



И.В. Гребенник¹, А.А. Коваленко², Т.Е. Романова³, И.А. Урняева⁴, С.Б.Шеховцов⁵

¹ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, igor.grebennik@nure.ua;

²ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, hanna.kovalenko@nure.ua;

³ИПМаш им. А.М. Подгорного НАН України,

г. Харьков, Украина, sherom@kharkov.ua;

⁴ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, inna.urniaieva@nure.ua;

⁵ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, tarom7@yahoo.com

ЗАДАЧА БАЛАНСНОЙ КОМПОНОВКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С УЧЕТОМ ЕЕ КОМБИНАТОРНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

Рассматривается оптимизационная задача балансной компоновки заданного множества цилиндрических объектов в контейнере, разделенном круговыми стеллажами на подконтейнеры. Для аналитического описания условий непересечения цилиндров и размещения цилиндров в подконтейнерах используется метод ρ -функций. Строится математическая модель, в которой учитываются комбинаторные особенности задачи, связанные с генерацией разбиений множества объектов, размещаемых внутри подконтейнеров, при проектировании компоновки. Приводятся результаты численных экспериментов для решения задач компоновки цилиндров с целью: минимизации отклонения центра масс системы от заданной точки; минимизации радиуса основания цилиндрического контейнера с учетом равновесия системы.

БАЛАНСНАЯ КОМПОНОВКА, ЦИЛИНДРЫ, МЕТОД ρ -ФУНКЦИЙ, КОМБИНАТОРНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ОПТИМИЗАЦИЯ

Введение

Задачи балансной компоновки 3D-объектов имеют широкий спектр практических применений, например, в космическом машиностроении [1]. Так в работах [2-5] рассматриваются задачи компоновки цилиндров в цилиндрическом контейнере с ограничениями поведения, учет которых необходим для соблюдения уравновешенности спутниковой системы. В данных публикациях приводятся математические модели с различными функциями цели. Для решения данных задач предлагаются эвристические алгоритмы, учитывающие особенности каждой из задач.

В статьях [6-7] приводятся математические модели и методы решения задач балансной компоновки (Balance Layout Problem, BLP) множества 3D-объектов в контейнере (формы цилиндра, параболоида вращения или усеченного конуса). Контейнер разделен круговыми стеллажами на подконтейнеры. При этом предполагается, что разбиение множества объектов на подмножества в соответствии с размещением объектов внутри подконтейнеров считается заданным.

Целью исследования является построение математической модели задачи оптимальной балансной компоновки множества цилиндрических объектов, в которой учитываются комбинаторные особенности задачи, связанные с генерацией разбиений множества объектов, размещаемых внутри подконтейнеров, при проектировании компоновки.

1. Постановка задачи

Пусть Ω – контейнер высоты H , описанный следующим образом:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : G(x, y, z) \geq 0\}.$$

В пределах данного исследования рассматриваются контейнеры трех видов: *прямой круговой цилиндр* с радиусом основания R при $G = \min\{-x^2 - y^2 + R^2, -z + H, z\}$; *параболоид вращения* с радиусом вращения $R = \sqrt{H}$ при $G = \min\{-z - x^2 - y^2 + H, z\}$; *усеченный прямой круговой конус* с радиусами R_1 нижнего и R_2 верхнего оснований, при

$$G = \min\{-z - \frac{H}{R_1 - R_2}(\sqrt{x^2 + y^2} + R_1), -z + H, z\}.$$

Контейнер Ω задан в собственной неподвижной системе координат $Oxyz$, где Oz – продольная ось симметрии.

Полагаем, что Ω разделен круговыми стеллажами S_j на отсеки Ω^j , $j \in J_m = \{1, \dots, m\}$. Расстояния между стеллажами S_j и S_{j+1} обозначим через t_j , $j \in J_m$, $\sum_{j=1}^m t_j = H$.

Начало собственной системы координат $Oxyz$ расположено в центре нижнего основания контейнера (рис. 1).

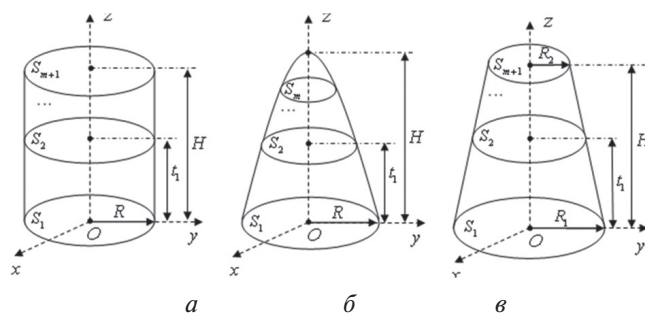


Рис. 1. Виды контейнеров с круговыми стеллажами:

а – цилиндр, б – параболоид вращения, в – усеченный конус

Имеется $A = \{C_i, i = 1, \dots, n\}$ – множество одно-родных цилиндров с метрическими характеристиками (r_i, h_i) , где r_i – радиус основания, h_i – полу-высота цилиндра C_i (рис. 2), m_i – масса C_i .

