УДК 621.391

М. А. ИВАНОВ, д-р. техн. наук,
И. А. ЯКОВЛЕВ, канд. физ.-мат. наук,
А. И. ЯКОВЛЕВА

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДИСКРЕТНЫХ ФАЗОВОЧАСТОТНОМОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Реальные модуляторы характеризуются наличием случайных ошибок формирования информационных колебаний [1—3]. Поэтому для корректного анализа качества обработки последних необходимо определять их вероятностные характеристики [1]. Учитывая перспективность применения сигналов с комбинированной фазово-частотной модуляцией (ФЧМ) [3], представляется целесообразным найти закон распределения вероятностей сигналов данного вида.

Рассмотрим наиболее важный случай формирования ФЧМ-колебаний методом «наложенной модуляции» [2] с независимыми фазовой и частотной информационными координатами. Получаемые при этом реализации $S_{ij}(t)$ ФЧМ-сигнала $S(t)$ аналитически могут быть описаны следующим образом [3]:

$$S_{ij}(t) = A\cos(\omega_i t + \varphi_j), \qquad (1)$$

где A — амплитуда ФЧМ-сигнала, $A = \mathrm{const}(i, j)$; ω_i — i-е информационное (разрешенное) значение мгновенной частоты ω ФЧМ-сигнала, $i \in [1, k]$ и $(\omega_m - \omega_{m-1}) \overset{\circ}{=} \Delta\omega = \mathrm{const}(m)$; $\forall m \in [2, k]$; $\omega_{i_1} > \omega_{i_2}$, $\forall i_1 > i_2$; $i_1, i_2 \in [1, k]$; t — текущее время; φ_j — j-е разрешенное значение мгновенной начальной фазы φ ФЧМ-сигнала, причем $j \in [1, l]$ и

$$|\varphi_n - \varphi_{n-1}| = (2\pi/l) \overset{\circ}{=} \Delta\varphi = \mathrm{const}\,(n), \ \forall n \in [2, l];$$

k, l — конечные натуральные числа, являющиеся количественными характеристиками используемого модуляционного формата передаваемых ФЧМ-сигналов [3].

Введем достаточно обоснованное с теоретической и практической точек зрения предположение о том, что случайные ошибки формирования независимых частотной и фазовой информационных координат ФЧМ-сигнала, в свою очередь, также являются независимыми и подчиняются усеченным нормальным законам распределения вероятностей с плотностями

$$f_{\omega_i}(\omega) = \begin{cases} [2\sigma_\omega\sqrt{2\pi}\hat{\Phi}\,(\delta\omega/\sigma\omega]^{-1}\exp[-(\omega-\omega_i)^2/2\sigma_\omega^2], \\ \forall\omega \in [(\omega_i - \delta\omega),\ (\omega_i + \delta\omega)]; \\ 0,\ \forall\omega \overline{\in} [(\omega_i - \delta\omega),\ (\omega_i + \delta\omega)]. \end{cases}, \ \forall i; \tag{2}$$

$$f_{\varphi_j}(\varphi) = \begin{cases} [2\sigma_\varphi\sqrt{2\pi}\hat{\Phi}\,(\delta\varphi/\sigma_\varphi)]^{-1}\exp[-(\varphi-\varphi_j)^2/2\sigma_\varphi^2], \\ \forall\varphi \in [\varphi_j - \delta\varphi),\ (\varphi_j + \delta\varphi)]; \\ 0,\ \forall\varphi \overline{\in} [(\varphi_j - \delta\varphi),\ (\varphi_j + \delta\varphi)] \end{cases}, \ \forall j, \tag{3}$$

