УДК 19.66:519.668

В.Ю. Дубницкий, А.М. Кобылин[1], О.А. Кобылин[2]

[1] *Харьковский учебно-научный институт ГВУЗ Университета банковского дела, Харьков*
[2] *Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков*

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ С ИНТЕРВАЛЬНО ЗАДАННЫМ АРГУМЕНТОМ, ОПРЕДЕЛЁННЫМ В СИСТЕМЕ ЦЕНТР-РАДИУС

Предложены алгоритмы для вычисления значений элементарных функций, аргументы которых представлены интервальными числами, определёнными в системе центр-радиус. Алгоритмы реализованы в специализированном программном калькуляторе, позволяющем вычислять интервальные значения степенной, показательной, логарифмической функции, прямых и обратных тригонометрических функций, прямых и обратных гиперболических функций.

Ключевые слова: *элементарные функции, интервальные числа, определённые в системе центр-радиус, специализированный программный калькулятор, экспоненциальная функция, логарифмическая функция, прямые и обратные тригонометрические функции, прямые и обратные гиперболические функции.*

Введение

Задача вычисления значений элементарных функций исторически стала одной из первых задач, решённых на компьютерах [1]. С тех пор и до сегодняшнего дня она остается актуальной, так как методы её решения существенно зависят от непрерывно меняющейся архитектуры компьютеров. Подробно эти методы рассмотрены в работах [2 – 6]. Главная особенность этих работ, с точки зрения авторов данного сообщения, в том, что в них для вычисления значений элементарных функций использована традиционная эвклидова арифметика. Использование интервально заданных чисел в указанных работах не рассмотрено.

Анализ литературы. Понятие интервального числа и теоретические основы интервального анализа для решения прикладных задач рассмотрены в работах [7 – 10]. В работе [10] введено представление интервального числа в системе центр-радиус. В работах [11, 12] показано, что применение этой системы позволяет получить результат операции, имеющий наименьший интервал в сравнении с остальными способами представления интервальных чисел. Правила действий с интервальными числами, представленными в системе центр-радиус, изложены в работе [10].

Следуя этой работе рассмотрим множество действительных чисел R, на котором определим интервальное число A в виде замкнутого интервала:

$$A=\left(\underline{a},\overline{a}\right)=(a_1,a_2),\ \underline{a}\le\overline{a}\ ;\ a_1\le a_2\ , \qquad (1)$$

и представим в виде:

$$A=\langle a,r_a\rangle, \qquad (2)$$

где $a=\left(a_1+a_2\right)/2$, $r_a=\left(a_2-a_1\right)/2$, $a,r_a,\in R$. (3)

При применении системы центр-радиус действия сложения и вычитания с интервальными числами выполняют по следующим правилам:

$$A+B=\langle a+b,r_a+r_b\rangle; \qquad (4)$$

$$A-B=\langle a-b,r_a+r_b\rangle. \qquad (5)$$

В рамках данной работы примем, что границы интервалов, на которых определены рассматриваемые числа, образованы вычислительными ошибками, погрешностями измерений или неполным знанием области изменения некоторой физической величины. Поэтому в условии (2) должны быть выполнены неравенства:

$$a\ge r_a\ge 0\ ,\ b\ge r_b\ge 0\ , \qquad (6)$$

иначе будем считать, что задача, в рамках наших представлений об исследуемом объекте, физического смысла не имеет. В работе [10] предложены формулы для выполнения операция деления и умножения в системе центр-радиус в виде:

$$\langle a,r_a\rangle\langle b,r_b\rangle=\langle ab+r_ar_b,ar_b+br_a\rangle; \qquad (7)$$

$$\frac{\langle a,r_a\rangle}{\langle b,r_b\rangle}=\left\langle\frac{ab+r_ar_b}{b^2-r_b^2},\frac{ar_b+br_a}{b^2-r_b^2}\right\rangle. \qquad (8)$$

