

# Тестування Методу Скінченних Сум Фур'є для Реконструкції 2D Зображень з Обчисленням Коефіцієнтів за допомогою Проекцій

Олег М. Литвин  
кафедра вищої та прикладної  
математики  
Українська інженерно-педагогічна  
академія  
Харків, Україна  
academ\_mail@ukr.net

Олександра Литвин  
кафедра прикладної математики  
Харківський національний  
університет радіоелектроніки  
Харків, Україна  
litvinog@ukr.net

Марк Бобков  
студент магістр  
кафедра прикладної математики  
Харківський національний  
університет радіоелектроніки  
Харків, Україна  
mark.bobkov@nure.ua

## Testing of the Method Finite Sums Fourier for Reconstruction of 2D Images with Calculation of Coefficients by Projections

Oleg M. Lytvyn  
Department of High and Applied  
Mathematics  
Ukrainian engineering-pedagogical  
academy  
Kharkiv, Ukraine  
academ\_mail@ukr.net

Oleksandra Lytvyn  
Department of Applied  
Mathematics  
Kharkiv National University  
of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
litvinog@ukr.net

Mark Bobkov  
Master's student  
Department of Applied Mathematics  
Kharkiv National University  
of Radio Electronics  
Kharkiv, Ukraine  
mark.bobkov@nure.ua

**Анотація** — Досліджується метод обчислення коефіцієнтів Фур'є функції двох змінних за допомогою проєкцій, які поступають з комп'ютерного томографа. Ці коефіцієнти Фур'є використовуються в скінченних сумах Фур'є для наближення вказаних функцій, що описують внутрішню структуру 2D зображення. Наведено результати тестування методу

**Abstract** — The method of calculating the Fourier coefficients of the functions of two variables using projections coming from a computer tomograph is explored. These Fourier coefficients are used in finite Fourier sums to approximate the specified functions that describe the internal structure of a 2D image. The results of testing the method are given

**Ключові слова** — комп'ютерна томографія; реконструкція; зображення; розривна функція; сума Фур'є

**Keywords** — computer tomography; reconstruction; image; discontinuous function; sum Fourier

### I. ВСТУП

У 1917 році І. Радоном було доведено, що кожну функцію  $n$  змінних можна однозначно визначити не тільки за її значеннями в окремих точках, але і за

допомогою інтегралів вздовж системи ліній ( $n \geq 2$ ) або системи площин ( $n \geq 3$ ), тобто за допомогою проєкцій.

У 1979 році А. Кормаку і Г. Хаунсфілду була присуджена Нобелівська премія за створення комп'ютерного томографа. Такий томограф дозволяє на основі оберненого перетворення Радона наближено відновлювати внутрішню структуру тіла за відомими проєкціями – даними Радона.

У роботах [3, 4] досліджувався метод наближеного представлення функції двох змінних скінченими сумами Фур'є, у якому коефіцієнти Фур'є знаходяться за допомогою проєкцій з використанням прямого і оберненого перетворення Радона.

Цей метод відомий під назвою прямий метод ( $n \geq 2$ ) (DFM). Для отримання експериментальних даних в методі DFM використовується паралельна схема сканування. Основна ідея DFM методу полягає у знаходженні перетворення Фур'є проєкцій  $p$  і використання їх для знаходження перетворення Фур'є функції  $f$ , що описує досліджуваний образ. Чисельна реалізація включає в себе дискретне перетворення Фур'є  $p$  та обернене дискретне



Інформаційні системи та технології ICT-2019

Секція 2.

Математичне та комп'ютерне моделювання у інформаційних системах.

перетворення функції  $f$  з використанням швидкого перетворення Фур'є.

Тому, для відновлення образу  $N \times N$  метод DFM попадає в число дуже швидких методів, з числом арифметичних операцій пропорційним  $N^2 \log N$ . Але існує дві проблеми, що виникають при його чисельній реалізації. Перша проблема полягає в необхідності виконувати процедуру інтерполяції в Фур'є просторі, що є непростою процедурою. Автори DFM методу стверджують, що всі поліноміальні методи інтерполяції не підходять для цієї мети. Тому вони пропонують інший метод інтерполяції, побудований за допомогою рядів Фур'є та теореми про центральний перетин (Sampling Theorem).