где σ_ω^2, σ_φ^2 — дисперсия случайных отклонений соответственно мгновенных частоты и начальной фазы ФЧМ-сигнала от их i-го или j-го разрешенных (информационных) значений, причем обычно справедливо $\sigma_\omega^2 = \mathrm{const}\,(i)$, $\sigma_\varphi^2 = \mathrm{const}\,(j)$; $\delta\omega$, $\delta\varphi$ — полуинтервалы усечения (допустимого изменения) параметров ω, φ соответствующих законов распределения, причем для реальных ФЧМ-модуляторов как правило $\delta\omega \leqslant (\Delta\omega/2)$, $\delta\varphi \leqslant (\Delta\varphi/2)$, причем в случае высококачественного формирования ФЧМ-сигналов обычно выполняется $\delta\omega \ll (\Delta\omega/2)$, $\delta\varphi \ll (\Delta\varphi/2)$; $\hat{\Phi}(\cdot)$ — модифицированная функция Крама, равная половинному значению табулированной функции $\Phi(\cdot)$ [1], т. е.

$$\hat{\Phi}(x) = \frac{1}{2}\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \exp(-\eta^2/2)\,d\eta. \tag{4}$$

Тогда совместная плотность вероятностей случайной функции $\omega_i t$ и случайной величины φ_j математически может быть описана соотношением

$$f_{ij}(\omega t, \varphi) = \begin{cases} (1/t)\,f_{\omega_i}(\omega/t)\,f_{\varphi_j}(\varphi);\ (\forall\omega \in [\omega_i - \delta\omega,\ \omega_i + \delta\omega]) \cap \\ \cap(\forall\varphi \in [\varphi_j - \delta\varphi,\ \varphi_i + \delta\varphi]); \\ 0,\ (\forall\omega \overline{\in} [\omega_i - \delta\omega,\ \omega_i + \delta\omega]) \cup (\forall\varphi \overline{\in} [\varphi_i - \delta_i, \\ \varphi_i + \delta\varphi]);\ \forall i \text{ и } \forall j. \end{cases} \tag{5}$$

С учетом выражений (2), (3) перепишем формулу (5):

$$f_{ij}(\omega t,\varphi)=\begin{cases}[8\pi t\hat{\Phi}(\delta\omega/\sigma_\omega)\hat{\Phi}(\delta\varphi/\sigma_\varphi)\sigma_\omega\sigma_\varphi]^{-1}\exp\{-[(\omega-\omega_i^2)/2t^2\sigma_\omega^2]-\\-[(\varphi-\varphi_j)^2/2\sigma_\varphi^2]\},\ (\forall\omega\in[\omega_i-\delta\omega,\ \omega_i+\delta\omega])\cap\\ \cap(\forall\varphi\in[\varphi_i-\delta\varphi,\ \varphi_i+\delta\varphi]);\\ 0,\ (\forall\omega\bar{\in}[\omega_i-\delta\omega,\ \omega_i+\delta\omega])\cup(\forall\varphi\bar{\in}[\varphi_i-\delta\varphi,\ \varphi_i+\delta\varphi],\end{cases} \tag{6}$$

что справедливо $\forall\ i\in[1,k]$ и $\forall\ j\in[1,l]$.

Найдем закон распределения вероятностей для случайной функции

$$z_{ij}(t)\overset{\circ}{=}\omega_i t+\varphi_j. \tag{7}$$

Для достижения данной цели введем замену переменных $u_i\overset{\circ}{=}\omega_i t$ и тогда интегральный закон распределения вероятностей $F_{ij}(z)$ случайной функции $z_{ij}(t)$ определится случайным образом:

$$F_{ij}(z)=p(u+\varphi<z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dz\int\limits_{-\infty}^{z-u}f_{ij}(u,\ \varphi)\,du. \tag{8}$$

