УДК 519.714.71

С. В. ЯКОВЛЕВ, канд. физ.-мат. наук., С. Н. ГЕРАСИН

МЕТОД МИНИМИЗАЦИИ ОДНОГО КЛАССА БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ С УЧЕТОМ ПРЕДИКАТНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Рассмотрим множество X логических переменных x_1, x_2, ..., Обозначим через A_X множество, элементами которого являются всевозможные подмножества X. Каждому элементу E из

A_X можно поставить в соответствие конъюнкцию K_E и дизъюн-цию D_E элементов из E.

Пусть задан двоичный предикат, определенный на A_X, и удо-летворяющий следующим условиям: если E^1, $E^2 \in A^X$, $E^1 \subset E$ то из

$$P(E^1) = 0 => P(E^2) = 0, \quad (1)$$
$$P(E^2) = 1 => P(E^1) = 1. \quad (2)$$

Предположим, что задана логическая функция F, представ-ленная в виде конъюнктивной нормальной формы (к. н. ф.)

$$F = \bigwedge_{i=1}^{t} D_{E^1_i}, \quad (3)$$

где $D_{E^1_i}$ — дизъюнкция элементов из $E^1_i \subset A_X$. Данной к. н. ф. соответствует дизъюнктивная нормальная форма (д. н. ф).

$$F = \bigvee_{i=1}^{l} K_{E^2_i}. \quad (4)$$

Здесь $K_{E^2_i}$ — некоторые конъюнкции элементов из $E^2_i \subset A_X$.

Представление (4) эквивалентно следующему:

$$F = F_1 \vee F_2, \quad (5)$$

где F_1 — дизъюнкция таких конъюнктов, входящих в (4), для которых $P\left(K_{E^2_i}\right) = 1$, а F_2 — дизъюнкция таких конъюнктов из (4), что $P\left(K_{E^2_i}\right) = 0$.

Рассмотрим задачу определения F_1 по заданному представле-нию (3). Тривиальный подход к решению этой задачи состоит в следующем. Перемножим все дизъюнкты $D_{E^1_i}$ с последующим применением операций поглощения. Затем выделим все конъюнк-ты $K_{E^2_i}$, для которых предикат $P\left(K_{E^2_i}\right)$ равен 1.

Такой подход применим, если число переменных, входящих в (3), невелико. Кроме того, он не учитывает свойств (1), (2) предиката, которые позволяют предложить более эффективные методы решения поставленной задачи.

Приведем алгоритм, построенный на схеме отсечения и учи-тывающий свойства (1), (2).

Будем последовательно перемножать дизъюнкты $D_{E^1_i}$ входя-щие в (3). На k-м шаге после перемножения k дизъюнктов будет получена д. н. ф., которую мы назовем промежуточной д. н. ф., а конъюнкты, входящие в нее, — промежуточными конъюнктами.

Обозначим через m_k — число промежуточных конъюнктов, по-лученных на k-м шаге, а через n — число переменных.

Положим, что $E^1_i = \left\{x_{p^1_i}, x_{p^2_i}, \ldots, x_{p^{m_i}_i}\right\}$. Пусть i-й промежу-точный конъюнкт имеет вид $x_{q_1} \wedge x_{q_2} \wedge \ldots \wedge x_{q_s}$.

Поставим ему в соответствие n-мерный вектор, у которого на q_i-х местах $(i = \overline{1, r})$ стоят единицы, а на остальных нули. Совокупность таких векторов-строк составит булеву матрицу C. Таким образом, мы построили взаимно-однозначное соответствие между произвольной промежуточной д. н. ф. и булевой матрицей. На первом шаге матрица C состоит из m_1 строк, все элементы i-й строки равны нулю, кроме p_1^i-го места.

Пусть на k-м шаге получена промежуточная д. н. ф., которой соответствует булева матрица $C = \| c_{ij} \|_{m_k \times n}$. Рассмотрим $(k+1)$-й шаг. Перемножим заданную промежуточную д. н. ф. на дизъюнкт $D_{E^1_{k+1}}$. Тогда

$$D_{E^1_{k+1}} = x_{p^1_{k+1}} \vee x_{p^2_{k+1}} \vee \ldots \vee x_{p^{m_{k+1}}_{k+1}}.$$

Поставим в соответствие каждой строке матрицы C характеристическое число ω по следующему правилу: $\omega = -1$, если j-я строка содержит единицы хотя бы на двух из $p_j^1, p_j^2, \ldots, p_j^{m_j}$ местах, т. е. $\exists\, i, r$: $c_{jp_j^i} = 1$, $c_{jp_j^r} = 1$; $\omega = 0$, если j-я строка содержит нули на всех $p_j^1, p_j^2, \ldots, p_j^{m_j}$ местах, т. е. $c_{jp_j^i} = 0 \quad \forall\, i = \overline{1, m_j}$; $\omega = l$, если j-я строка содержит единицу на p_j^l месте, т. е. $\exists\, l$: $c_{jp_j^r} = 1$, $c_{jp} = 0 \ \forall \ i \neq l$.