Друга проблема полягає в тому, що на практиці контури образів мають загострення, кутові точки, що приводить до появи розривів у функції  $f$ . Добре відомо, що при наближенні такої функції скінченними сумами Фур'є, виникає явище Гіббса. Воно породжує осциляції, яких оригінал не має.

Автори методу DFM стверджують, що вони дослідили кілька методів боротьби з явищем Гіббса і в результаті запропонували два різних шляхи усунення великої частини осциляцій. Перший з них є простим застосуванням експоненціального фільтра для коефіцієнтів Фур'є. Другий шлях використовує той факт, що амплітуда осциляції пропорційна стрибку функції  $f$ . Стрибки мають різні величини для типових застосувань. Наприклад, череп людини має більшу щільність ніж мозок всередині, що приводить до найбільшого стрибка функції  $f$  біля поверхні черепа. Тому частина проєкцій, що відповідають черепу видаляється перед обчисленням образу. Тести підтверджують великі можливості запропонованого методу. Крім того у працях Готліба і Густавсона [3, 4] наведені також різні методи побудови скінченних сум Фур'є. Зокрема, коефіцієнти Фур'є помножуються на визначені відповідним чином множники. Це дає зменшення впливу явища Гіббса на кінцевий результат.

У 2000 році О. М. Литвин [1] запропонував метод обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних за допомогою проєкцій – інтегралів від наближуваної функції вздовж заданої системи базових прямих. Розміщення цих прямих визначається індексами в коефіцієнтах Фур'є. Для отримання експериментальних даних-проєкцій в цьому методі також використовується паралельна схема сканування. Пропонується шукати наближений розв'язок двовимірної задачі радонівської комп'ютерної томографії у вигляді скінченних сум Фур'є. Але для знаходження коефіцієнтів Фур'є за допомогою проєкцій, що поступають з комп'ютерного томографа, не використовуються властивості перетворення Радона. Використовується лише означення проєкції, як інтеграла вздовж прямої, що перетинає об'єкт дослідження.

Цей новий метод відновлення двовимірних образів за допомогою проєкцій та скінченних сум Фур'є більш ефективний ніж вказаний вище метод з обчислювальної

точки зору. Але вимагає спеціального вибору множини базових прямих, вздовж яких отримуються експериментальні дані. Тобто пропонується використовувати нову схему сканування.

Наведений метод досліджувався в [2, 5–9] та інших роботах.

Як відомо [2, 3, 4], наближення розривних функцій однієї і багатьох змінних скінченними сумами Фур'є призводить до явища Гіббса. Це явище виникає також в комп'ютерній томографії [3, 4, 5].

В даній роботі основна увага приділяється тестуванню розгляданого методу скінченних сум Фур'є [1] для неперервних та диференційованих функцій. Для випадку розривних функцій для ілюстрації виникаючих проблем використовується метод скінченних сум Фур'є і метод скінченних сум Фейєра, що має згладжувальний ефект.

Далі коротко для повноти та систематичності викладення матеріалу буде наведено основні аспекти та формули досліджуваного методу.

## II. ОСНОВНІ ТВЕРДЖЕННЯ МЕТОДУ О. М. ЛИТВИНА ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ФУР'Є ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ПРОЄКЦІЙ

Проблема обчислення коефіцієнтів Фур'є за допомогою проєкцій виникає зокрема, в комп'ютерній томографії, при неруйнівному контролі на митниці тощо.

Теоретичні положення методу обчислення коефіцієнтів Фур'є за допомогою проєкцій методом О. М. Литвина наведено в [1]. Наводимо цю інформацію і ілюструємо застосування методу при розв'язанні задач комп'ютерної томографії.

Задача реконструкції зображень полягає у відновленні функції  $f(x, y)$  за відомими проєкційними даними – значеннями інтегралів  $\gamma_\mu$  вздовж прямих  $L_\mu$ , які перетинають об'єкт дослідження:

$$\int_{L_\mu} f(x, y) dl = \gamma_\mu, \quad \mu = \overline{1, Q}, \quad (1)$$

Надалі будемо вважати, що об'єкт дослідження належить квадрату  $D = [0, 1]^2$ . Цю задачу можна інтерпретувати як задачу відновлення функції  $f(x, y)$  – коефіцієнта поглинання рентгенівських променів. Або як задачу дослідження щільності  $f(x, y)$  всередині деякого тіла на площині  $Oxy$  методами рентгенівської комп'ютерної томографії. Проєкційні дані, які є експериментальними даними, надходять з комп'ютерного томографа.

