

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НЬЮТОНА ДЛЯ РАСЧЕТА НА ЭВМ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ВОЗДУХОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ШАХТНЫХ ВЕНТИЛЯЦИОННЫХ СЕТЯХ

А. А. Волков, А. Г. Евдокимов, Б. Д. Яловкин

Харьков

При расчете и проектировании сложных технических систем наиболее перспективно применение методов математического моделирования и электронных цифровых вычислительных машин. В последние годы эти методы и средства применяются также и для расчета вентиляционных сетей шахт [1,2].

В работе [1] рассматривается метод расчета на машине Урал-1 установленного процесса воздухораспределения в вентиляционной сети одной из шахт Кривбасса. Особенностью данного метода является то, что он основывается на математическом описании, не отражающем в общем виде топологию сети, а, следовательно, не позволяющем составить универсальную программу расчета, т. е. программу, пригодную для сети любой топологии. Учитывая, что (как указывают сами авторы) наиболее трудоемкой и длительной операцией расчета является составление программы, эта особенность метода существенно затрудняет его практическое применение. Кроме того, сам метод вычислений, предложенный впервые М. М. Андрияшевым, является медленно сходящимся, что приводит к большим затратам машинного времени при расчетах.

В работах [3, 4] для подобного расчета вентиляционных сетей (правда, без использования ЭВМ) применяется метод Ньютона, обладающий быстрой сходимостью и более строгим математическим обоснованием. Однако и в этих работах исходное математическое описание не является универсальным.

В данной работе предлагается метод Ньютона для расчета шахтных вентиляционных сетей при помощи ЭВМ на основе универсального математического описания, что позволяет получить программу, пригодную для вентиляционной сети любой топологии.

§ 1. Универсальное математическое описание установившихся процессов воздухораспределения в шахтных вентиляционных сетях

Математическое описание установившегося процесса проветривания в шахте структурно определяется:

- а) системами уравнений, полученными из топологии сети;
- б) системой уравнений, составленной для ветвей сети.

При топологическом анализе шахтной вентиляционной сети все ветви сети следует заменить направленными отрезками. Получающаяся при этом структура называется линейным графом. Граф (геометрический образ) шахтной вентиляционной сети является связанным графом. Максимальным деревом связанного графа называется связанный подграф, который

содержит все узлы графа, но не содержит замкнутых путей. Ветви сети, входящие в максимальное дерево, называются ветвями дерева, а не входящие — связями. Имеется $n - 1$ ветвь дерева и $s = m - n + 1$ связей (m и n — количество ветвей и узлов сети; s — цикломатическое число сети). Каждая связь ограничена двумя узлами, между которыми всегда можно найти незамкнутый путь, состоящий только из ветвей дерева. Этот незамкнутый путь вместе со связью образует контур. Совокупность s контуров, образованных s связями совместно с ветвями дерева, дает основную систему контуров связанного графа.

Произведем кодировку сети следующим образом. Связям, дополняющим какое-нибудь максимальное дерево сети, присвоим номера от 1 до s , а ветвям дерева сети — от $s + 1$ до m . Контур, образованному r -й связью совместно с ветвями дерева, присвоим номер r . Направление обхода r -го контура выберем совпадающим с r -й ветвью сети. Можно показать [5, 6],

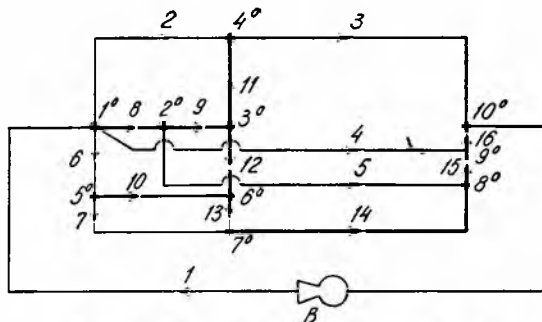


Рис. 1. Шахтная вентиляционная сеть

что полученная основная система контуров является независимой. Подобный способ кодировки сети назовем методом контуроразделения.