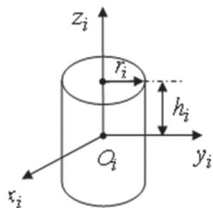


Рис. 2. Размещаемый цилиндр C_i

Каждый цилиндр C_i задан в собственной системе координат $O_i x_i y_i z_i$, где O_i – центр симметрии C_i , $O_i z_i$ – продольная ось симметрии C_i , $O_i z_i \parallel O z$. Пусть m_i – масса цилиндра C_i , $i \in J_n = \{1, \dots, n\}$. Расположение цилиндра C_i внутри контейнера Ω определяется вектором трансляции $u_i = (v_i, z_i)$ относительно неподвижной системы координат $O x y z$, где $v_i = (x_i, y_i)$, при этом значение z_i , $i \in J_n$, однозначно определяется подконтейнером Ω^j , $j \in J_m$, в котором размещается цилиндр C_i . На размещение C_i , $i \in J_n$, внутри Ω^j накладываются ограничения

$$z_i = \sum_{l=1}^j t_{l-1} + h_i, \tag{1}$$

где $j \in J_m$. Полагаем, что $t_0 = 0$ и $\forall i \in J_n$ существует $j^* \in J_m : h_i \leq t_{j^*}$.

В отличие от задач BLP, рассмотренных в работах [6, 7], где априори задано требование на размещение объектов в конкретных подконтейнерах Ω^j , $j \in J_m$, в данном исследовании формулируется задача балансной компоновки цилиндрических объектов, которая предполагает генерацию и выбор разбиения множества A на непустые подмножества A^j , $j \in J_m$. Здесь A^j – подмножество объектов, которые должны быть размещены на стеллаже S_j внутри подконтейнера Ω^j .

Пусть $J_n^j \subseteq J_n$ – множество индексов объектов, размещаемых в подконтейнере Ω^j , $j \in J_m$, $\bigcup_{j=1}^m J_n^j = J_n$, $J_n^i \cap J_n^j = \emptyset$, $i \neq j \in J_m$; $k_j = |A^j|$ – количество объектов, размещаемых в подконтейнере Ω^j , $k_j > 0$, $j \in J_m$, при этом,

$$\sum_{j=1}^m k_j = n. \tag{2}$$

На суммарную массу объектов, размещаемых в подконтейнерах Ω^j , $j \in J_m$, накладывается ограничение:

$$\sum_{i=1}^{k_1} m_i \geq \sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} m_i \geq \dots \geq \sum_{i=k_1+k_2+\dots+k_{m-1}+1}^n m_i, \tag{3}$$

где $k_j = |A^j| \geq 1$, $j \in J_m$.

Кроме того, должны выполняться следующие ограничения размещения:

$$\text{int}C_{i_1} \cap \text{int}C_{i_2} = \emptyset, i_1 < i_2 \in J_n^j, j \in J_m, \tag{4}$$

$$C_i \subset \Omega^j, i \in J_n^j, j \in J_m, \tag{5}$$

$$h^j \leq t_j, h^j = \max\{h_i^j, i \in J_n^j\}, j \in J_m. \tag{6}$$

Обозначим через Ω_A систему, образованную в результате размещения цилиндров C_i семейства A в контейнере Ω , а через $O_s XYZ$ – систему координат Ω_A , где $O_s = (x_s(v), y_s(v), z_s(v))$ – центр масс Ω_A , а оси $O_s X \parallel O x$, $O_s Y \parallel O y$, $O_s Z \parallel O z$,

$$x_s(v) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M}, y_s(v) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M}, z_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M}, \tag{7}$$

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \text{ – масса системы } \Omega_A.$$

В качестве функций цели в данном исследовании рассматриваются:

- отклонение центра масс O_s системы Ω_A от заданной точки (x_0, y_0, z_0) ;
- метрические характеристики контейнера Ω .

Комбинаторная задача балансной компоновки (Combinatorial Balance Layout Problem, CBLP). Определить такой вариант разбиения множества A на подмножества A^j , $j \in J_m$ с учетом ограничений (2)-(6), и параметры размещения (x_i^*, y_i^*, z_i^*) цилиндров C_i , $i \in J_n$, при котором функция цели достигала бы своего минимального значения.

Полагаем, что задача имеет хотя бы одно допустимое решение.

Варианты разбиения множества A на непустые подмножества A^j , $j \in J_m$, определяются количеством элементов в каждом подмножестве и порядком следования подмножеств. Рассмотрим подконтейнеры Ω^j и соответствующие им множества объектов A^j , $j \in J_m$. Тогда кортеж натуральных чисел (k_1, k_2, \dots, k_m) , такой что $\sum_{j=1}^m k_j = n$, определяет возможное количество k_j объектов в каждом подконтейнере Ω^j . Количество всех таких кортежей равно числу композиций числа n длины m , которое составляет C_{n-1}^{m-1} .

Рассмотрим теперь, сколькими способами можно разложить n различных объектов из множества A в m подконтейнеров Ω^j , $j \in J_m$, при условии, что в подконтейнерах находится соответственно k_1, k_2, \dots, k_m объектов, причем множества объектов A^j , $j \in J_m$, внутри соответствующих подконтейнеров Ω^j , $j \in J_m$, не упорядочены. Не теряя общности, будем различать цилиндры с одинаковыми значениями метрических характеристик r_i, h_i и масс m_i (например, считать их различающимися по номеру).