Для возведения в целочисленную степень в работе [10] приведены формулы:

$$A^n=\langle a,r_a\rangle^n=\langle G,R\rangle; \qquad (9)$$

при условии, что $n\in Z$. Тогда:

$$G=\sum_{k=0}^{n}C_n^{2k}r_a^{2k}a^{n-2k}\ ;$$

$$R=\sum_{k=0}^{n}C_n^{2k+1}r_a^{2k+1}|a|^{n-(2k+1)}\ . \qquad (10)$$

Для программирования процесса вычислений условие (9) представим, с учетом условия (10), в виде:

$$A = \langle a; r_a \rangle^n = \langle a^2 + r_a^2; 2|a| r_a \rangle \underbrace{(\langle a; r_a \rangle ... \langle a; r_a \rangle)}_{n-2}. \quad (11)$$

В работе [9] модуль интервального числа $A=(\underline{a}, \overline{a})$ определён так:

$$\mathrm{mod}(A) = \max\{(a - r_a), (a + r_a)\}. \quad (12)$$

Для определения значений элементарных функций с интервально заданным аргументом в работах [9, 10, 13] применено их разложение в ряд Тейлора. Такой подход, по нашему мнению, требует отсутствующего в настоящее время строгого обоснования понятий предельного перехода и сходимости для функциональных рядов, численные значения аргументов которых заданы в интервальном виде.

Постановка задачи. Разработка и программная реализация методов вычисления значений элементарных функций на основе их многочленных и рациональных аппроксимаций, при условии, что численные значения аргументов есть интервальные числа, заданные в системе центр-радиус.

Полученные результаты

Рассмотрим основные арифметические операции в том случае, когда один из операндов - постоянное число.

В системе центр-радиус, используя условия (2, 3), постоянное число C представим в виде $C = \langle c,\ 0\rangle$. Примем, что $A = \langle a, r_a \rangle$ и $B = \langle b, 0\rangle$. Тогда операции сложения и вычитания представим в виде:

$$A + B = \langle a + b, r_a \rangle; \quad (13)$$

$$A - B = \langle a - b, r_a \rangle. \quad (14)$$

Для умножения интервального числа, представленного в системе центр-радиус, на постоянную величину примем, что:

$$AB = \begin{cases} \langle a, 0\rangle \langle b, r_b \rangle, A = \mathrm{const}, B \neq \mathrm{consn}; \\ \langle a, r_a \rangle \langle b, 0\rangle, A \neq \mathrm{const}, B = \mathrm{const}. \end{cases} \quad (15)$$

При операции деления интервального числа на постоянное число получим, что:

$$\frac{A}{B} = \frac{\langle a, r_a \rangle}{\langle b, 0\rangle} = \left\langle \frac{ab}{b^2}, \frac{br_a}{b^2} \right\rangle = \left\langle \frac{a}{b}, \frac{r_a}{b} \right\rangle; \quad (16)$$

или:

$$\frac{A}{B} = \frac{\langle a, 0\rangle}{\langle b, r_b \rangle} = \frac{\langle ab, ar_b \rangle}{b^2 - r_b^2} = \left\langle \frac{ab}{b^2 - r_b^2}, \frac{ar_b}{b^2 - r_b^2} \right\rangle. \quad (17)$$

Следуя работе [3, С. 78], и принимая во внимание ранее введенные обозначения, представим логарифмическую функцию в виде:

$$\ln\langle x, r_x \rangle = \sum_{i=1}^{6} \langle a_i, 0\rangle \left[\langle -1; 0\rangle^{i-1} + \frac{\langle 1; 0\rangle}{\langle x, r_x \rangle^i} \right] \frac{(\langle x, r_x \rangle - \langle 1; 0\rangle)^i}{\langle i; 0\rangle}. \quad (18)$$

Далее при описании вычислительных алгоритмов, во избежание недоразумений, связанных с использованием десятичных дробей, вместо символа $\langle a, r_a \rangle$ будем использовать символ $\langle a; r_a \rangle$.