Згідно з [1], наближення для функції  $f(x, y)$  шукається у вигляді скінченної суми Фур'є або Фейєра відповідно:



$$f(x, y) \approx \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N F_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)}. \quad (2)$$

$$f(x, y) \approx \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \left(1 - \frac{|l|}{N+1}\right) F_{k,l} \cdot e^{i2\pi(kx+ly)}. \quad (3)$$

Коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулою:

$$F_{k,l} = \iint_D f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy. \quad (4)$$

Особливістю і перевагою розробленого методу є те, що в ньому використовуються явні формули для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є функції двох змінних через значення проєкцій, які отримані автором. Це звело розв'язання задачі до обчислення інтегралів. Вибір системи прямих, вздовж яких задаються проєкційні дані, обумовлений значеннями індексів  $k$  та  $l$  у сумі Фур'є. Отже, і вигляд інтегралів, і вигляд формул для їх обчислення, також обумовлений значеннями індексів  $k$  та  $l$  у сумі Фур'є.

Далі для обчислення коефіцієнтів Фур'є  $F_{k,l}$  за допомогою проєкцій розглядаємо окремо випадки щодо знаків  $k$  та  $l$ . Зокрема, для випадку  $k > 0$  і  $l > 0$  робимо заміну змінних:

$$kx + ly = t, \quad -lx + ky = v,$$

$$x = x(t, v) = \frac{kt - lv}{k^2 + l^2}, \quad y = y(t, v) = \frac{lt + kv}{k^2 + l^2}.$$

У результаті область інтегрування  $D$  розбі'ється на три підобласті  $D_1, D_2, D_3$ , коли  $k > l$  або  $k < l$ , та на дві підобласті  $D_1$  та  $D_3$ , якщо  $k = l$ . Ці випадки відображені на рис. 1.

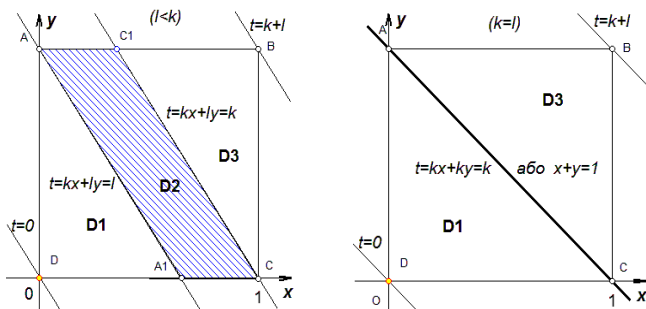


Рис. 1. Розбиття області  $D$  на підобласті  $D_1, D_2, D_3$

Тоді:

$$F_{k,l} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Інтеграл  $I_1$  по області  $D_1$  для випадку, коли  $k > l > 0$ , зводиться до вигляду:

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{D_1} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy = \\ &= \iint_{D_1} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) e^{-i2\pi t} |J| dt dv = \\ &= \int_0^l \frac{e^{-i2\pi t}}{k^2+l^2} dt \int_{-\frac{t}{k}}^{\frac{t}{l}} f\left(\frac{kt-lv}{k^2+l^2}, \frac{lt+kv}{k^2+l^2}\right) dv. \end{aligned}$$

Тут враховано значення якобіана:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{k}{k^2+l^2} & \frac{-l}{k^2+l^2} \\ \frac{l}{k^2+l^2} & \frac{k}{k^2+l^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{k^2+l^2},$$

Аналогічно визначаються інтеграли  $I_2, I_3$ .

Зауважимо, що у внутрішньому інтегралі інтегрування проводиться вздовж ліній  $kx + ly = t$ . Тобто, ці інтеграли можуть інтерпретуватися як проєкції вздовж заданої лінії, що надходять з комп'ютерного томографа при кожному фіксованому  $t$ . Знайдені таким чином коефіцієнти Фур'є підставляємо в суму Фур'є або Фейера для наближення функції  $f(x, y)$ .