Упорядочим элементы множества A . Каждому цилиндру поставим в соответствие номер подконтейнера, в который он будет помещен. Получим кортеж, состоящий из n элементов, которые образуют перестановку с повторениями из m номеров $1, 2, \dots, m$, в которой первый элемент (номер первого подконтейнера) повторяется k_1 раз, второй — k_2 раз, ..., последний — k_m раз. Каждая такая перестановка определяет свой способ раскладки, а их общее число равно

$$P(n, k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}. \quad (8)$$

Тогда количество вариантов распределения n различных цилиндров из множества A по m подконтейнерам Ω^j при условии, что каждый подконтейнер содержит хотя бы один объект и порядок размещения объектов внутри подконтейнера не важен, равно

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} P(n, k_1, k_2, \dots, k_m) = \\ & = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!} \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что число слагаемых в сумме равно числу разбиений числа n на m натуральных слагаемых, которое составляет $N = C_{n-1}^{m-1}$.

Для генерации различных вариантов подмножеств A^j , $j \in J_m$, построим комбинаторную конфигурацию следующим образом.

Обозначим $Pt(n, m)$ множество разбиений числа n на m натуральных слагаемых (соответствует распределению n различных цилиндров из множества A по m подконтейнерам Ω^j , $j \in J_m$, при условии, что каждый подконтейнер содержит хотя бы один объект и порядок объектов внутри подконтейнера не важен).

$$\text{При этом, } |Pt(n, m)| = N = C_{n-1}^{m-1}.$$

Пусть $(k_1, k_2, \dots, k_m) \in Pt(n, m)$, $\sum_{j=1}^m k_j = n$, $k_i \geq 1$, $i \in J_m$.

Введем комбинаторное множество \mathbb{Q} , которое представляет собой композиционный образ комбинаторных множеств (k -множество) $Pt(n, m)$; $C_n^{k_1}$, $C_{n_1}^{k_2}$, $C_{n_2}^{k_3}$, ..., $C_{n_{m-1}}^{k_m}$, порожденный множествами I_n , I_{n_1} , I_{n_2} , ..., $I_{n_{m-1}}$ [8], где

$$n_i = n - k_1 - \dots - k_i, \quad i \in J_{m-1},$$

$$I_{n_0} = J_n,$$

$$I_{n_1} = I_{n_0} \setminus \{j_1^{n_0}, j_2^{n_0}, \dots, j_{k_1}^{n_0}\}, \quad (j_1^{n_0}, j_2^{n_0}, \dots, j_{k_1}^{n_0}) \in C_n^{k_1},$$

$$I_{n_2} = I_{n_1} \setminus \{j_1^{n_1}, j_2^{n_1}, \dots, j_{k_2}^{n_1}\}, \quad (j_1^{n_1}, j_2^{n_1}, \dots, j_{k_2}^{n_1}) \in C_{n_1}^{k_2},$$

...

$$I_{n_{m-1}} = I_{n_{m-2}} \setminus \{j_1^{n_{m-2}}, j_2^{n_{m-2}}, \dots, j_{k_{m-1}}^{n_{m-2}}\},$$

$$(j_1^{n_{m-2}}, j_2^{n_{m-2}}, \dots, j_{k_{m-1}}^{n_{m-2}}) \in C_{n_{m-2}}^{k_{m-1}},$$

$$I_{n_{m-1}} = \{j_1^{n_{m-1}}, j_2^{n_{m-1}}, \dots, j_{k_m}^{n_{m-1}}\}, \quad (j_1^{n_{m-1}}, j_2^{n_{m-1}}, \dots, j_{k_m}^{n_{m-1}}) \in C_{n_{m-1}}^{k_m}.$$

Отметим, что

$$I_{n_0} \cup I_{n_1} \cup \dots \cup I_{n_{m-1}} = J_n = \{1, 2, \dots, n\}.$$

$$I_{n_s} \cap I_{n_t} = \emptyset, \quad s \neq t \in J_{m-1} = \{0, 1, \dots, m-1\}.$$

Элемент $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}$ может быть описан следующим образом:

$$q = (q_1, \dots, q_{k_1}, q_{k_1+1}, \dots, q_{k_1+k_2}, \dots, q_{k_1+\dots+k_{m-1}}, \dots, q_{k_1+\dots+k_m}),$$

$$\text{где } (q_1, \dots, q_{k_1}) = (j_1^{n_0}, j_2^{n_0}, \dots, j_{k_1}^{n_0}) \in C_n^{k_1},$$

$$(q_{k_1+1}, \dots, q_{k_1+k_2}) = (j_1^{n_1}, j_2^{n_1}, \dots, j_{k_2}^{n_1}) \in C_{n_1}^{k_2},$$

...

$$\begin{aligned} & (q_{k_1+\dots+k_{m-1}}, \dots, q_{k_1+\dots+k_m}) = \\ & = (j_1^{n_{m-1}}, j_2^{n_{m-1}}, \dots, j_{k_m}^{n_{m-1}}) \in C_{n_{m-1}}^{k_m}. \end{aligned}$$

Мощность множества \mathbb{Q} определяется формулой (9).