Отсюда следует, что для нахождения плотности распределения вероятностей $f_{ij}(z)$ случайной функции $z_{ij}(t)$ необходимо выполнить интегрирование

$$f_{ij}(z)=\int\limits_{u_i-\delta u}^{u_i+\delta u}f_{ij}(u,z-u)\,du=\int\limits_{u_i-\delta u}^{u_i+\delta u}f_i(u)f_j(z-u)\,du=$$

$$=\int\limits_{u_i-\delta u}^{u_i+\delta u}(1/t)f_i(u/t)\,f_j(z-u)\,du=\int\limits_{(\omega_i-\delta\omega)t}^{(\omega_i+\delta\omega)t}[8\pi t\hat{\Phi}(\delta\omega/\sigma_\omega)\hat{\Phi}\times$$

$$\times(\delta\varphi/\sigma_\varphi)\sigma_\omega\sigma_\varphi]^{-1}\exp\{-[(u-\omega_i t)^2/2t^2\sigma_\omega^2]-$$

$$-[(z-u-\varphi_j)^2/2\sigma_\varphi^2]\}\,du. \tag{9}$$

После алгебраических преобразований показателя экспоненты соотношение (8) можно переписать как

$$f_{ij}(z)=\int\limits_{(\omega_i-\delta\omega)t}^{(\omega_i+\delta\omega)t}[8\pi t\hat{\Phi}(\delta\omega/\sigma_\omega)\hat{\Phi}(\delta\varphi/\sigma_\varphi)\sigma_\omega\sigma_\varphi]^{-1}\exp\{[-(\sigma_\varphi^2+$$

$$+t^2\sigma_\omega^2)/2t^2\sigma_\varphi^2\sigma_\omega^2][u-(\sigma_\varphi^2+t^2\sigma_\omega^2)^{-1}(\sigma_\varphi^2\omega_i t+\sigma_\omega^2 t^2(z-\varphi_j))]^2-$$

$$-(z-\omega_i t-\varphi_j)^2(\sigma_\varphi^2+t^2\sigma_\omega^2)^{-1}\eta^{-1}\}\,du. \tag{10}$$

Вводя обозначения

$$V_\pm\overset{\circ}{=}\{(\omega_i\pm\delta\omega)t-[\sigma_\varphi^2\omega_i t+\sigma_\omega^2 t^2(z-\varphi_j)]/(\sigma_\varphi^2+t^2\sigma_\omega^2)\}\times$$

$$\times\sqrt{\sigma_\varphi^2+t^2\sigma_\omega^2}\,(t\sigma_\varphi\sigma_\omega)^{-1} \tag{11}$$

и производя интегрирование в пределах от V_- до V_+, имеем окончательно

$$f_{ij}(z) = [\hat{\Phi}(V_+) - \hat{\Phi}(V_-)] \exp[(z - \omega_i t - \varphi_j)^2/2(\sigma_\varphi^2 + t^2\sigma_\omega^2)] \times$$

$$\times [4\sqrt{2\pi}\hat{\Phi}(\delta\omega/\sigma_\omega)\hat{\Phi}(\delta\varphi/\sigma_\varphi)\sqrt{\sigma_\varphi^2 + t^2\sigma_\omega^2}]^{-1}. \quad (12)$$

Определим плотность распределения вероятностей случайной функции $S_{ij}(t)$ выражения (11), для которой с учетом формулы (7) запишем $S_{ij}(t) = A\cos z_{ij}(t)$. **(13).** Тогда получим общее аналитическое соотношение для нахождения интегрального закона распределения случайной функции $S_{ij}(t)$

$$F_{ij}(y) = \begin{cases} 0, \ \forall y < -A; \\ p[A\cos z_{ij}(t) < y], \ \forall |y| \leqslant A; \\ 1, \ \forall y > A \end{cases}. \quad (14)$$