В основі чисельної реалізації запропонованого методу наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є лежить заміна під знаком інтеграла періодичної експоненціальної функції  $e^{-i2\pi t}$  кусково-сталими періодичними сплайнами  $Cp(m, 2\pi t)$ ,  $Sp(m, 2\pi t)$ .

$$e^{-i2\pi t} = \cos 2\pi t - i \sin 2\pi t \approx Cp(m, 2\pi t) - iSp(m, 2\pi t).$$

У цій формулі  $m$  – кількість інтервалів розбиття чверть періоду функцій  $\cos 2\pi t$  та  $\sin 2\pi t$  на підінтервали. В цих підінтервалах відповідні періодичні функції  $\cos 2\pi t$  та  $\sin 2\pi t$  замінюються сталою величиною найкращого рівномірного наближення вказаних функцій.

Наводимо оцінку похибки, яка при цьому виникає:

$$|\cos(2\pi t) - Cp(m, 2\pi t)| \leq 0,5m^{-1},$$

$$|\sin(2\pi t) - Sp(m, 2\pi t)| \leq 0,5m^{-1}.$$

Тоді інтеграл  $I_1$  замінюється інтегралом:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= \iint_{D_1} f(x(t, v), y(t, v)) \times \\ &\times (Cp(m, 2\pi t) - iSp(m, 2\pi t)) \cdot |J| \cdot dt dv. \end{aligned}$$



Аналогічно інтеграли  $I_2, I_3$  замінюються інтегралами  $\tilde{I}_2, \tilde{I}_3$ . Тобто  $F_{k,l} \approx \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + \tilde{I}_3 = \tilde{I}$ .

Вважаємо, що при кожному фіксованому  $t = t_\mu$  інтеграли по змінній  $v$  є проекціями.

$$\gamma_\mu = \int_{-\frac{h_\mu}{k}}^{\frac{h_\mu}{k}} f(x(t_\mu, v), y(t_\mu, v)) dv, \quad \mu = \overline{1, Q}.$$

Аналогічні твердження справедливі і для інтегралів  $\tilde{I}_2, \tilde{I}_3$ .

Вважаємо, що загальна кількість проекцій, які надходять з комп'ютерного томографа дорівнює  $Q$ . Це означає, що вони є інтегралами вздовж прямих  $kx + ly = t_\mu = (\mu - 0,5)h_{k,l}$ ,  $h_{k,l} = \frac{k+l}{Q}$ ,  $\mu = \overline{1, Q}$ .

Обчислюємо  $\tilde{I}$  за формулою центральних прямокутників за змінною  $t$ . Позначимо отриманий інтеграл через:

$$I_{k,l}^* = \sum_{\mu=1}^Q \left[ \left[ Cp(m, 2\pi t_\mu) - iSp(m, 2\pi t_\mu) \right] \gamma_\mu \right] h_{k,l} |J|.$$

При цьому виникає похибка:

$$|\tilde{I} - I_{k,l}^*| = \varepsilon_l = O(h_{k,l}^r), \quad r = 1, 2.$$

Визначимо співвідношення між порядком  $N$  сум Фур'є диференційовних функцій та кількістю  $Q$  проекцій, необхідних для забезпечення потрібної точності.

Загальна похибка, яка виникає при заміні  $F_{k,l}$  числом  $I_{k,l}^*$  визначається наступною нерівністю:

$$|F_{k,l} - I_{k,l}^*| = |(F_{k,l} - \tilde{I}) + (\tilde{I} - I_{k,l}^*)| \leq 0,5m^{-l} + \varepsilon_l.$$

Використаємо наступну оцінку для похибки наближення функції:

$$f(x, y) \in C^r(D), \quad r \geq 1, \quad D = [0, 1]^2:$$

$$\max_{(x,y) \in D} |f(x, y) - S_N f(x, y)| = O(N^{-r}).$$

**Теорема.** Між величинами  $m$ ,  $Q$  та  $N$  справедливе співвідношення:

$$N^{-r} = 0,5m^{-l} + \max_{-N \leq k, l \leq N} h_{k,l} \frac{M_2}{24}.$$

Тут

$$h_{k,l} = \frac{k+l}{Q}, \quad M_2 = \max_{(x,y) \in D} |f^{(2)}(x, y)|.$$

Звертаємо увагу на взаємозв'язок між точністю наближення диференційовних функцій, порядком  $N$  суми Фур'є та кількістю  $Q$  проекцій для обчислення коефіцієнтів Фур'є  $F_{k,l}$  [6].

