

УДК 004.925

В.М. Гусятин, М.В. Гусятин

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДА СФЕРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

В статье рассмотрены вопросы построения плоских и пространственных кривых методом сферической интерполяции. Приведены конечные соотношения для определения точки гладких кривых и поверхностей. Приведены результаты моделирования в пакете Wolfram Mathematica кривых и поверхностей с оценкой погрешностей. Совмещение метода сферической интерполяции и синтеза изображений кривых и поверхностей методом обратного трассирования (Ray Tracing) дает возможность использовать существующие базы данных кривых, заданных отрезками прямых линий, и триангулированных поверхностей, используемых для конструирования различных объектов в современной компьютерной графике, с сохранением высокого реализма, присущего методу обратного трассирования.

Ключевые слова: метод обратного трассирования, моделирование пространственных кривых и поверхностей, квадрик, метод сферической интерполяции.

Введение

Выполнение требования высокой реалистичности синтеза изображений является важным фактором, например, при проектировании систем визуализации тренажеров транспортных средств различного назначения (авиатренажеры и др.), при создании художественных фильмов с применением компьютерной графики и др. Одним из возможных путей решения этой проблемы является применение метода обратного трассирования при решении задач синтеза изображений [1, 3].

Метод обратного трассирования (Ray Tracing) активно развивается в последние годы [3]. Этот метод позволяет синтезировать изображение аналитически описываемых поверхностей без их предварительной триангуляции, что существенно повышает реалистичность синтезируемых изображений объектов. В тоже время накопленная в компьютерной графике база моделей объектов и программного обеспечения ориентированы на кривые, заданные отрезками прямых и триангулированные поверхности. Такое представление необходимо при синтезе изображений кривых и поверхностей в классической компьютерной графике методом прямого трассирования (Rasterization method).

Возникает задача совмещения метода обратного трассирования с накопленной базой моделей объектов и программного обеспечения с сохранением его особенностей высокой реалистичности.

Решение этой задачи существенно упрощается, если для интерполяции кривых и поверхностей используется метод сферической интерполяции [10].

Таким образом, решение задачи совмещения новых методов моделирования гладких геометрических форм пространственных кривых, заданных прямыми линиями, триангулированных поверхностей и метода обратного трассирования является

актуальной задачей на данном этапе развития компьютерной графики.

Анализ литературы. Параметрическое описание кривых и поверхностей затрудняет применение стандартных алгоритмов нахождения точек пересечения поверхностей для синтеза изображений с использованием метода обратного трассирования [1-5]. Такая особенность параметрического описания заставила исследователей обратиться к алгебраическим кривым и поверхностям [6-10]. Авторами работ [6, 7] предлагается использовать для интерполяции алгебраические поверхности высоких порядков. Недостатком такого подхода является сложность расчета коэффициентов таких поверхностей. В [8] предлагается для интерполяции исходной сетки высокой детализации использовать алгебраическую поверхность второго порядка. По мнению автора этого метода, он может быть использован в системах интерактивного объемно ориентированного геометрического моделирования. В работах [9,10] предлагается использовать метод сферической интерполяции, который является универсальным, позволяющим выполнять сглаживание как кривых, так и поверхностей. Такой подход упрощает нахождение точки пересечения проекционного луча с интерполирующей поверхностью методом обратного трассирования.

Цель статьи. Излагаются основные этапы конструирования и результаты моделирования плоских и пространственных кривых, а также результаты моделирования поверхностей, выполненные авторами, с целью показать универсальность метода сферической интерполяции.

Основные этапы моделирования

1. Область интерполяции. В качестве примера рассмотрим конструирование пространственной кривой. На рис. 1 представлены геометрические элемен-

ты задачи. Показана правая система координат с/к XYZ (ось направлена вверх). В сцене, которая на рисунке ограничена кубом, набором точек $(p_1 - p_2)$ представлены исходные данные для конструируемой гладкой кривой. Эти исходные данные дополняются единичными нормальными $n_1 \{n_{1x}, n_{1y}, n_{1z}\} - n_{12}$ в каждой точке [9]. В соответствии с [9] метод сферической интерполяции позволяет построить гладкую кривую, как локально для отдельного отрезка, так и в целом для всех отрезков. Поэтому, излагая основные этапы конструирования, будем рассматривать процесс вычислений для локального (отдельного) отрезка. Поскольку, в дальнейшем, в соотношениях в основном будут записаны векторные величины - не будем обозначать их стрелкой. По аналогии с [9] выделим для каждого отрезка область интерполяции. Для этого построим сферу наибольшей кривизны для выбранного отрезка. Эта сфера ограничивает пространство таким образом, что любая пространственная кривая, построенная на отрезке, например, p_1, p_2 , будет находиться внутри этой сферы. Определим радиус-вектор c_0 для середины отрезка p_1, p_2 , в которой расположен центр сферы наибольшей кривизны.

$$c_0 = (p_1 + p_2) / 2. \quad (1)$$

Радиус сферы равен:

$$R = |p_1 + p_2| / 2. \quad (2)$$

Запишем уравнение для сферы наибольшей кривизны в векторной форме

$$|r - c_0| - R = 0, \quad (3)$$

где r – произвольный радиус-вектор.