Коэффициенты a_i, необходимые для вычисления величины $\ln\langle x, r_x \rangle$, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значение коэффициентов для приближения функции $\ln(x)$

a_1	0,500000	a_4	0,030303
a_2	0,227273	a_5	0,007576
a_3	0,090909	a_6	0,0001082

Произвольную показательную функцию, используя работу [3, С. 49] представим в виде:

$$a^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^k}{k!}. \quad (19)$$

Тогда, с учетом условия (18), её интервальным расширением будет функция вида:

$$\langle a; r_a \rangle^{\langle x; r_x \rangle} = \sum_{k=0}^{6} \frac{(\langle x; r_x \rangle \ln\langle a; r_a \rangle)^k}{k!}. \quad (20)$$

Экспоненту с отрицательным показателем, точнее её рациональное приближение, следуя работе [3, С. 63], представим в виде

$$e^{-x} = \left[\sum_{k=0}^{6} a_k x^k \right]^{-4}, \text{ при } 0 \le x \le 16. \quad (21)$$

Значения коэффициентов a_k, используемых для приближения величины e^{-x}, приведены в табл. 2.

Таблица 2

Значение интерполяционных коэффициентов для приближения величины e^{-x}

a_0	1	a_4	0,0001715620
a_1	0,2499986842	a_5	0,0000054302
a_2	0,0312575832	a_6	0,0000006906
a_3	0,00259137121		

Интервальное расширение функции (20) примет вид:

$$e^{-\langle x, r_x \rangle} = \left[\sum_{k=0}^{6} \langle a, r_a \rangle_k \langle x, r_x \rangle^k \right]^{-4}, \quad 0 \le x \le 16. \quad (22)$$

Экспоненту с положительным показателем представим в виде:

$$e^{\langle x, r_x \rangle} = 1 \ / \ \left[\sum_{k=0}^{6} \langle a, r_a \rangle_k \langle x, r_x \rangle^k \right]^{-4}. \quad (23)$$

Это позволяет осуществлять действия с числами в диапазоне $[1{,}12 \cdot 10^{-7}; 8{,}88 \cdot 10^{6}]$.

При выбранных методах вычисления значений тригонометрических и гиперболических функций потребуется выполнение операций сравнения интервальных чисел, представленных в системе центр-радиус.

Будем считать, что интервальное число A_1 меньше интервального числа A_2 если:

$$(A_1 = \langle a_1; r_{a1} \rangle) < (A_2 = \langle a_2; r_{a2} \rangle) \Rightarrow \Rightarrow a_1 + r_{a1} < a_2 - r_{a2}. \quad (24)$$

В работе[9] модулем интервального числа $A = (\underline{a}, \overline{a})$ называют величину

$$\operatorname{mod}(A) = \max\{(a - r_a), (a + r_a)\}. \quad (25)$$

Комодулем интервального числа $A = (\underline{a}, \overline{a})$ назовём величину:

$$\operatorname{Co}\operatorname{mod}(A) = \min\{(a - r_a), (a + r_a)\}. \quad (26)$$

Пусть V – некоторое интервальное число и K – некоторое неинтервальное число. Тогда условие $|V| \le K$ можно представить в виде:

$$(|V| \le K) \Rightarrow (\operatorname{co}\operatorname{mod}\langle k, r_k \ge \langle 1;0 \rangle \rangle) \,\&\, \operatorname{mod}(k; r_k) \le 1. \quad (27)$$

Условие $|V| \ge K$ представим в виде:

$$(|V| \ge K) \Rightarrow (\operatorname{co}\operatorname{mod}\langle k, r_k \ge \langle 1;0 \rangle \rangle) \,\&\, \operatorname{mod}(k; r_k) \le 1. \quad (28)$$

Для вычисления значений тригонометрических функций с интервально заданным аргументом используем методику, описанную в работе [4, С. 232].

Пусть $X = \langle x; r_x \rangle$,тогда:

$$Z = \frac{X}{2} = \frac{\langle x; r_x \rangle}{\langle 2;0 \rangle} = \left\langle \frac{x}{2}; \frac{r_x}{2} \right\rangle. \quad (29)$$

Функцию $\operatorname{tg}Z$ представим в виде:

$$\operatorname{tg}Z = Z + \frac{1}{3}Z^3 + \frac{2}{15}Z^5 + \frac{17}{315}Z^7 + \frac{62}{2835}Z^9.$$

$$\operatorname{mod}(Z) < \pi / 2. \quad (30)$$

Используя условие (29) и основную тригонометрическую подстановку, получим выражения для вычисления основных тригонометрических функций, которые приведены в табл. 3.

При использовании формул, приведенных в этой таблице, следует помнить, что их применять следует, только используя правила действия с интервальными числами, описанными ранее.