### III. ТЕСТУВАННЯ МЕТОДУ ДЛЯ ФУНКЦІЙ НЕПЕРЕРВНИХ І ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ

Розглядаємо застосування методу скінченних сум Фур'є для відновлення функцій заданих в областях, що є об'єднанням областей спеціального вигляду. З цією метою введемо тестові функції з носіями в областях однакової структури. На основі цих функцій будуть побудовані інші тестові функції з носіями в областях різних типів. Присутність в наведених нижче формулах параметра  $p$  дозволяє отримувати набори тестових функцій неперервних і диференційовних. При  $p = 1$ , отримуємо неперервні функції, при  $p = 2$ , один раз диференційовні функції, при  $p = 3$ , двічі диференційовні функції:

1) функція з носієм у  $K = K_\phi$  кругах:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^K \left[ - \left[ \frac{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 - r^2}{r^2} \right]^p, \right. \\ \text{якщо } (x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 \leq r^2; \\ \left. 0, \text{ у протилежному разі;} \right. \end{cases}$$

2) функція з носієм у  $K = K_\rho$  квадратах:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^K \left[ \frac{(a^2 - (x-a_i)^2)(a^2 - (y-b_i)^2)}{a^4} \right]^p, \\ \text{якщо } |x-a_i| < a \wedge |y-b_i| < a; \\ \left. 0, \text{ у протилежному разі;} \right. \end{cases}$$

3) функція з носієм у  $K = K_\omega$  еліпсах:

$$\omega(x, y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^K \left[ - \left[ \frac{(x-a_i)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-b_i)^2}{\sigma_2^2} - 1 \right]^p, \right. \\ \text{якщо } \frac{(x-a_i)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-b_i)^2}{\sigma_2^2} \leq 1; \\ \left. 0, \text{ у протилежному разі.} \right. \end{cases}$$

Тут  $r$  – радіус круга;  $\sigma_1, \sigma_2$  – півосі еліпса;  $a$  – довжина половини сторони квадрата;  $a_i, b_i$  – координати центра кола, еліпса і квадрата. Параметр  $p$  вказує, до якого класу функцій відносяться тестові функції. Далі формуються функції з носіями, які є об'єднаннями  $M$  зазначених областей різної природи (круги, еліпси,



квадрати), що належать квадрату  $[0, 1] \times [0, 1]$ , для функцій неперервних або диференційовних.

В якості прикладу розглядаємо функцію з носієм у області, що є об'єднанням  $M = 5$  областей:

$$f(x, y) = \varphi(x, y) + \rho(x, y) + \omega(x, y), \quad K_\varphi = 3, K_\rho = 1, K_\omega = 1.$$

$$M = K_\varphi + K_\rho + K_\omega = 5.$$

Далі наводяться графічна ілюстрація та кількісні характеристики для оцінки точності зображення.

Графічні ілюстрації подані на рис. 2, 3.

Далі в табл. 1 наводиться кількісні характеристики, тобто отримані похибки при відтворенні функції, а саме:

1) *максимальна по модулю похибка:*

$$\delta_1 = \max_{i \in \{1, n\}} |x_i - \tilde{x}_i|;$$

2) *середня квадратична похибка:*

$$\delta_2 = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x}_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

3) *середня абсолютна похибка:*

$$\delta_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \tilde{x}_i|.$$

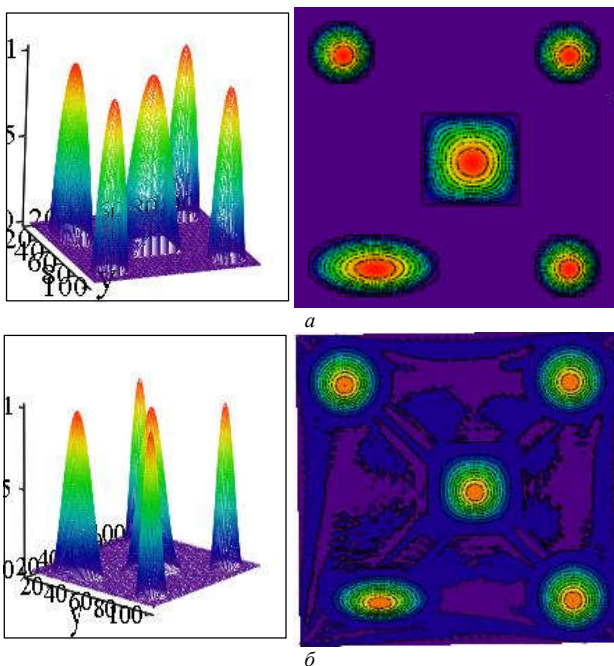


Рис. 2. Задане зображення функції і її лінії рівня (а); відтворене зображення функції і її лінії рівня при  $N = 32$  (б)