В дальнейшем будем называть элемент $q = (q_1, \dots, q_n)$ множества \mathbb{Q} кортежем разбиения множества объектов A на подмножества A^j , $j \in J_m$.

Определим вектор переменных задачи СБЛР: $u = (v, z)$, где $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, $v_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, x_i, y_i — непрерывные переменные, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, z_i — дискретные переменные.

Значения переменных z_i , $i = 1, 2, \dots, n$, определяются в порядке, задаваемом элементами $q = (q_1, \dots, q_n)$ комбинаторного множества \mathbb{Q} следующим образом:

$$z_{q_i} = \sum_{l=1}^s t_{l-1} + h_{q_i}, \quad (10)$$

где

$$s = \begin{cases} 1, & \text{если } i \leq k_1, \\ 2, & \text{если } k_1 < i \leq k_1 + k_2, \\ \dots & \\ m, & \text{если } k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1} < i \leq k_1 + k_2 + \dots + k_m, \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad q_i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}.$$

Ограничения размещения цилиндров множества A в контейнере Ω вида (4), (5) описываются системой неравенств $\Upsilon_1(u) \geq 0$, $\Upsilon_2(u) \geq 0$, где $\Upsilon_1(u) \geq 0$ — ограничение, описывающее непересечение цилиндров, $\Upsilon_2(u) \geq 0$ — ограничение, описывающее включение цилиндров в Ω , где

$$\Upsilon_1(u) = \min\{\Upsilon_1^j(u), j \in J_m\},$$

$$\Upsilon_1^j(u) = \min\{\Upsilon_{q_1 q_2}^j(u_{q_1}, u_{q_2}), q_1 < q_2 \in J_n^j\}, \quad (11)$$

$$\Upsilon_2^*(u) = \min\{\Upsilon_2^{*j}(u), j \in J_m\},$$

$$\Upsilon_2^{*j}(u) = \min\{\Upsilon_{q_i}^*(u_{q_i}), q_i \in J_n^j\}, \quad (12)$$

$\Upsilon_{q_1 q_2}^j(u_{q_1}, u_{q_2})$ — функция, описывающая условие непересечения цилиндров \mathbb{C}_{q_1} и \mathbb{C}_{q_2} , $u_{q_1} = (x_{q_1}, y_{q_1}, z_{q_1})$, $u_{q_2} = (x_{q_2}, y_{q_2}, z_{q_2})$, $\Upsilon_{q_i}^*(u_{q_i})$ — функция, описывающая условие непересечения цилиндра \mathbb{C}_{q_i} и объекта

$$\Omega^{*j} = \mathbb{R}^3 / \text{int} \Omega^j .$$

Заметим, что при фиксированных значениях z_{q_1} и z_{q_2} имеем:

$\Upsilon_{q_1, q_2}^j(u_{q_1}, u_{q_2}) = \Phi_{q_1, q_2}^{\text{CC}}(u_{q_1}, u_{q_2})$ – *phi*-функция для цилиндров \mathbb{C}_{q_1} и \mathbb{C}_{q_2} [9],

$\Upsilon_{q_i}^*(u_{q_i}) = \Phi_{q_i}^{\text{C}\Omega^{*j}}(u_{q_i})$ – *phi*-функция для цилиндра \mathbb{C}_{q_i} и объекта Ω^{*j} [6].

Поскольку объекты из множества $A^j = \{\mathbb{C}_{q_i}, q_i \in J_n^j\}$, располагаются на стеллаже подконтейнера Ω^j , то *phi*-функцию $\Phi_{q_1, q_2}^{\text{CC}}(u_{q_1}, u_{q_2})$ можно представить в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \Phi_{q_1, q_2}(v_{q_1}, v_{q_2}) &= \\ &= (x_{q_2} - x_{q_1})^2 + (y_{q_2} - y_{q_1})^2 - (r_{q_2} + r_{q_1})^2, \end{aligned} \quad (13)$$

где $v_{q_1} = (x_{q_1}, y_{q_1}), v_{q_2} = (x_{q_2}, y_{q_2})$,

а *phi*-функция $\Phi_{q_i}^{\text{C}\Omega^{*j}}(u_{q_i})$ примет вид

$$\Phi_{q_i}(R, v_{q_i}) = -x_{q_i}^2 - y_{q_i}^2 + (R_{q_i}^z(R) - r_{q_i})^2, \quad (14)$$

$R_{q_i}^z(R)$ – радиус «подконтейнера» C^z (сечение контейнера Ω плоскостью, параллельной $Oxу$, на высоте $z_i + h_i$), $R_{q_i}^z(R) \geq r_{q_i}$;

$R_{q_i}^z = \sqrt{H - 2h_{q_i} - \sum_{l=1}^j t_{l-1}}$, $q_i \in J_n^j$, $j=1, \dots, m$, для параболического контейнера; $R_{q_i}^z = R$, $q_i \in J_n^j$, $j=1, \dots, m$, для цилиндрического контейнера; $R_{q_i}^z = R_1 - ((2h_{q_i} + \sum_{l=1}^j t_{l-1}) \setminus H)(R_1 - R_2)$, $q_i \in J_n^j$, $j=1, \dots, m$, для контейнера формы усеченного конуса.