Для вычисления значений обратных тригонометрических функции используем выражения, приведенные в работе [9, С. 115, 119].

Тогда получим, что:

$$\arcsin\langle x; r_x \rangle = = \ln\left(\langle 1;0 \rangle + \langle x; r_x \rangle + \frac{\langle x; r_x \rangle^{\langle 2;0 \rangle}}{2!} + \frac{\langle 5 \rangle \langle x; r_x \rangle^{\langle 4;0 \rangle}}{4!} \right); \quad (31)$$

Таблица 3

Значения основных тригонометрических функций, выраженных с использованием тангенса половинного угла

Функция	Подстановка	Ограничения
$\sin X$	$\frac{2\operatorname{tg}Z}{1+\operatorname{tg}^2 Z}$	$\operatorname{mod}(Z) \ne \pi(1+2Z)$
$\cos X$	$\frac{1-\operatorname{tg}^2 Z}{1+\operatorname{tg}^2 Z}$	$\operatorname{mod}(Z) \ne \pi(1+2Z)$
$\operatorname{tg}X$	$\frac{2\operatorname{tg}Z}{1-\operatorname{tg}^2 Z}$	$\operatorname{mod}(Z) \ne \pi(1+2Z)$ $\operatorname{mod}(Z) \ne \pi\left(\frac{1}{2}+Z\right)$
$\operatorname{ctg}X$	$\frac{1-\operatorname{tg}^2 Z}{2\operatorname{tg}Z}$	$\operatorname{mod}(Z) \ne \pi(1+2Z)$ $\operatorname{mod}(Z) \ne \pi\left(\frac{1}{2}+Z\right)$

$$\operatorname{ark}\cos\langle x; r_x \rangle = \frac{\langle \pi;0 \rangle}{\langle 2;0 \rangle} - \operatorname{ark}\sin\langle x; r_x \rangle; \quad (32)$$

$$\operatorname{arctg}\langle x; r_x \rangle = = \ln\left(\begin{array}{c} \langle 1;0 \rangle + \langle x; r_x \rangle + \frac{\langle x; r_x \rangle^{\langle 2;0 \rangle}}{2!} - \\ - \frac{\langle x; r_x \rangle^{\langle 3;0 \rangle}}{3!} + \frac{\langle 7;0 \rangle \langle x; r_x \rangle^{\langle 4;0 \rangle}}{4!} \end{array} \right); \quad (33)$$

$$\operatorname{arkctg}\langle x; r_x \rangle = \frac{\langle \pi;0 \rangle}{\langle 2;0 \rangle} - \operatorname{arktg}\langle x; r_x \rangle. \quad (34)$$

Для вычисления значений гиперболических функций с интервально заданным аргументом используем методику, описанную в работах [3, С. 133; 4, С. 264].

Примем, что:

$$d\langle x; r_x \rangle = \exp(\langle x; r_x \rangle - 1). \quad (35)$$

Тогда основные гиперболические функции представим в виде:

$$\operatorname{sh}(\langle x; r_x \rangle) = \langle 0.5;0 \rangle \left(d\langle x; r_x \rangle + \frac{d\langle x; r_x \rangle}{d\langle x; r_x \rangle + \langle 1;0 \rangle} \right); \quad (36)$$

$$\operatorname{ch}(\langle x; r_x \rangle) = \left(\operatorname{sh}^2\langle x; r_x \rangle + 1\right)^{\langle 0.5;0 \rangle}; \quad (37)$$

$$\operatorname{th}(\langle x; r_x \rangle) = \frac{\operatorname{sh}\langle x; r_x \rangle}{\left(\operatorname{sh}^2\langle x; r_x \rangle + 1\right)^{\langle 0.5;0 \rangle}}; \quad (38)$$

$$\operatorname{cth}(\langle x; r_x \rangle) = \frac{\left(\operatorname{sh}^2\langle x; r_x \rangle + 1\right)^{0,5}}{\operatorname{sh}\langle x; r_x \rangle}; \quad (39)$$

Для вычисления значений обратных гиперболических функций используем методику, описанную в работе [14, С. 28].