Учтем также, что реально используемые сигналы являются узкополосными (по отношению к несущей частоте) [1—3], следовательно, $(2\pi/T) \ll \omega_i, \forall i \in [1, k]$ **(15)**, где T — длительность тактового интеграла. Таким образом, для любого $|y| < A$ за время каждого такта неравенство $S(t) < y$ выполняется на участках $2(q-1)\pi + \arccos(y/A) < z < (2q-1)\pi - \arccos(y/A)$, причем для всех сочетаний значений начальной фазы ФЧМ-сигнала на соседних тактах данное неравенство $S_{ij}(t) < y$ выполняется не менее (n_i^{-1}) раз, т. е. $q \in [1, (n_i - 1)]$, где n_i — наибольшее целое число от частного $(T\omega_i/2\pi$. Поскольку для узкополосных ФЧМ-сигналов $(n_i - 1 \approx \approx n_i \gg 1, \forall_i \in [1, k]$, то остатком $[(T\omega_i/2\pi) - (n_i - 1)]$ можно пренебречь, поэтому математическое описание интегрального закона распределения вероятностей $\overline{F}_{ij}(y)$ случайной функции $S_{ij}(t)$ приобретает вид

$$\overline{F}_{ij}(y) \cong \sum_{q=1}^{n_i-1} \int\limits_{1/\omega_i[2(q-1)\pi + \arccos(y/A)]}^{1/\omega_i[(2q-1)\pi - \arccos(y/A)]} f_{ij}(z)\,dz. \quad (16)$$

Отсюда следует, что дифференциальный закон распределения (вероятностная мера — плотность распределения) вероятностей $f_{ij}(y)$ случайной функции $S_{ij}(t)$ математически может быть описан следующим образом:

$$\overline{f}_{ij}(y) \cong \frac{1}{\sqrt{A^2 - y^2}} \sum_{q=1}^{n_i-1} \{f_{ij}[(2q-1)\pi - \arccos(y/A)] -$$

$$- f_{ij}[2(q-1)\pi + \arccos(y/A)]\}. \quad (17)$$

Найдем закон распределения ФЧМ-сигнала $S(t)$ с учетом возможного различия вероятностей появления его реализаций $S_{ij}(t)$ [3], т. е. неравных (в общем случае) величин $p'_i \cdot p''_j =$

$= p_{ij}$. Здесь P'_i — априорная вероятность появления i-го значения мгновенной частоты ФЧМ-сигнала $S(t)$, а p''_j — априорная вероятность появления j-го значения φ_j начальной фазы данного сигнала. При этом $\sum_{i=1}^{k} p'_i = 1$; $\sum_{j=1}^{l} p''_j = 1$ и, следовательно $\sum_{i=1}^{k} p_{ij} = p''_j$, $\sum_{j=1}^{l} p_{ij} = p'_i$ и $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} p_{ij} = 1$.

Тогда искомый дифференциальный закон распределения вероятностей ФЧМ-сигнала $S(t)$ окончательно может быть описан аналитическим соотношением общего вида

$$f(y) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} p'_i p''_j \bar{f}_{ij}(y). \qquad (18)$$

Полученные в работе результаты применимы не только к ФЧМ-колебаниям, но и к ФМ-сигналам (при $\omega_i = \omega = \mathrm{const}$ [i]), а также и к ЧМ-сигналам с «непрерывной фазой» (ЧМн — при $\varphi_i = \varphi = \mathrm{const}$ [j]). Кроме того, если каждое информационное значение мгновенной средней частоты сигнала сопровождать некоторым отдельным («собственным») фиксированным значением его начальной фазы, то приведенные выше результаты применимы и для ЧМ-колебаний с «разрывом» фазы. Используя представленную методику, можно описать вероятностные характеристики и других видов дискретных сигналов: с амплитудной, амплитудно-фазовой, амплитудно-частотной и амплитудно-частотно-фазовой модуляцией.

Список литературы: 1. *Коржик В. И., Финк Л. М., Щелкунов К. Н.* Расчет помехоустойчивости систем передачи дискретных сообщений. Справочник/Под ред. Л. М. Финка. М., 1981. 232 с. 2. *Спилкер Дж.* Цифровая спутниковая связь/Пер. с англ. Под ред. В. В. Маркова. М., 1979. 592 с. 3. *Иванов М. А., Макаренко Б. И., Яковлев И. А.* Фазово-частотная модуляция дискретных сигналов//Радиотехника. 1985. № 11. С. 62—65.

Поступила в редколлегию 06.01.88