод статистической линеаризации.

В достаточно общей форме работа многомерной нелинейной динамической системы, содержащей случайные параметры U_k $(k=1, 2, ..., r)$ и находящейся под воздействием случайных возмущений $X_i(t)$ $(i = 1, 2, ..., q)$, представляющих гауссовы белые шумы, может быть описана системой дифференциальных уравнений [2]

$$\frac{dY_i}{dt} = \varphi_i(Y, U, t) + b_i(U, t); \tag{2}$$

$$Y_i(0) = U_{0i}; \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где U — вектор случайных параметров;

Y — вектор переменных системы;

$\varphi_i(Y, U, t)$ — нелинейные функции;

U_{oi} — случайные начальные условия.

Ошибка системы определяется соотношением

$$\varepsilon(t) = Y_к(t) - Y_т(t), \tag{3}$$

здесь $Y_к(t)$ — выходной сигнал на k-м выходе;

$Y_т(t)$ — требуемый выходной сигнал.

После статистической линеаризации нелинейной характеристики $\varphi_i(Y, U, t)$ [3] и применения операции математического ожидания к линеаризованному уравнению система уравнений относительно математических ожиданий примет вид

$$m_i = \varphi_{i0}(m, \theta, u, t) + b_i(u, t)\, m_{x_i}(t), \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

где m — вектор математических ожиданий переменных;
Θ — матрица корреляционных моментов переменных;
u — фиксированный вектор случайных параметров;
$\varphi_{i0}(m, \theta, u, t)$ — статистическая характеристика нелинейного звена.

Применение метода интегрирования моментов [4] к системе уравнений относительно центрированных переменных приводит к системе уравнений относительно взаимных корреляционных моментов переменных:

$$\theta_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} [k_{i\nu}(m, \theta, u, t)\theta_{j\nu} + k_{j\nu}(m, \theta, u, t)\,\theta_{i\nu}] + \frac{1}{2} b_i(u, t)\, b_j(u, t)\,(G_i + G_j);$$

$$\theta_{ij} = \theta_{0ij};\ (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

где G_i, G_j — интенсивности входных белых шумов на i и j входах системы;
Θ_{0ij} — корреляционные моменты случайных начальных условий;
$k_{i\nu}(m, \theta, u, t)$ — коэффициенты статистической линеаризации.

Совместное интегрирование систем уравнений (4), (5) позволяет получить математические ожидания и взаимные корреляционные моменты переменных. Для приближенного интегрирования этих систем на быстродействующих вычислительных машинах применяется метод последовательных приближений, который позволяет заменить совместное интегрирование всех систем уравнений многократным интегрированием этих систем в отдельности.

Задача синтеза оптимальной системы контроля и получения энтропии апостериорного закона распределения ошибки системы $H_{q_k}(\varepsilon, t)$ сводится к задаче синтеза оптимального фильтра, осуществляющего оптимальное преобразование сигнала измерителя.

Выходной сигнал измерителя $x(t)$ выражается через полезный сигнал $\varepsilon(t)$ следующим образом [5]:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} V(t - \tau)\,\varepsilon(t)\, d\tau + n(t), \tag{6}$$

где $V(t-\tau)$ — импульсная переходная функция измерителя;
$n(t)$ — заданная аддитивная помеха измерения.

Функция $V(t-\tau)$ должна отображать как основную особенность измерителя, так и его динамическую неидеальность. В аддитивную помеху включаются постоянно действующие факторы (шумы, дрейфы и т. п.) и переходные процессы, обусловленные ненулевыми начальными условиями.

Фильтр, представляющий собой искомое вычислительное устройство, будем считать идеальным и в общем случае нестационарным; его

выходной сигнал определяется следующим выражением:

$$z(t) = \int_{t_0}^{t_1} W(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau. \qquad (7)$$

Импульсную переходную функцию фильтра $W(t, \tau)$ находим из условия оптимальности воспроизведения сигнала ошибки в момент времени t [6]

$$D(t) = M\{|z(t) - \varepsilon(t)|^2\} = \min. \qquad (8)$$

Если t считать непрерывно изменяющимся, то импульсная переходная функция $W(t, \tau)$ определяет нестационарный фильтр. Развернутое выражение дисперсии ошибки имеет вид [6]

$$D(t) = \int_{t_0}^{t_1} W(t, \tau_1)\, d\tau_1 \int_{t_0}^{t_1} W(t, \tau_2)\, R_{xx}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2 -$$

$$- 2\int_{t_0}^{t_1} W(t, \tau_1)\, R_{\varepsilon x}(t, \tau_1)\, d\tau_1 + R_{\varepsilon\varepsilon}(t, t). \qquad (9)$$