2. Математическая модель

Математическую модель задачи СBLP можно определить следующим образом:

$$F(u^*) = \min F(u) \text{ s.t. } u \in W, \quad (15)$$

$$W = \{u \in \mathbb{R}^\sigma : \Upsilon_1(u) \geq 0, \Upsilon_2^*(u) \geq 0, \delta(u) \geq 0\}, \quad (16)$$

где $u = (p, v, z)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, $v_i = (x_i, y_i)$, $i=1, \dots, n$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, функция $\Upsilon_1(u)$ описывается соотношением (11) при $\Xi = \bigcup_{j=1}^m \Xi^j$, $\Xi^j = \{(q_1, q_2) : q_1 < q_2 \in J_n^j\}$, функция $\Upsilon_2^*(u)$ определяется формулой (12), элементы вектора z задаются соотношением (10), а $\delta(u) \geq 0$ – дополнительная система ограничений на переменные метрические характеристики контейнера и параметры размещения объектов.

В данном исследовании рассматриваются две реализации математической модели (15)-(16).

Если рассматривается задача СBLP с целью минимизации отклонения центра масс O_s системы Ω_A от заданной точки (x_0, y_0, z_0) , то математическая модель (15)-(16) примет вид

$$F(u^*) = F(v^*, z^*) = \min F(v, z) \text{ s.t. } u \in W, \quad (17)$$

$$F(v, z) = (x_s(v, z))^2 + (y_s(v, z))^2 + (z_s - z_0)^2, \quad (18)$$

$$W = \{(v, z) \in \mathbb{R}^{3n} : \Upsilon_1(v, z) \geq 0, \Upsilon_2^*(v, z) \geq 0\}, \quad (19)$$

где $u = (v, z)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, $v_i = (x_i, y_i)$, $i=1, \dots, n$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, функция $\Upsilon_1(v, z)$ описывается соотношением (11) при $\Xi = \bigcup_{j=1}^m \Xi^j$, $\Xi^j = \{(q_1, q_2) : q_1 < q_2 \in J_n^j\}$, а функция $\Upsilon_2^*(v, z)$ определяется формулой (12), а элементы вектора z задаются соотношением (10).

Таким образом, математическая модель задачи (17)-(19) примет вид:

$$\min d, \text{ s.t. } u = (v, z) \in W, \quad (20)$$

где $v = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n), z = (z_1, \dots, z_n)$,

$$d = [\sum_{i=1}^n m'_i x_i]^2 + [\sum_{i=1}^n m'_i y_i]^2 + [\sum_{i=1}^n m'_i z_i]^2,$$

а область W описывается системой неравенств вида

$$\begin{cases} (x_{q_2} - x_{q_1})^2 + (y_{q_2} - y_{q_1})^2 - (r_{q_2} + r_{q_1})^2 \geq 0, \\ q_1, q_2 \in \Xi^j, j \in J_m, \\ -x_{q_i}^2 - y_{q_i}^2 + (R_{q_i}^z - r_{q_i})^2 \geq 0, \\ q_i \in \Xi^j, j \in J_m. \end{cases} \quad (21)$$

Заметим, что $m'_i = \frac{m_i}{M} = \text{const}$, $M = \sum_{i=1}^n m_i = \text{const}$.

Если рассматривается задача СBLP с целью минимизации радиуса основания цилиндрического контейнера, то математическая модель (15)-(16) примет вид

$$F(R, u^*) = F(R, v^*, z^*) = \min F(R, v, z) \text{ s.t. } u \in W, \quad (22)$$

$$F(R, v, z) = R, \quad (23)$$

$$W = \{(R, v, z) \in \mathbb{R}^{3n+1} : \Upsilon_1(v, z) \geq 0, \Upsilon_2^*(R, v, z) \geq 0, \mu(R, v, z) \geq 0, R \geq r'\}, \quad (24)$$

где $u = (v, z)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$, $v_i = (x_i, y_i)$, $i=1, \dots, n$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, функция $\Upsilon_1(v, z)$ описывается соотношением (11) при $\Xi = \bigcup_{j=1}^m \Xi^j$, $\Xi^j = \{(q_1, q_2) : q_1 < q_2 \in J_n^j\}$, функция $\Upsilon_2^*(R, v, z)$ определяется формулой (12), элементы вектора z задаются соотношением (10), $r' = \max_{i=1, \dots, n} r_i$, а условие $\mu(R, v, z) \geq 0$ – ограничение равновесия, где

$$\mu(u) = \min\{\mu_1(u), \mu_2(u), \mu_3(u)\},$$

$$\mu_1(u) = \min\{-(x_e - x_c) + \Delta x_c, (x_e - x_c) + \Delta x_c\},$$

$$\mu_2(u) = \min\{-(y_e - y_c) + \Delta y_c, (y_e - y_c) + \Delta y_c\},$$

$$\mu_3(u) = \min\{-(z_e - z_c) + \Delta z_c, (z_e - z_c) + \Delta z_c\}.$$

Здесь $(\Delta x_c, \Delta y_c, \Delta z_c)$ – допустимые отклонения от центра масс системы Ω^A .