2. Соотношения для построения опорных сфер.

Для упрощения обозначений будем считать, что на предыдущем этапе выбран отрезок p_1, p_2 .

Векторное поле направляющих, на которых собственно и будут лежать точки интерполирующей кривой, построенной методом сферической интерполяции, определим, как прямые, расположенные перпендикулярно к прямой линии, соединяющей две последовательно заданные точки p_1, p_2 в области интерполяции [9]. Основной особенностью метода сферической интерполяции является использование такого квадрата как сфера для построения пространственной кривой произвольной формы между двумя точками. Наличие нормалей к будущей кривой в каждой точке, через которые она проходит, позволяет получить наряду со связностью (C0) и непрерывность первой производной т.е. гладкость (C1) синтезируемой кривой [1, 9, 10]. В процессе синтеза изображения кривой выполним следующие геометрические построения. Через концы отрезка каждой прямой, например, через точки p_1, p_2 проведем две сферы (так называемые опорные сферы). При этом центр o_1 одной сферы должен находиться на прямой, проходящей через точку p_1 и совпадающей с вектором n_1 нормали в этой точке. Центр o_2

второй сферы должен находиться на прямой, проходящей через точку p_2 и совпадающей с вектором нормали n_2 . Соотношения для уравнений этих прямых имеют вид:

$$p_{o1} = p_1 + n_1 \cdot t, \quad p_{o2} = p_2 + n_2 \cdot t. \quad (4)$$

Введем обозначение и запишем уравнение для плоскости, проходящей через точку (1) перпендикулярно этому отрезку:

$$(r - c_0)(p_2 - p_1) = 0. \quad (5)$$

Найдем совместное решение уравнений (4) для каждой прямой и (5) относительно t и подставим полученные значения в (4). Таким образом, получим радиус-вектора для центров опорных сфер o_1, o_2 .

Запишем скалярные значения радиусов для опорных сфер:

$$R_1 = |p_1 - o_1|; \quad R_2 = |p_2 - o_2|.$$

В окончательном виде запишем уравнения для опорных сфер в векторной форме:

$$|r - o_1| - R_1 = 0; \quad |r - o_2| - R_2 = 0. \quad (6)$$

3. Соотношения для построения пространственной кривой. В [9] подробно изложены все этапы построения пространственной кривой методом сферической интерполяции. Запишем уравнение прямой параллельной вектору отрезка $p_2 - p_1$ и проходящей, например, через точку p_1 :

$$p(t) = p_1 + (p_2 - p_1) \cdot t. \quad (7)$$

Построим векторное поле направляющих [9]. Запишем для каждой опорной сферы вектора:

$$v_{o1} = c_0 - o_1; \quad v_{o2} = c_0 - o_2. \quad (8)$$

Далее для каждой опорной сферы запишем уравнения прямых, проходящих через произвольные точки $p(t)$ на отрезке p_1, p_2 прямой (7) и параллельно соответствующим векторам (8)

$$l_1 = p(t) + v_{o1} \cdot t^o; \quad l_2 = p(t) + v_{o2} \cdot t^o. \quad (9)$$

Подставляем (9) в уравнения сфер (6) и находим значения t^o , при которых выполняется пересечение прямых (9) соответственно со сферами (6). Пусть для 1-й сферы t_{11}^o, t_{12}^o , а для 2-й – t_{21}^o, t_{22}^o . Подставим эти значения в уравнение (9) и получим для каждой точки пересечения значения координат в с/к XYZ. Для каждой сферы имеем по две точки пересечения. Пусть это будут: для первой и второй сферы соответственно: $(p_{11}^o, p_{12}^o), (p_{21}^o, p_{22}^o)$. Для правильного выбора корней воспользуемся [9]. Пусть, например, это p_{11}^o и p_{21}^o . В соответствии [9] запишем соотношения для направляющих векторов:

$$s_{11} = p_{11}^o - p(t); \quad s_{21} = p_{21}^o - p(t).$$

Окончательно выражение для радиуса – вектора, задающего точку на конструируемой кривой, например, на отрезке между точками p_1, p_2 , запишем в виде соотношения:

$$s(t) = p(t) + (s_{11}(1-t) + s_{21} \cdot t); \quad (10)$$

где t – параметр, изменяющейся от нуля до единицы на отрезке p_1, p_2 .