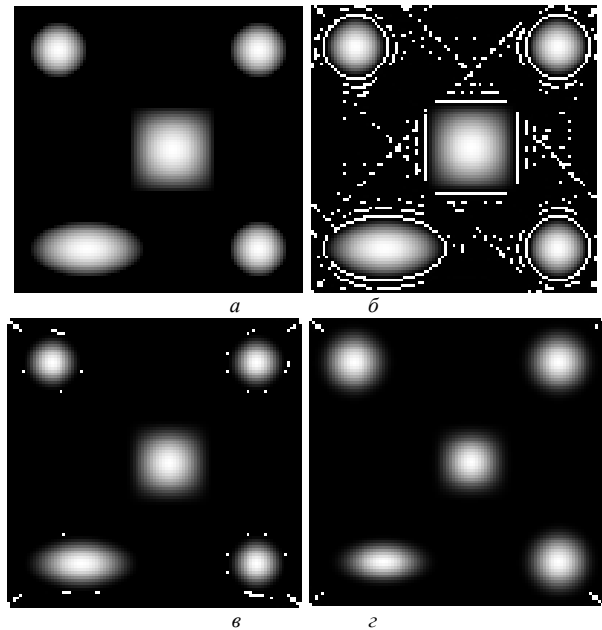


Рис. 3. Напівтонові зображення: а – заданої функції; б – неперервної функції при  $N = 32$ ; в – диференційовної функції при  $N = 32$ ; г – двічі диференційовної при  $N = 32$

ТАБЛИЦЯ IV. ПОРІВНЯЛЬНА ТАБЛИЦЯ КІЛЬКІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Функція (з носієм у трьох кругах, у одному квадраті і в одному еліпсі)	$N = 32$		
	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$
Неперервна функція $p = 1$	0,035	0,004	0,002
Диференційовна функція $p = 2$	0,01	0,0006	0,0004
Двічі диференційовна функція $p = 3$	0,009	0,0005	0,0002

Результати наведені у табл. 1 підтверджують той факт, що для подвійних рядів Фур'є справедливим є твердження про те, що коли  $f(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  є неперервними функціями, то тригонометричний ряд Фур'є функції збігається до цієї функції в кожній точці.

Аналіз результатів показує, що при збільшенні числа  $N$ , відповідного верхній межі в сумі Фур'є, похибки зменшуються. Це характерно для всіх видів похибок. Час реалізації алгоритму зростає зі збільшенням числа  $N$  та залежить також від складності області. Чим складніше область, тим більше часу для реалізації алгоритму. Порівняння результатів для неперервних та диференційовних функцій показали, що результати відновлення краще для диференційовних функцій. Цей факт видно з таблиць і ілюструється графічно. Особливо показово в цьому сенсі напівтонове зображення функцій.



IV. ТЕСТУВАННЯ МЕТОДУ  
ДЛЯ ФАНТОМА ШЕППА-ЛОГАНА

Фантом Шеппа-Логана є стандартним тестовим зображенням, створеним Ларрі Шеппом і Бенджаміном Ф. Логаном у 1974 році. Його створено таким чином, що він представляє собою подібну структуру людського мозку у спрощеному вигляді. Його можна описати за допомогою десяти еліпсів з різними центрами і різними півосями і різними щільностями. Еліпси в даному випадку представляють собою сімейство таких функцій:

$$el(x, y, x_c, y_c, a, b, \alpha, p) = \begin{cases} p, & \\ \text{якщо } (\tilde{x}, \tilde{y}) \in I - \frac{\tilde{x}^2}{a^2} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2} \geq 0, & \\ 0, \text{ в іншому випадку.} & \end{cases}$$

де  $a, b$  – півосі еліпсів;  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  – координати точки у новій системі координат, повернутої на кут  $\alpha$  з центром у точці  $(x_c, y_c)$ ;  $p$  – значення щільності у еліпсі.

Зображення відновлюваної функції та лінії рівня наведено на рис. 4.