Введем в рассмотрение цикломатическую матрицу для ветвей дерева сети. Каждой r -й строке этой матрицы соответствует r -й независимый контур, а i -му столбцу — i -я ветвь дерева графа. Элемент K_{ri} матрицы K , находящийся на пересечении r -й строки и i -го столбца, равен 0 (ветвь i не принадлежит контуру r), 1 (направление ветви i совпадает с направлением контура r) или -1 (направление ветви i противоположно контуру r). На рис. 1 приведен простой пример шахтной вентиляционной сети, кодировка которой произведена согласно методу контуроразделения. Матрица контуров для ветвей одного из выбранных деревьев этой сети имеет следующий вид:

r/i	8	9	10	11	12	13	14	15	16
I	1	1	0	0	1	1	1	1	1
II	-1	-1	0	-1	0	0	0	0	0
III	0	0	0	1	-1	-1	-1	-1	-1
IV	-1	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	0
V	0	-1	0	0	-1	-1	-1	0	0
VI	-1	-1	1	0	-1	0	0	0	0
VII	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0

Состояние воздухораспределения шахтной вентиляционной сети определяется многомерными векторными переменными дебитом $\bar{q}$ и депрессией $\bar{h}$, составляющие которых q_i и h_i представляют собой значения дебита и депрессии в i -й ветви сети. При использовании метода контуроразделения эти многомерные векторные переменные разбиваются соответственно на два составляющих вектора: S -мерные векторы $\bar{q}_1$ и $\bar{h}_1$, составляющие которых q_r и h_r соответствуют дебиту и депрессии r -й связи

сети, и $(n-1)$ -мерные векторы $\bar{q}_2$ и $\bar{h}_2$, составляющие которых q_i и h_i представляют собой дебиты и депрессии i -й ветви дерева сети, т. е.

$$\bar{q} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2) = (q_1, q_2, \dots, q_s, q_{s+1}, \dots, q_m)$$

$$\bar{h} = (\bar{h}_1, \bar{h}_2) = (h_1, h_2, \dots, h_s, h_{s+1}, \dots, h_m)$$

Первый закон шахтной вентиляционной сети свидетельствует о том, что алгебраическая сумма дебитов ветвей, входящих в любой узел сети, равна 0. Второй закон этой же сети указывает на равенство 0 алгебраической суммы депрессий ветвей по любому замкнутому контуру. Пользуясь рядом теорем и положений, изложенных в литературе [5, 6, 7], можно показать, что первый закон вентиляционной сети позволяет определить дебиты ветвей дерева сети через дебиты связей этой сети, а второй — выразить депрессии связей сети через депрессии ветвей дерева этой сети:

$$q_i = \sum_{r=1}^s K_{ri} q_r \quad (i = s+1, \dots, m), \quad (1)$$

$$h_r = - \sum_{i=s+1}^m K_{ri} h_i \quad (r = 1, 2, \dots, s). \quad (2)$$

Третий закон шахтной вентиляционной сети позволяет однозначно определить зависимость между составляющей h_i m -мерного вектора депрессии $\bar{h}$ и составляющей q_j m -мерного вектора дебита $\bar{q}$. Эта зависимость определяется параметрами ветвей сети, в общем случае является нелинейной и может быть представлена для j -й ветви как алгебраическая сумма депрессий, создаваемых отдельными элементами этой ветви.

Элементы ветвей вентиляционной сети условно можно назвать пассивными и активными. К пассивным элементам относятся горные выработки и пути утечек. К активным — вентиляторы. Условимся, что депрессия, создаваемая пассивным элементом, и дебит через этот пассивный элемент будут положительными, если направление вентиляционной струи совпадает с выбранным направлением ветви. Будем также считать, что выбранное направление ветви совпадает с направлением нагнетания вентилятора этой ветви. Тогда для j -й ветви

$$h_j = h_j^{(n)} - h_j^{(b)}, \quad (3)$$

где $h_j^{(n)}$ — депрессия, создаваемая пассивным элементом j -й ветви;

$h_j^{(b)}$ — депрессия, создаваемая вентилятором j -й ветви.