В уравнении (10) второе слагаемое образует векторное поле направляющих, на которых собственно и лежат точки интерполирующей кривой. При изменении параметра t выполняется линейная интерполяция векторов s_{11}, s_{21} и образуется некоторая линейчатая поверхность, в которой лежат направляющие вектора, расположенные перпендикулярно к отрезку p_1, p_2 , как это следует из соотношений (9). При моделировании плоской кривой вектора s_{11}, s_{21} лежат в одной плоскости, при моделировании пространственной кривой вектора эти вектора не лежат в одной плоскости. В работе [10] подробно изложены этапы сглаживания триангулированной поверхности методом сферической интерполяции. Выражение для радиуса – вектора, задающего точку на конструируемой поверхности в этом случае, имеет вид

$$r = r_p + (s_{11} \cdot b_1 + s_{21} \cdot b_2 + s_{31} \cdot b_3). \quad (11)$$

В уравнении (11) во втором слагаемом (сумма в скобках) барицентрические координаты учитывают степень влияния соответствующей интерполирующей сферы на формирование точки конструируемой поверхности. Радиус-вектор r_p задает точку на поверхности треугольника, для которой строится соответствующая точка гладкой поверхности.

4. Математическое моделирование. Моделирование предлагаемого метода сферической интерполяции выполнено с использованием математического пакета Wolfram Mathematica. В качестве примера на рис. 1 представлены результаты построения пространственных кривых. Показаны произвольно расположенные, пронумерованные в порядке их задания точки $p_1 - p_{12}$ и интерполирующая кривая, построенная в соответствии с предлагаемым методом и проведенная через эти точки с учетом порядка их задания.

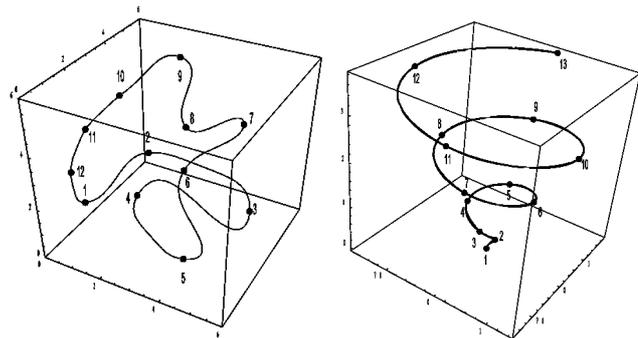
Наряду с построением интерполяционной кривой с помощью пакета Wolfram Mathematica выполнена оценка погрешности. В табл. 1, 2 представлены результаты оценки погрешности соответственно для кривых и поверхностей.

В качестве эталонных выбраны аналитически описываемые кривые и поверхности. Для таких разных кривых и поверхностей погрешность будем оценивать, как относительную погрешность отклонения точек конструируемой кривой и поверхности от эталонных, лежащих на направляющей прямой. Запишем в нашем случае относительную погрешность в следующей форме:

$$\delta = \Delta / M; \quad (12)$$

где Δ – абсолютная погрешность отклонения точек конструируемой кривой от эталонных, лежащих на направляющей прямой; M – некоторый параметр, имеющий максимальное значение, для той или иной эталонной функции.

В нашем случае это максимальное значение диаметра спирали. На рис. 1, б показан пример интерполирования кривой – спираль с переменным радиусом (проведена сплошной линией), интерполяционная кривая (проведена пунктирной линией). В табл. 1 приведены результаты оценки погрешности в соответствии с (12). В колонке нормаль представлены два случая: первый – нормаль совпадает с биссектрисой; второй – нормаль рассчитана аналитически для эталонных кривых.



а б

Рис. 1. Геометрические элементы задачи: а – произвольное задание точек $p_1 - p_{12}$ и интерполирующая их кривая, б – пример интерполирования по точкам $p_1 - p_{13}$ кривой – спираль с переменным радиусом

В табл. 2 представлена оценка погрешностей конструируемой поверхности.

Таблица 1

Результаты оценки погрешности

Тип	Эталон	Кол. точек интерполяции	Нормаль	δ_{\max}
Плоская кривая	эллипс	8	биссектриса аналитика	0,02 0,0029
	парабола	3	биссектриса	0,012
		3	аналитика	0,0066
	синус	5	биссектриса	0,006
5		аналитика	0,00056	
Пространственная кривая- спираль	R = const	13	биссектриса аналитика	0,011 0,011
	R = var	13	биссектриса аналитика	0,028 0,028

Результаты оценки поверхностей

Эталон	Количество треугольников	Погрешность макс.	Погрешность средн.
Цилиндр	8	0,023	0,007
	16	0,017	0,0045
Конус	8	0,0085	0,002
Тор	64	0,039	0,0075
	80	0,017	0,0046
	96	0,015	0,0045
Сфера (куб)	12	$2,3 \cdot 10^{-16}$	$7,67 \cdot 10^{-17}$
Сфера (тетраэдр)	4	$3,7 \cdot 10^{-8}$	$9,26 \cdot 10^{-9}$