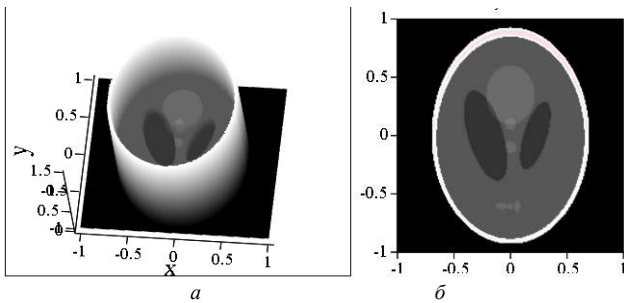


Рис. 4. Ілюстрація відновлюваної функції:  $a$  – зображення функції;  $b$  – лінії рівня

Враховуючи, що відновлювана функція є розривною, на результат суттєво впливає явище Гіббса, яке полягає в осциляціях функції в точках розриву або на лініях розриву.

Згідно з [1], наближення для функції  $f(x, y)$  шукається у вигляді скінченної суми Фур'є (2) або Фейєра (3), де коефіцієнти обчислюються за формулою (4).

Наведено аналіз обчислювального експерименту, в якому досліджувалось вплив кількості доданків у скінченних сумах Фур'є та Фейєра на результати відновлення.

Розглянемо для тестування функцію – фантом Шеппа-Логана. Візьмемо усі 10 еліпсів, у якості щільності (Gray Level) беремо сталі значення, що наведені у табл. 2. Кількість проєкцій візьмемо  $M = 120$ .

У табл. 3 наведено інформацію про порядок суми Фур'є  $N$ , кількість членів у ряді Фур'є  $(2N + 1)^2$ , похибки та час відновлення (роботи програми).

ТАБЛИЦЯ V. ЗНАЧЕННЯ ЩІЛЬНОСТІ ФАНТОМА ШЕППА-ЛОГАНА

Еліпс	1	2	3	4	5
Щільність	1,5	0,98	0,2	0,2	0,1
Еліпс	6	7	8	9	10
Щільність	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

ТАБЛИЦЯ VI. ПОХИБКИ ВІДНОВЛЕННЯ ФУНКЦІЇ

Метод	$N; (2N+1)^2$	Похибки у різних метриках			Час (хв.)
		$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	
Фур'є	8; 289	0,736	0,140	0,067	40,3
Фейєр		0,769	0,162	0,077	
Фур'є	16; 1039	0,604	0,108	0,049	156
Фейєр		0,712	0,139	0,059	

На рис. 5, 6 наведено напівтонові зображення при  $N = 8$  та  $N = 16$  відповідно, задане та відновлене двома методами зображення.

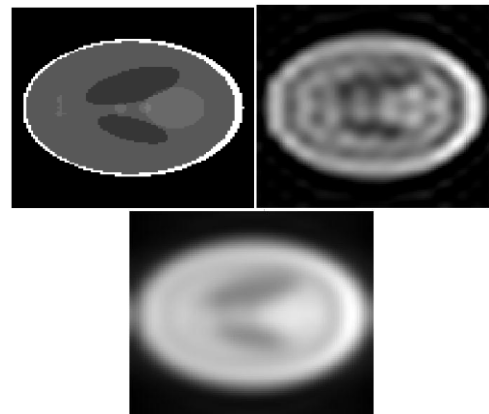


Рис. 5. Відновлена функція (при  $N = 8$ ):  $a$  – задане зображення;  $b$  – метод Фур'є;  $c$  – метод Фейєра

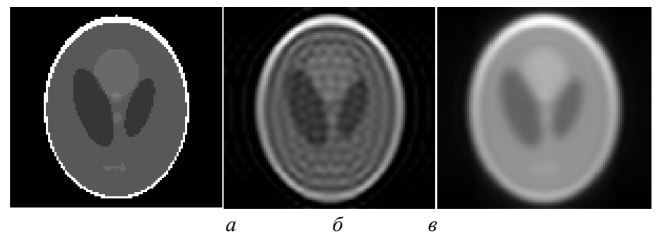


Рис. 6. Відновлена функція (при  $N = 16$ ):  $a$  – задане зображення;  $b$  – метод Фур'є;  $c$  – метод Фейєра



Порівняння результатів отриманих двома методами показали, що зображення, отримані методом Фейера, виглядають більш якісними та згладженими.

Це ілюструється також графіками похибок, наведених на рис. 7.