Корреляционные функции $R_{xx}(\tau_1, \tau_2)$, $R_{\varepsilon x}(\tau_1, \tau_2)$ сигналов $x(t)$ и $\varepsilon(t)$ рассчитываются по известным корреляционным функциям $R_{\varepsilon\varepsilon}(\tau_1, \tau_2)$ и $R_{nn}(\tau_1, \tau_2)$ сигналов $\varepsilon(t)$ и $n(t)$. Задавая на интервале (t_0, t_1) произвольную вариацию $\delta W(t, \tau)$ искомой импульсной переходной функции $W(t, \tau)$ и приравнивая нулю соответствующую вариацию выражения (9), получим следующее необходимое условие минимума дисперсии ошибки:

$$\int_{t_0}^{t_1} W(t, \tau_2)\, R_{xx}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2 = R_{\varepsilon x}(t, \tau_1);\ t_0 \leqslant \tau_1 \leqslant t_1. \qquad (10)$$

Это условие представляет собой интегральное уравнение Фредгольма первого рода типа Винера-Хопфа [5, 6]. К настоящему времени разработаны различные методы решения этого уравнения. Наиболее общим является метод канонических разложений [5]. Однако он сложен в использовании. При выполнении некоторых ограничений уравнение можно решить более просто — обобщенным методом Заде-Рагаззини.

В частном случае, когда полезный сигнал и помеха стационарны, а время поступления сигнала достаточно велико (в пределе бесконечно), то решение задачи оптимальной фильтрации значительно упрощается при переходе от временной области к частотной. В этом случае интегральное уравнение можно записать в форме

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(t - \tau_2)\, R_{xx}(\tau_1 - \tau_2)\, d\tau_2 = R_{\varepsilon x}(\tau_1);\ 0 \leqslant \tau_1 < \infty. \qquad (11)$$

Сигналы стационарны и стационарен сам искомый фильтр

$$W(t, \tau) = W(t - \tau). \qquad (12)$$

Применяя к уравнению (11) преобразование Фурье, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |K(j\omega) S_{xx}(\omega) - S_{sx}(\omega)| \, d\omega = 0, \qquad (13)$$

где $S_{xx}(\omega)$ и $S_{sx}(\omega)$ — спектральные плотности, соответствующие корреляционным функциям $R_{xx}(\tau)$ и $R_{sx}(\tau)$:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; \; S_{sx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{sx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \qquad (14)$$

а $K(j\omega)$ — передаточная функция искомого фильтра. Можно показать, что при некоторых ограничениях из (13) следует

$$K(j\omega) S_{xx}(\omega) - S_{sx}(\omega) = X(j\omega). \qquad (15)$$

Уравнение (15), в которое входят две неизвестные функции $K(j\omega)$ и $X(j\omega)$, может быть решено способом факторизации [7].

В общем случае после определения оптимальной импульсной переходной функции минимальная дисперсия ошибки

$$D_0(t) = R_{ss}(t, t) - \int_{t_0}^{t_1} W(t, \tau_1) \, d\tau_1 \int_{t_0}^{t_1} W(t, \tau_2) R_{xx}(\tau_1, \tau_2) \, d\tau_2 . \qquad (16)$$

Если t — текущее значение времени, то $W(t, \tau)$ определяет нестационарный фильтр, реализация которого в общем случае затруднительна. Однако для многих простых прикладных задач оптимальные фильтры могут быть построены без особого труда даже при использовании аналоговых счетно-решающих устройств.

Если значения сигнала поступают через равные промежутки времени, т. е. в моменты $t=0, T, 2T, \ldots$, где T — период дискретности, то для обработки данных могут быть использованы дискретные фильтры, сравнительно легко реализуемые на цифровых вычислительных машинах. В предположении оконечности частотной полосы полезного сигнала численная оценка максимального значения T, при котором ступенчатый сигнал можно считать непрерывным, может быть произведена на основе применения теоремы Котельникова [5]. В этом случае необходимо учитывать ограничения, связанные с неизбежной потерей информации при преобразовании непрерывного сигнала в дискретный.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Касаткин, И. В. Кузьмин. Оценка эффективности автоматизированных систем контроля. Изд-во «Энергия», 1967.
2. И. Е. Казаков. Статистические методы проектирования систем управления. Изд-во «Машиностроение», 1969.
3. И. Е. Казаков, Б. Г. Доступов. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. Физматгиз, 1962.
4. Д. Х. Леннинг, Р. Г. Бэттин. Случайные процессы в задачах автоматического управления. Изд-во иностранной литературы, 1958.
5. В. С. Пугачев. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. Физматгиз, 1960.
6. В. В. Солодовников. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. Физматгиз, 1960.
7. Л. А. Вайнштейн, В. Д. Зубаков. Выделение сигналов на фоне случайных помех. Изд-во «Советское радио», 1962.