Значения ареасинуса гиперболического вычислим по формуле:

$$\operatorname{Arsh}\left(\langle x;r_x\rangle\right)=$$
$$=\ln\left(\langle x;r_x\rangle+\left(\langle x;r_x\rangle^2+\langle 1;0\rangle\right)^{\langle 0,5;0\rangle}\right). \qquad (40)$$

С учетом двузначности ареакосинуса гиперболического для вычисления его значений используем формулы:

$$\operatorname{Arch}\left(\langle x;r_x\rangle_1\right)=$$
$$=\ln\left(\langle x;r_x\rangle+\left(\langle x;r_x\rangle^2-\langle 1;0\rangle\right)^{\langle 0,5;0\rangle}\right)$$
$$\operatorname{comod}(X=\langle x;r_x\rangle)\geq\langle 1;0\rangle\,; \qquad (41)$$

$$\operatorname{Arch}\left(\langle x;r_x\rangle_2\right)=$$
$$=-\ln\left(\langle x;r_x\rangle+\left(\langle x;r_x\rangle^2-\langle 1;0\rangle\right)^{\langle 0,5;0\rangle}\right)$$
$$\operatorname{comod}(X=\langle x;r_x\rangle)\geq\langle 1;0\rangle\,. \qquad (42)$$

Значения арктангенса гиперболического и арккотангенса гиперболического вычислим по формулам:

$$\operatorname{Arth}\langle x;r_x\rangle=\langle 0,5;0\rangle\ln\frac{\langle 1;0\rangle+\langle x;r_x\rangle}{\langle 1;0\rangle-\langle x;r_x\rangle}\,,$$
$$-1<\operatorname{comod}\left(X=\langle x;r_x\rangle\right),$$
$$\operatorname{mod}\left(X=\langle x;r_x\rangle\right)<1\,. \qquad (43)$$

$$\operatorname{Arcth}\langle x;r_x\rangle=\langle 0,5;0\rangle\ln\frac{\langle 1;0\rangle+\langle x;r_x\rangle}{\langle x,r_x\rangle-\langle 1;0_x\rangle}\,,$$
$$\operatorname{comod}\left(X=\langle x;r_x\rangle\right)\geq-1\,,$$
$$\operatorname{mod}\left(X=\langle x;r_x\rangle\right)<1\,. \qquad (44)$$

Для проведения вычислительных экспериментов разработана программная система на языке программирования C# в среде программирования Visual Studio. Главная форма предлагаемой программной системы показана на рис. 1.

Примеры расчетов по интервальным расширениям элементарных функций показаны на рис. 2 – 6. В программной системе предусмотрено ее дальнейшее расширение, для решения прикладных задач с использованием интервальных расширений математических функций.

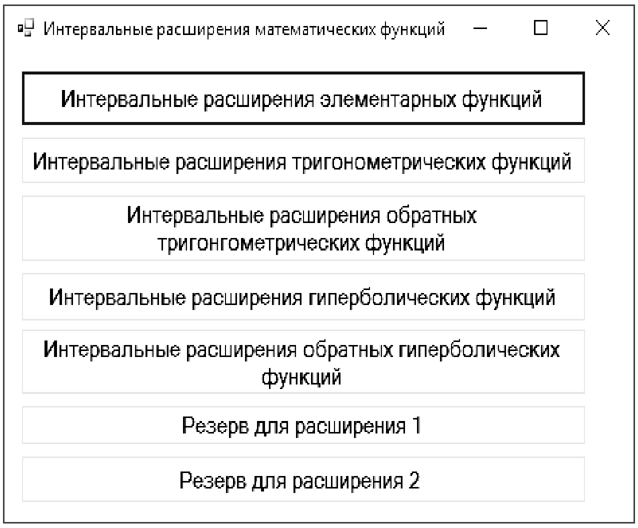

Рис. 1. Главное окно программной системы для программного обеспечения «Интервальные расширения математических функций»

Выводы

1. Предложены алгоритмы для вычисления значений элементарных функций, аргументы которых представлены интервальными числами, определёнными в системе центр-радиус.

2. Алгоритмы реализованы в специализированном программном калькуляторе, позволяющем вычислять интервальные значения степенной, показательной, логарифмической функции, прямых и обратных тригонометрических функций, прямых и обратных гиперболических функций.