Таким образом, математическая модель задачи (22)-(24) примет вид:

$$\min R \text{ s.t. } (R, u) \in W, \quad (25)$$

где $u = (v, z)$, $v = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, а W описывается системой неравенств вида

$$\begin{cases} (x_{q_2} - x_{q_1})^2 + (y_{q_2} - y_{q_1})^2 - (r_{q_2} + r_{q_1})^2 \geq 0, \\ q_1, q_2 \in \Xi^j, j \in J_m \\ -x_{q_i}^2 - y_{q_i}^2 + (R_{q_i}^z - r_{q_i})^2 \geq 0, \\ q_i \in \Xi^j, j \in J_m, \\ (x_e - x_c) + \Delta x_c \geq 0, \\ (y_e - y_c) + \Delta y_c \geq 0, \\ (z_e - z_c) + \Delta z_c \geq 0, \\ -(x_e - x_c) + \Delta x_c \geq 0, \\ -(y_e - y_c) + \Delta y_c \geq 0, \\ -(z_e - z_c) + \Delta z_c \geq 0, \\ R - r' \geq 0. \end{cases} \quad (26)$$

Для решения задач СВЛР используется следующая стратегия:

1. Случайным образом генерируется множество $\{q\}$ кортежей разбиения $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}$ [10].
2. Осуществляется проверка выполнения условий (3), (6) для каждого из кортежей $q \in \{q\}$. Строится подмножество $\{q'\} \subseteq \{q\}$, для элементов которого выполняются обозначенные выше условия. Если $\{q'\} = \emptyset$, то возвращаемся к шагу 1.
3. Строится множество допустимых стартовых точек $\{u'_0\}$ для каждого кортежа из множества $\{q'\}$, используя алгоритм, предложенный в [7].
4. Реализуется поиск локального экстремума задачи (15)-(16) для каждой стартовой точки $u'_0 \in W$ при фиксированном кортеже q' . Для поиска локальных экстремумов используется NLP-решатель IPOPT [11].
5. Лучший из полученных локальных экстремумов для всех кортежей множества $\{q'\}$ и допустимых стартовых точек множества $\{u'_0\}$ выбирается в качестве локально-оптимального решения задачи СВЛР.

3. Результаты численных экспериментов

Рассматривается задача балансной компоновки $n=8$ цилиндров (табл. 1) в цилиндрическом контейнере, разделенном двумя круговыми стеллажами на $m=3$ подконтейнера с целью минимизации: отклонения центра масс системы Ω_A от точки $(0,0,0)$; радиуса основания цилиндрического контейнера с учетом ограничения равновесия системы Ω_A .

Высота контейнера $H=6$, расстояние между стеллажами $t_1=2$; $t_2=2$.

Таблица 1

Исходные данные о цилиндрах

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
m_i	4	2	2	1	3	3	5	5
r_i	1	0.7	0.6	0.45	0.8	0.85	0.9	1
h_i	1.27	1.3	1.77	1.57	1.49	1.32	1.96	1.59

3.1 Результаты численных экспериментов для задачи (20)-(21).

Значение функции цели $R^*=1.9000$ при $q^1 = (1, 4, 7, | 3, 5, 8, | 2, 6)$.

Значение функции цели $R^*=1.9167$ при $q^2 = (3, 7, 8, | 1, 5, 6, | 2, 4)$.

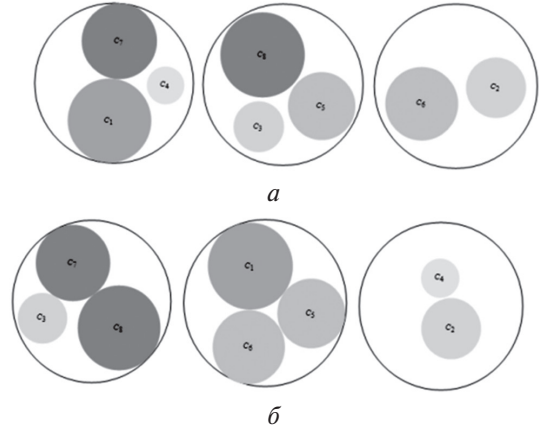


Рис. 3. Проекция локально-оптимальных размещений цилиндров в подконтейнерах, соответствующие a — кортежу q^1 ; b — кортежу q^2

На рис. 4 приведены локально-оптимальные размещения цилиндров в подконтейнерах $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$, соответствующие кортежам q^1 и q^2 .