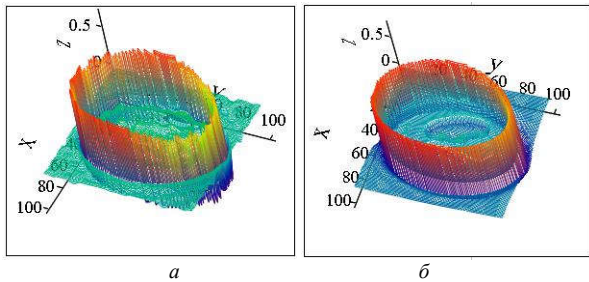


Рис. 7. Графіки похибок: а – метод Фур'є; б – метод Фейера

З обчислювального експерименту видно що кількість членів у скінченних сумах Фур'є або Фейера впливає на точність, але й час обчислень значно зростає.

## V. ВИСНОВКИ

1. Для тестування використовувались набори неперервних, диференційовних та двічі диференційовних функцій, для яких суми Фур'є з точно обчисленими коефіцієнтами Фур'є збігаються, тестування дало очікувані результати. Наступний результат в цьому напрямку повинен бути пов'язаний з оптимізацією обчислень, необхідних для наближення функцій із наперед заданою точністю.

2. Наведений для тестування приклад функції, яка є фантомом Шеппа-Логана, підтвердив відоме твердження про те, що наближення розривних функцій скінченними сумами Фур'є приводить до явища Гіббса, тобто не дає збіжності на лініях розриву. Це явище виникає незалежно від того чи коефіцієнти Фур'є обчислюються точно, чи наближено. Тому в майбутньому планується провести тестування методу для наближення розривних функцій окремо [8, 9].

3. Планується також отримати відповідні результати для функцій трьох змінних і провести відповідні тестування [10].

## ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

- [1] О. М. Литвин, «Періодичні сплайни і новий метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії», *Системний аналіз, управління і інформаційні технології: Вісник Харківського держ. політех. ун-ту*. Збірка наукових праць. Випуск 125, Харків: ХДПУ, 2000, с. 27–35.
- [2] О. М. Литвин, «Підвищення точності розкладання в ряд Фур'є розривних функцій однієї та двох змінних», *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків: НТУ «ХПІ», 2016, № 6(1178), с. 43–46.
- [3] D. Gottlieb, C. W. Shu, «On the Gibbs Phenomenon and its Resolution», *SIAM Review*, 1997, 39, № 4, pp. 644–668.
- [4] B. Gustafsson, «Mathematics for Computer Tomography», *Physica Scripta*, 1996, T. 61, pp. 38–43.
- [5] О. М. Литвин, О. Г. Литвин, «Реконструкція зображень з використанням скінченних сум Фур'є та Фейера», *Інформатика та системні науки (ІСН-2016): матеріали VII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю*, (м. Полтава, 10–12 березня 2016 р.), Полтава: ПУЕТ, 2016, с. 186–189.
- [6] О. М. Литвин, О. Г. Литвин, «Оптимізація кількості експериментальних даних у методі обчислення коефіцієнтів Фур'є за допомогою проєкцій», *Інформатика та системні науки (ІСН-2017): матеріали VIII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю* (м. Полтава, 16–18 березня 2017 р.); за ред. Ємця О. О. Полтава: ПУЕТ, 2017, с. 175–179.
- [7] О. М. Литвин, *Інтерлінація функцій та деякі її застосування*, Харків: Основа, 2002, 544 с.
- [8] О. М. Литвин, О. Г. Литвин, «Метод відновлення розривних функцій спеціального вигляду з використанням проєкцій і скінченних сум Фур'є», *7 Міжнародна науково-технічна конференція «Інформаційні системи та технології ICT-2018»*, 10–15 вересня 2018 р., Харків-Коблеве, с. 120–122.
- [9] О. М. Литвин, О. Г. Литвин, «Про один підхід до наближення розривних функцій з використанням проєкцій і скінченних сум Фур'є», *Обчислювані методи і системи перетворення інформації: зб. пр. V-ї наук.-техн. конф.*, 4–5 жовтня 2018 р., Львів: ФМІ НАНУ, 2018, 176 с., с. 8–11.
- [10] Oleg M. Lytvyn, Oleksandra G. Lytvyn, Oleg O. Lytvyn, «Method of Calculating Fourier Coefficients of Three Variable Functions Using Tomogram», *Advanced Computer Information Technologies*, Ceske Budejovice, CZECH REPUBLIC, 5–7 June 2019, pp. 125–128.