Алгоритм будет использовать следующие очевидные соображения. Во-первых, если данный промежуточный конъюнкт имеет метку, отличную от нуля, то он не умножается ни на одну из переменных с индексом $p^1_{k+1}, p^2_{k+2}, \ldots, p^{m_{k+1}}_{k+1}$. Действительно, такие метки означают, что рассматриваемый конъюнкт содержит хотя бы одну из переменных $x_{p^i_{k+1}}$, $i = \overline{1, m_{k+1}}$, тем самым нам не потребуется в дальнейшем осуществлять операции поглощения.

Во-вторых, если j-й промежуточный конъюнкт имеет метку 0, то он умножается на переменную $x_{p^i_{k+1}}$ в том случае, когда остальные конъюнкты не имеют метку i (поскольку иначе произойдет поглощение конъюнктом с меткой i домноженного конъюнкта); для любого s-го конъюнкта с меткой i единицы j-й строки не покрывают единиц s-й строки, кроме, быть может, i-го места.

Рассмотрим, как преобразуется матрица C при переходе от одного шага алгоритма к другому. Будем последовательно выбирать промежуточные конъюнкты, входящие в данную промежуточную д. н. ф. При перемножении каждого конъюнкта $K_{E^2_i}$ на переменную $x_{p^j_{k+1}} \in E^1_{k+1}$ в соответствии с указанными выше правилами получим новый промежуточный конъюнкт

$$K_{E^2_\alpha} = x_{p^j_{k+1}} \wedge K_{E^2_i}.$$

Если $P(E_\alpha^2) = 1$, то формируем новую дополнительную стро матрицы C. Эта строка будет отличаться от строки, соответ вующей конъюнкту $K_{E_i^2}$, единицей на p_{k+1}^j-месте.

Если $P(E_\alpha^2) = 0$, то дополнительная строка не формирует Те строки, соответствующие которым конъюнкты домножали на $x_{p_{k+1}^i}$, после $(k+1)$-го шага исключаются.

По окончании t-го шага будет получена матрица C, котор соответствует искомая д. н. ф.

Теорема 1. *Если к. н. ф., переменные которой имеют один ковый индекс, преобразовать в д. н. ф. в соответствии с зако ми дистрибутивности и операциями поглощения, то полученн д. н. ф. будет единственной, минимальной и кратчайшей.*

Доказательство. Пусть булева функция f задана виде к. н. ф.:

$$f = D_{E_1^1} \wedge D_{E_2^1} \wedge \ldots \wedge D_{E_t^1}. \quad (6)$$

Используя законы дистрибутивности и операции поглощени преобразуем исходную к. н. ф. в д. н. ф., получим

$$f = K_{E_1^2} \vee K_{E_2^2} \vee \ldots \vee K_{E_l^2}. \quad (7)$$

Здесь $K_{E_l^2} = z_{l1} \wedge z_{l2} \wedge \ldots \wedge z_{ls_l}$, где z_{ij}, $j = \overline{1,\ s_l}$ булевы пе менные, $s_l \leqslant t$.

Покажем, что полученная д. н. ф. является сокращенно т. е. в представление (7) входят все простые импликант функции.

Рассмотрим произвольную простую импликанту

$$I_k = z_{k1} \wedge z_{k2} \wedge \ldots \wedge z_{kn}. \quad (8)$$

Пусть $z_{k2} = z_{k3} = \ldots = z_{kn} = 1$. Тогда $f \neq 1$. Действительно если бы $f = 1$, то выражение $z_{k2} \wedge z_{k3} \wedge \ldots \wedge z_{kn}$ было импли кантой f, а значит, импликанта I_k не является простой. Следо вательно, никакая импликанта, отличная от I_k, не представим в виде $z_{k2} \wedge z_{k3} \wedge \ldots \wedge z_{kn}$ (на любом наборе z_{ki}, $i = \overline{2,\ n}$, $f = 1$). Это означает, что хотя бы один дизъюнкт $D_{E_r^1}$, $r = \overline{1,}$ в выражении (6) не содержит переменных $z_{k2}, z_{k3}, \ldots, z_{kn}$.

Не теряя общности, положим $r = 1$. Допустим, что все $z_{ki} = 1$, $i = \overline{1,\ n}$. Тогда учитывая, что переменные, входящие в импли канту I_k, имеют одни и те же индексы, получим $f = 1$. Это озна чает, что $D_{E_1^1} = D_{E_2^1} = \ldots = D_{E_m^1} = 1$, т. е. каждый из дизъюнктов содержит хотя бы один из элементов $z_{k1}, z_{k2}, \ldots, z_{kn}$.