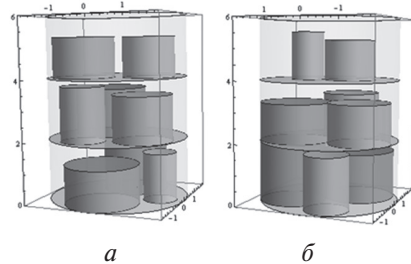


Рис. 4. Локально-оптимальные размещения цилиндров в подконтейнерах, соответствующие: a — кортежу q^1 ; b — кортежу q^2

Значение функции цели $R^* = 2.2005$ при $q^3 = (1, 5, 6, 8, | 2, 7, | 3, 4)$.

Значение функции цели $R^* = 2.2002$ при $q^4 = (1, 3, 5, 6, | 7, 8, | 2, 4)$.

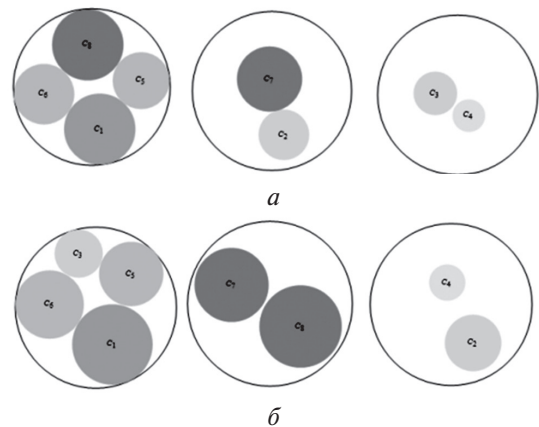


Рис. 5. Проекция локально-оптимальных размещений цилиндров в подконтейнерах, соответствующие a — кортежу q^3 ; b — кортежу q^4

На рис. 6 приведены локально-оптимальные размещения цилиндров в подконтейнерах $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$, соответствующие кортежам q^3 и q^4 .

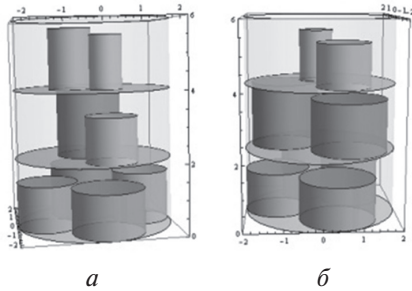


Рис. 6. Локально-оптимальные размещения цилиндров в подконтейнерах,

соответствующие: a – кортежу q^3 ; b – кортежу q^4

Наилучший результат $R^*=1.9000$ получен для задачи (20)-(21) при $q^1 = (1, 4, 7, | 3, 5, 8, | 2, 6)$.

3.2 Результаты численных экспериментов для задачи (25)-(26).

Полагаем, что $\Delta x_c = \Delta y_c = \Delta z_c = 0.01$, а радиус контейнера равен $R=2.5$.

Значение функции цели $d^*=0.3851$ при $q^1 = (1, 4, 7, | 3, 5, 8, | 2, 6)$.

Значение функции цели $d^*=0.8847$ при $q^2 = (3, 7, 8, | 1, 5, 6, | 2, 4)$.

На рис. 7, 8 приведены локально-оптимальные размещения цилиндров в подконтейнерах $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$, соответствующие кортежам q^1 и q^2 .

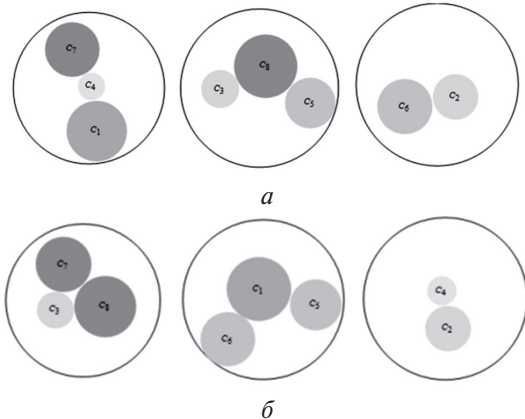


Рис. 7. Проекция локально-оптимальных размещений цилиндров в подконтейнерах,

соответствующие a – кортежу q^1 ; b – кортежу q^2

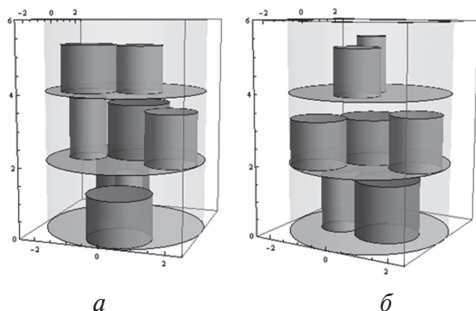
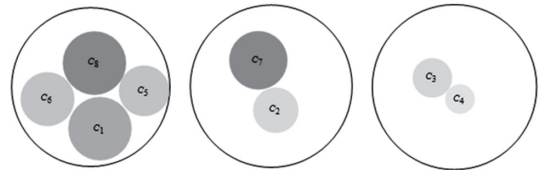


Рис. 8. Локально-оптимальные размещения цилиндров в подконтейнерах,

соответствующие: a – кортежу q^1 ; b – кортежу q^2

Значение функции цели $d^*=1.3938$ при $q^3 = (1, 5, 6, 8, | 2, 7, | 3, 4)$.



Значение функции цели $d^*=1.8847$ при $q^4 = (1, 3, 5, 6, | 7, 8, | 2, 4)$.