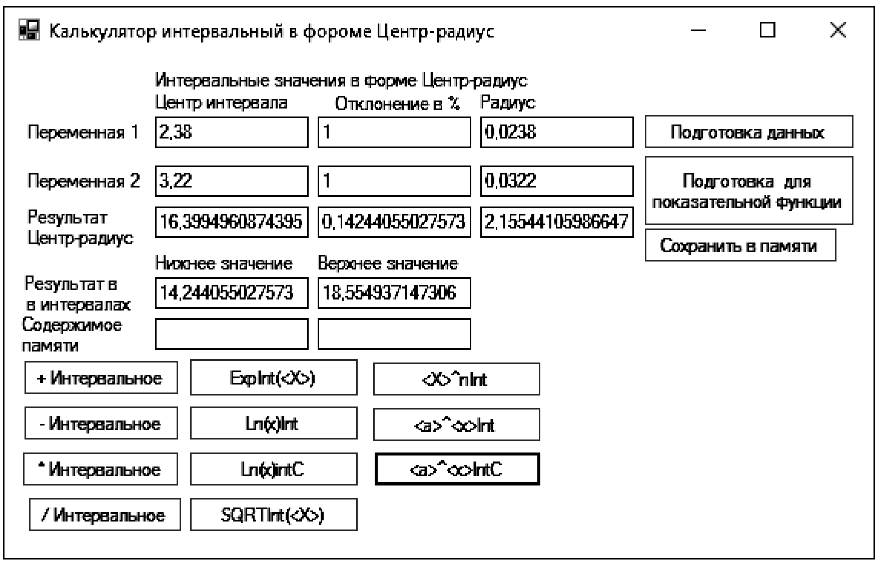

Рис. 2. Пример расчета значений степенной функции

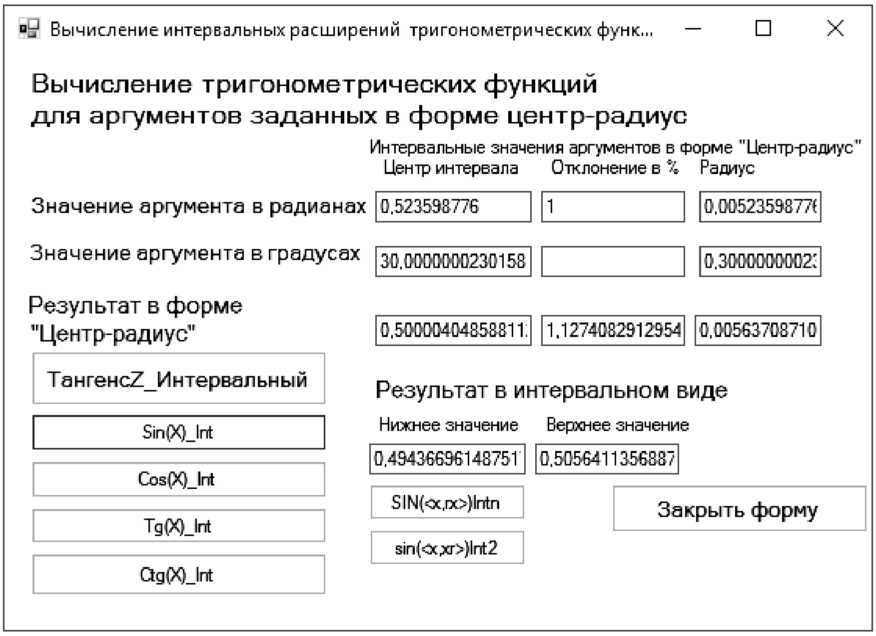

Рис. 3. Пример расчета значений тригонометрической функции

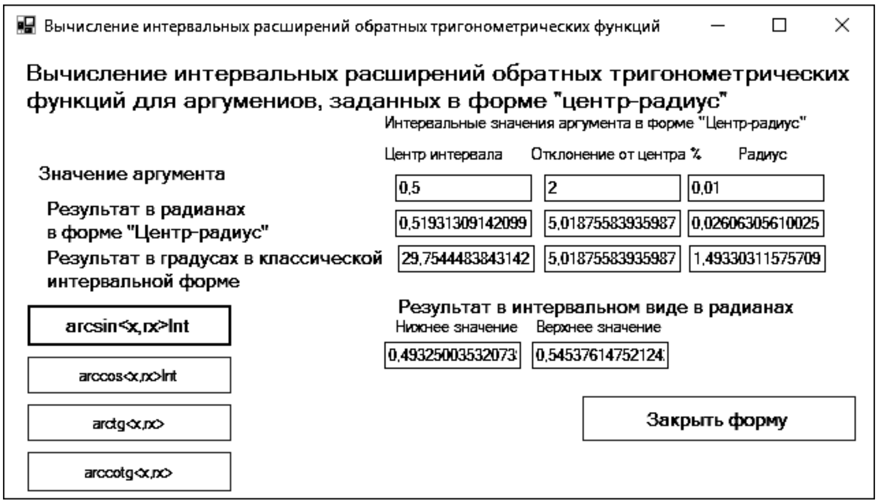

Рис. 4. Пример расчета значений обратной тригонометрической функции

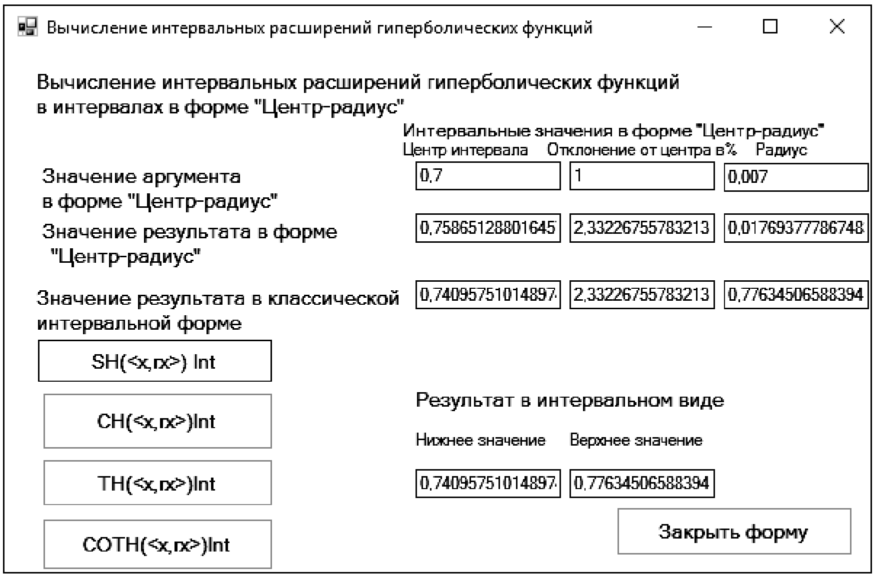