Поскольку в дизъюнкт $D_{E_1^1}$ не входят переменные вида z_{kj}, $j = \overline{2,\ n}$, то он содержит переменную z_{k1}. Используя аналогич ные рассуждения, можно показать, что z_{k2} входит в $D_{E_2^1}$, z_{k3} — в $D_{E_3^1}$ и так далее z_{kn} — в $D_{E_n^1}$. Это, в свою очередь, означает, что в представлении (7) будет содержаться простая импликанта I_k вида (8).

Поскольку выбор простой импликанты I_k осуществлялся произвольно, то выражение (7) содержит все свои простые импликанты, т. е. является сокращенной д. н. ф. Известно [1], что использование операций поглощения при преобразовании к. н. ф. в д. н. ф. приводит к тупиковой (относительно этих операций) д. н. ф., которая, как показано выше, должна совпадать с сокращенной д. н. ф. Однако сокращенная д. н. ф. булевой функции f единственная. Кроме того, все минимальные и кратчайшие д. н. ф. содержатся среди тупиковых [1]. Следовательно, полученная д. н. ф. является минимальной и кратчайшей.

На основании теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *В результате работы предложенного алгоритма строится минимальное и кратчайшее представление д. н. ф. F_1, причем единственное.*

Доказательство. Предложенный алгоритм позволяет с использованием специально введенных характеристических чисел последовательно производить операции поглощения. Следовательно, если не выполнять отсечений, использующих предикатные ограничения, то в силу доказанной выше теоремы будет получена единственная, минимальная и кратчайшая д. н. ф. Представим ее в виде (5).

Предположим, что существует другая, отличная от F, д. н. ф. вида $F' = F_1' \vee F_2'$, где F_1' — д. н. ф., для конъюнктов которой соответствующий предикат равен единице, а F_2' — д. н. ф., для конъюнктов которой предикат равен нулю.

Поскольку д. н. ф. F кратчайшая, то все конъюнкты, входящие в F, будут входить и в F'. Следовательно, конъюнкты, входящие в F_1, будут также входить в F_1', т. е. представление вида F_1 является минимальным и кратчайшим. Единственность F_1 следует из единственности F.

Замечание. Если $P(E)=1$ для любого $E \in A_X$, то предложенный алгоритм является, по существу, методом минимизации к. н. ф.

Рассмотрим применение предложенного алгоритма к решению задач аналитического описания областей сложной геометрической формы [2]. Часто возникает необходимость аналитического описания области дополнения к объектам заданной геометрической формы. Будем считать, что исходная область многосвязна, причем каждая компонента связности может быть описана системой линейных неравенств. Каждую такую систему обозначим через S_i. Тогда исходная область S представима в виде объединения систем. Перенумеруем неравенства. В этом случае

S характеризуется д. н. ф., заданной в виде (3), в каждый из конъюнктов которой входят переменные с индексами, соответствующими номерам неравенств образующих системы S_i. Дополнение к области S будет характеризоваться к. н. ф., полученной применением правил де Моргана к исходной д. н. ф. При этом под отрицанием переменной x_i будем понимать переменную с тем же индексом, которому соответствует неравенство с номером i противоположного смысла. Для решения практических задач дополнение к исходной области требуется представить в виде объединения систем, т. е. необходимо произвести прсобразование к. н. ф. в д. н. ф. Для решения этой задачи может быть предложен описанный выше подход. При этом предикатные ограничения будут характеризовать совместность систем линейных неравенств. Будем полагать, что предикат равен 1, если соответствующая система линейных неравенств совместна, и 0 — в противном случае. Такой предикат удовлетворяет свойствам (1)–(2). Заметим, что для проверки совместности системы линейных неравенств существует алгоритм полиномиальной сложности [3].

Проиллюстрируем работу алгоритма на следующем примере.

В таблице даны исходная нумерация линейных неравенств, коэффициенты при переменных и свободные члены. Неравенство с номером i имеет вид $a_i x + b_i y + c_i z + d_i < 0$.