На рис. 9, 10 приведены локально-оптимальные размещения цилиндров в подконтейнерах $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$, соответствующие кортежам q^3 и q^4 .

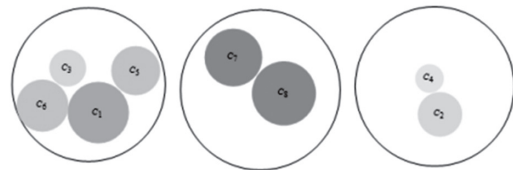


Рис. 9. Проекция локально-оптимальных размещений цилиндров в подконтейнерах,

соответствующие a – кортежу q^3 ; b – кортежу q^4

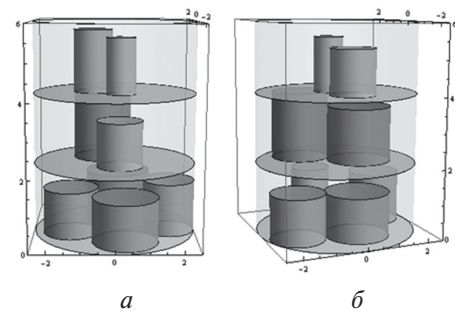


Рис. 10. Локально-оптимальные размещения цилиндров в подконтейнерах,

соответствующие: a – кортежу q^3 ; b – кортежу q^4

Наилучший результат $d^*=0.3851$ получен для задачи (25)-(26) при $q^1 = (1, 4, 7, | 3, 5, 8, | 2, 6)$.

Выводы

Рассмотрена задача балансной компоновки цилиндров в контейнере (прямой круговой цилиндр, параболоид вращения, усеченный круговой конус), разделенном круговыми стеллажами на подконтейнеры. Построена математическая модель, учитывающая не только ограничения размещения и ограничения поведения, но и комбинаторные особенности задачи, связанные с необходимостью построения разбиений множества размещаемых цилиндров по подконтейнерам. Предложена стратегия решения, которая включает процедуры: генерации кортежей разбиения; построения стартовых точек из области допустимых решений; локальной оптимизации. Данный подход использует принцип «мультистарта» для поиска «хороших» допустимых решений. Результаты численных экспериментов показали эффективность предложенного подхода для рассматриваемого класса задач балансной компоновки.

Список литературы:

1. Modeling and Optimization in Space Engineering. Series: Springer Optimization and Its Applications, Vol. 73, Fasano G, Pinte'r J.D. (Eds.), XII. – 2013. – 404 p.
2. Che C., Wang Y., Teng H. Test problems for quasi-satellite packing: Cylinders packing with behavior constraints and all the optimal solutions known. – Optimization Online (2008) http://www.optimizationonline.org/DB_HTML/2008/09/2093.html
3. Sun Z., Teng H. Optimal layout design of a satellite module. – Engineering optimization. – 2003. – Vol. 35, № 5. – P. 513-530.
4. Sun Z., Teng H. Optimal layout design of a satellite module. – Engineering optimization. – 2003. – Vol. 35, № 5. – P. 513-530.
5. Lei K. Constrained Layout Optimization Based on Adaptive Particle Swarm Optimizer. – Advances in Computation and Intelligence. Series: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. Zhihua C., Zhenhua L., Zhuo K., Yong L. (Eds.). – 2009. – № 1. – P. 434-442.
6. A. A. Kovalenko, T. E. Romanova, P. I. Stetsyuk (2015) Balance layout problem for 3D-objects: mathematical model and solution methods. Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 51, No. 4, P. 556-565, DOI 10.1007/s10559-015-9746-5
7. Stoyan Yu., Romanova T., Pankratov A., Kovalenko A., Stetsyuk P. (2016) Modeling and Optimization of Balance Layout Problems. Chapter (pp. 177-208) in contributed book Space Engineering. Modeling and Optimization with Case Studies/ Springer Optimization and Its Applications, Editors G. Fasano and J. Pinte'r, New York, Vol. 114, XV, 487 p.
8. Yu. G. Stoyan, I.V. Grebennik Description and Generation of Combinatorial Sets Having Special Characteristics // International Journal of Biomedical Soft Computing and Human Sciences, Special Volume “Bilevel Programming, Optimization Methods, and Applications to Economics” Vol. 18, №1, 2013. – P. 83-88.
9. Stoyan Yu., Romanova T. Mathematical Models of Placement Optimization: Two- and Three-Dimensional Problems and Applications – Modeling and optimization in space engineering. Series: Springer optimization and its applications. Fasano G, Pinte'r J.D. (Eds.), XII. – 2013. – Vol. 73. – P. 363-388.
10. Igor Grebennik, Random generation of combinatorial sets with special properties / Igor Grebennik, Oleksandr Lytvynenko // An International Quarterly Journal on Economics of Technology and Modelling Processes (ECONTECHMOD). – 2016. – Vol. 5, № 4. – pp. 43–48.
11. Wachter A., Biegler L.T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. – Mathematical Programming. – 2006. – Vol. 106, № 1, P. 25-57.

Поступила до редколегії 27.03.2017