Рис. 5. Пример расчета значений гиперболической функции

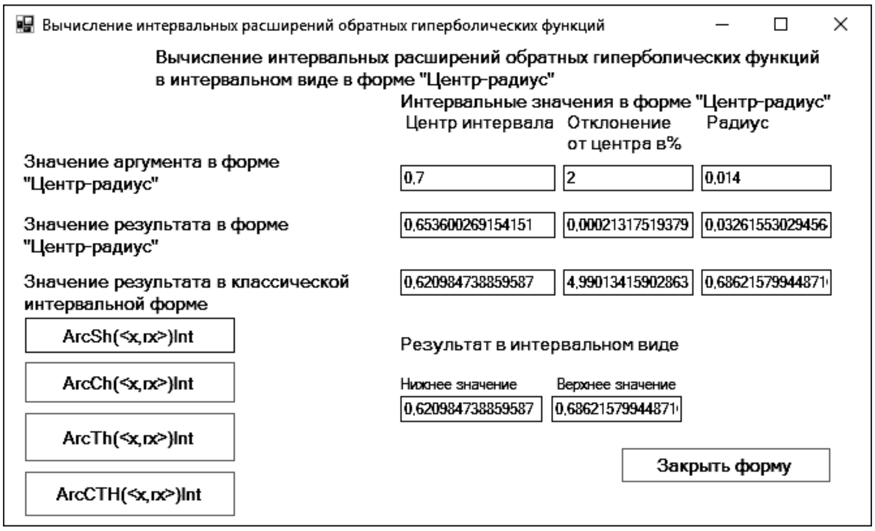

Рис. 6. Пример расчета значений обратной гиперболической функции

Список литературы

1. Carlson B. Rational approximation of functions [Текст] / B. Carlson, M. Goldstein. – Los Alamos Scientific Laboratory LA-1943, 1955.

2. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. [Текст] / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

3. Люстерник Л.А. Математический анализ: Вычисление элементарных функций [Текст] / Л.А. Люстерник, О.А. Червоненкис, А.Р. Янпольский. – М., 1963. – 248 с.

4. Попов Б.А. Вычисление функций на ЭВМ. [Текст] / Б.А. Попов, Г.А. Теслер. – К.: Наук. думка, 1984. – 599 с.

5. Кошаровский А.Н. Разработка и исследование алгоритмов и процессоров вычисления значений элементарных функций: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.05 / Кошаровский Андрей Николаевич. – М.: Московский энергетический институт, 2000. – 179 с.

6. Сальников М.С. Рекурсивный алгоритм вычисления логарифма [Текст] / М.С. Сальников // Информационные процессы. – 2012. – Т.12. – №3. – С. 248-252.

7 Алефельд Г. Введение в интервальные вычисления [Текст] / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. – М.: Мир, 1987. – 360 с.

8. Алтунин А.Е. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях [Текст] / А.Е. Алтунин, М.В. Семухин. – Тюмень: ТГУ, 2000. – 352 с.

9. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ [Текст] / С.П. Шарый. – М.: XYZ, 2012. – 606 с.

10. Жуковська О.А. Основи інтервального аналізу [Текст] / О.А. Жуковська. – К.: Освіта України, 2009. – 136 с.

11. Дубницький В.Ю. Порівняльний аналіз результатів планування нормативів банківської безпеки засобами класичної та нестандартної арифметики [Текст] / В.Ю. Дубницький, А.М. Кобилін // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2014. – № 5 (69). – С. 29-33.

12. Дубницкий В.Ю. Решение обратной задачи интервального анализа поисковым методом [Текст] / В.Ю. Дубницкий, А.М. Кобылин // Вісник Харківського національного університету. – 2014. – № 1131. – С. 54-72.

13. Стоян Ю.Г. Введення в інтервальну геометрію: навч. посіб. [Текст] / Ю.Г. Стоян. – Х.: ХІРЕ, 2006. – 98 с.

14. Янпольский А.Р. Гиперболические функции [Текст] / А.Р. Япольский. – М.: Физматгиз, 1960. – 195 с.

Поступила в редколлегию 18.05.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.П. Машталир, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ОБЧИСЛЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ З ІНТЕРВАЛЬНО ЗАДАНИМ АРГУМЕНТОМ, ВИЗНАЧЕНИМ В СИСТЕМІ ЦЕНТР-РАДІУС

В.Ю. Дубницький, А.М. Кобилін, О.А. Кобилін

Запропоновано алгоритми для обчислення значень елементарних функцій, аргументи яких представлено інтервальними числами, які визначено в системі центр-радіус. Алгоритми реалізовано в спеціалізованому програмному калькуляторі, що дозволяє обчислювати інтервальні значення степеневої, показникової, логарифмічної функції, прямих і зворотних тригонометричних функцій, прямих і зворотних гіперболічних функцій.

***Ключові слова**: елементарні функції, інтервальні числа, які визначено в системі центр-радіус, спеціалізований програмний калькулятор, степенева функція, показникова функція, логарифмічна функція, прямі і зворотні тригонометричні функції, прямі і зворотні гіперболічні функції.*

CALCULATION OF ELEMENTARY FUNCTION VALUES WITH INTERVAL STATED ARGUMENT DETERMINED IN CENTER-RADIUS SYSTEM

V.Yu. Dubnitskiy, A.M. Kobylin, O.A. Kobylin

Algorithms are proposed to calculate the values of elementary functions whose arguments are represented by interval numbers determined in center-radius system. The arguments are realized in specialized programmable calculator which enables to calculate interval values of power, exponential, logarithmic function, direct and inverse trigonometric functions, direct and inverse hyperbolic functions.

***Keywords:** elementary functions, interval numbers determined in center-radius system, specialized programmable calculator, exponential, logarithmic function, direct and inverse trigonometric functions, direct and inverse hyperbolic functions.*