Коэффициент	Номер i											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_i	−1	0	0	1	0	0	−1	−1	1	1	0	0
b_i	0	−1	0	0	1	0	1	0	−1	0	−1	1
c_i	0	0	−1	0	0	1	0	1	0	−1	1	−1
d_i	0	0	0	−5	−4	−6	4	2	3	3	2	4

Пусть исходная область S задана в виде объединения областей, описываемых системами линейных неравенств, которым отвечает логическая формула в виде д. н. ф.:

$$F^* = x_1x_2x_3 \vee x_2x_3x_4x_9x_{10} \vee x_1x_3x_5x_7x_{12} \vee x_3x_4x_5x_{10}x_{12} \vee$$

$$\vee\, x_1x_2x_6x_8x_{11} \vee x_2x_4x_6x_9x_{11} \vee x_1x_5x_6x_7x_8 \vee x_4x_5x_6.$$

Дополнение к области s будет характеризоваться логической формулой в виде к. н. ф.:

$$F = \overline{F}^* = (x_{\overline{1}} \vee x_{\overline{2}} \vee x_{\overline{3}})\,(x_{\overline{2}} \vee x_{\overline{3}} \vee x_{\overline{4}} \vee x_{\overline{9}} \vee x_{\overline{10}})\,(x_{\overline{1}} \vee x_{\overline{3}} \vee$$

$$\vee\, x_{\overline{5}} \vee x_{\overline{7}} \vee x_{\overline{12}}),\ (x_{\overline{3}} \vee x_{\overline{4}} \vee x_{\overline{5}} \vee x_{\overline{10}} \vee x_{\overline{12}})\,(x_{\overline{1}} \vee x_{\overline{2}} \vee x_{\overline{6}} \vee$$

$$\vee\, x_{\overline{8}} \vee x_{\overline{11}})\,(x_{\overline{2}} \vee x_{\overline{4}} \vee x_{\overline{6}} \vee x_{\overline{9}} \vee x_{\overline{11}}),\ (x_{\overline{1}} \vee x_{\overline{5}} \vee x_{\overline{6}} \vee x_{\overline{7}} \vee$$

$$\vee\, x_{\overline{8}})\,(x_{\overline{4}} \vee x_{\overline{5}} \vee x_{\overline{6}}).$$

Черточка над индексом переменной $x_{\overline{i}}$ означает, что ей соответствует неравенство с номером i, но противоположного знака

Поэтому в дальнейшем черточку будем опускать и полагать, что матрица коэффициентов, приведенных в таблице, соответствует неравенствам $a_i x + b_i y + c_i z + d_i > 0$.

При использовании предложенного алгоритма последовательно были получены следующие промежуточные д. н. ф.:

Шаг 1. $x_1 \vee x_2 \vee x_3$

Шаг 2. $x_1x_{10} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_1x_4$

Шаг 3. $x_1x_{10} \vee x_2x_{12} \vee x_3 \vee x_1x_9 \vee x_1x_2 \vee x_2x_7$

Шаг 4. $x_1x_{10} \vee x_2x_{12} \vee x_3 \vee x_1x_9x_{12} \vee x_2x_7x_{10}$

Шаг 5. $x_1x_{10} \vee x_2x_{12} \vee x_3x_{11} \vee x_1x_9x_{12} \vee x_2x_7x_{10} \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_3x_8$

Шаг 6. $x_1x_{10}x_{11} \vee x_2x_{12} \vee x_3x_{11} \vee x_1x_9x_{12} \vee x_2x_7x_{10} \vee x_1x_3x_9 \vee$
$\vee x_2x_3 \vee x_3x_8x_9 \vee x_1x_2x_{10} \vee x_1x_9x_{10}$

Шаг 7. $x_1x_{10}x_{11} \vee x_2x_8x_{12} \vee x_3x_8x_{11} \vee x_1x_9x_{12} \vee x_2x_7x_{10} \vee$
$\vee x_1x_3x_9 \vee x_2x_3x_8 \vee x_3x_8x_9 \vee x_1x_2x_{10} \vee x_1x_9x_{10} \vee$
$\vee x_1x_2x_{12} \vee x_1x_3x_{11} \vee x_3x_7x_{11} \vee x_1x_2x_3 \vee x_2x_3x_7$

Шаг 8. $x_1x_5x_{10}x_{11} \vee x_2x_4x_8x_{12} \vee x_3x_4x_7x_{11} \vee x_1x_6x_9x_{12} \vee$
$\vee x_2x_6x_7x_{10} \vee x_3x_5x_8x_9$

Итак, полученная на последнем шаге д. н. ф. является искомой. Каждому ее конъюнкту соответствует система неравенств, которая совместна, а номерам неравенств соответствуют индексы переменных, входящих в конъюнкт. Время решения задачи на ЭВМ ЕС 1030 составило 2 с.

Список литературы: 1. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику.— М.: Наука, 1979.— 272 с. 2. *Рвачев В. Л.* Теория *R*-функций и некоторые приложения.— К.: Наук. думка, 1982.— 552 с. 3. *Хачиян Л. Г.* Полиномиальный алгоритм в линейном программировании.— Докл. АН СССР, 1979, 4, № 5, с. 1093—1096.

Поступила в редколлегию 12.01.84.