Выводы

Метод сферической интерполяции является универсальным и позволяет построить плоскую и пространственную гладкую кривую как локально для двух точек, так и для ансамбля произвольно расположенных точек в порядке их задания, а также позволяет конструировать гладкую поверхность, как для отдельного треугольника, так и сглаживать произвольные триангулированные поверхности. Метод основан на использовании простейшего квадрата – сферы, что упрощает расчеты при конструировании кривой и поверхности. Дальнейшая работа авторов направлена на визуализацию этих кривых и поверхностей методом обратного трассирования

Список литературы

1. John F. Hughes, Andriesvan Dam, Morgan McGuire, David F. Sklar, James D. Foley, Steven K. Feiner, Kurt Akeley *Computer Graphics (principles and practice)* by Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 2014. – 1209 p.
2. Никулин Е.А. *Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики*. – Санкт-Петербург: «БХВ-Петербург», 2003. – 550 с.
3. Jim Hurley. *Ray Tracing Goes Mainstream* / Jim Hurley // *Intel Technology Journal “Compute-Intensive, Highly Parallel Applications and Uses”* – 2005, May 19. – Vol. 09, Published, Issue 02.

4. W. Barth. *Efficient Ray Tracing for Bezier and B-Spline Surfaces* / W. Barth and W. Sturzlinger // *Computers & Graphics*. – 1993 17(4): 423-430.

5. S. Campanga. *Improving Bezier Clipping and Chebyshev Boxing for Ray Tracing Parametric Surfaces*. / S. Campanga and P. Slusallek // – *Technical report, University of Erlangen, Computer Graphics Group*, – 1996.

6. Bajaj, C., Ihm, I., Warren, J. *Higher-order interpolation and least-squares approximation using implicit algebraic surfaces*. *ACM Trans. Graphics* 1993.–12, 4, 327–347.

7. Bajaj, C., Chen, J., Xu, G. *Modeling with Cubic A-Patches*. *ACM Trans. on Graphics*. 1995. –14, 2, 103-133.

8. Вяткин С.И. *Моделирование сложных поверхностей с применением функций возмущения* / С.И. Вяткин // *Автометрия*. – 2007. – № 3.

9. Гусятин В.М. *Построение пространственной кривой методом сферической интерполяции в задачах компьютерной графики* / В.М. Гусятин, М. В. Гусятин // *Вісник Сумського державного університету. Серія Технічні науки*. – Суми, 2013. – С. 23-30.

10. Гусятин В.М. *Сглаживание триангулированной поверхности методом сферической интерполяции в задачах компьютерной графики* / В.М. Гусятин, М.В. Гусятин // *Радіоелектронні і комп'ютерні системи*. – 2013. – № 3 (62) – С. 59-64.

Надійшла до редакції 9.02.2017

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.Г. Удовенко, Харківський національний економічний університет імені С. Кузнеця, Харків.

МОДЕЛЮВАННЯ МЕТОДУ СФЕРИЧНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

В.М. Гусятін, М.В. Гусятін

У статті розглянуті питання побудови плоских і просторових кривих методом сферичної інтерполяції. Наведено кінцеві співвідношення для визначення точки гладких кривих і поверхонь. Наведено результати моделювання в пакеті *Wolfram Mathematica* кривих і поверхонь з оцінкою похибок. Поєднання методу сферичної інтерполяції і синтезу зображень кривих і поверхонь методом зворотного трасування (*Ray Tracing*) дає можливість використовувати існуючі бази даних кривих, заданих відріzkами прямих ліній, і триангульованих поверхонь, використовуваних для конструювання різних об'єктів в сучасній комп'ютерній графіці, зі збереженням високого реалізму, властивого методу зворотного трасування.

Ключові слова: метод зворотного трасування, моделювання просторових кривих і поверхонь, квадрат, метод сферичної інтерполяції.

SIMULATION OF THE METHOD OF SPHERICAL INTERPOLATION

V.M. Gusiatin, M.V. Gusiatin

The problems of constructing plane and spatial curves by the method of spherical interpolation are considered in the article. Finite relations are given for the definition of a point of smooth curves and surfaces. The results of modeling in the *Wolfram Mathematica* package of curves and surfaces with an error estimate are presented. Combining the method of spherical interpolation and the synthesis of images of curves and surfaces by the method of reverse tracing (*Ray tracing*) makes it possible to use the existing database of curves given by straight line segments and triangulated surfaces used to construct various objects in modern computer graphics, while maintaining the high realism inherent in Method of reverse tracing.

Keywords: ray tracing method, modeling of spatial curves and surfaces, quadratics, spherical interpolation method.