Уравнение пассивного элемента j -й ветви имеет следующий вид:

$$h_j^{(n)} = \text{sign } q_j r_j |q_j|^{n_j}, \quad (4)$$

где r_j — аэродинамическое сопротивление горной выработки или пути утечки воздуха; $\text{sign } q_j$ — знак q_j ; n_j — показатель турбулентности, зависящий от степени турбулентности воздушного потока в j -й ветви и колеблющийся в общем случае от единицы до 2,2, но, как правило, на практике близкий к 2 (8). В дальнейшем будем считать, что показатель турбулентности равен 2, хотя принципиальное изложение материала не изменится, если рассматривать общий случай. При этом

$$h_j^{(n)} = r_j |q_j| q_j. \quad (5)$$

Характеристика вентилятора j -й выработки в своей рабочей части может быть с достаточной точностью описана полиномом второй степени [1] вида

$$h_j^{(b)} = \Psi_{0j} - \Psi_{1j} |q_j| q_j, \quad (6)$$

где Ψ_{0j} ; Ψ_{1j} — константы вентилятора, зависящие от его типоразмера, режима работы и конструктивных особенностей.

Уравнения (5) и (6) математически описывают отдельные элементы ветвей вентиляционной сети. Подставляя значения их правых частей в формулу (3), получим зависимость между составляющими многомерного вектора дебита $\bar{q} - q_i$ и составляющими многомерного вектора депрессии $\bar{h} - h_i$

$$h_i = R_i |q_i| q_i - \Psi_{0i}, \quad (7)$$

где $R_i = r_i + \Psi_{1j}$.

Уравнения (1), (2) и (7) полностью определяют установившееся воздухо-распределение в шахтной вентиляционной сети любой топологии. Исключая составляющие h_i вектора депрессий $\bar{h}$ из этих уравнений, получим систему m независимых уравнений, отображающих взаимосвязь между составляющими q_i вектора дебита $\bar{q}$, топологией сети и параметрами ее ветвей

$$q_i = \sum_{r=1}^s K_{ri} q_r \quad (i = s+1, \dots, m) \quad (8a)$$

$$f_r = R_r |q_r| q_r - \Psi_{0r} + \sum_{i=s+1}^m K_{ri} (R_i |q_i| q_i - \Psi_{0i}) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, s) \quad (8b)$$

Определение естественного воздухораспределения в шахтной вентиляционной сети сводится к решению системы уравнений (8) относительно составляющих q_i вектора дебита $\bar{q}$. Данная система уравнений вследствие ее нелинейности не может быть решена точными методами и поэтому для ее решения необходимо принять методы последовательных приближений, одним из которых является метод Ньютона.

§ 2. Метод Ньютона решения системы нелинейных уравнений

Подставим значения составляющих q_i вектора дебита $\bar{q}_2$ из (8a) в уравнения (8b):

$$f_r(q_1, q_2, \dots, q_s) = R_r \cdot |q_r| q_r - \Psi_{0r} + \sum_{i=s+1}^m K_{ri} \left(R_i \left| \sum_{e=1}^s K_{ei} q_e \right| \sum_{e=1}^s K_{ei} q_e - \Psi_{0i} \right) = 0. \quad (r = 1, 2, \dots, s). \quad (9)$$

Система уравнений (9) представляет собой систему s нелинейных уравнений с s неизвестными (составляющими вектора дебита $\bar{q}_1$). Предположим, что найдено k -е приближение ее корня $\bar{q}_1^{(k)} = (q_1^{(k)}, \dots, q_s^{(k)})$. Тогда точный корень этой системы $\bar{q}_1 = (q_1, \dots, q_s)$ можно представить в виде

$$\bar{q}_1 = \bar{q}_1^{(k)} + \Delta \bar{q}_1^{(k)}, \quad (10)$$

где вектор $\Delta \bar{q}_1^{(k)} = (\Delta q_1^{(k)}, \dots, \Delta q_s^{(k)})$ поправка (погрешность корня).

Подставляя выражение (10) в систему уравнений (9), получим

$$f_r(q_1^{(k)} + \Delta q_1^{(k)}, q_2^{(k)} + \Delta q_2^{(k)}, \dots, q_s^{(k)} + \Delta q_s^{(k)}) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, s). \quad (11)$$

Разложим левую часть уравнений (11) по степеням малого вектора $\Delta \bar{q}_1^{(k)}$, ограничиваясь линейными членами

$$f_r(\bar{q}_1^{(k)}) + \frac{\partial f_r}{\partial q_1}(\bar{q}_1^{(k)}) \Delta q_1^{(k)} + \dots + \frac{\partial f_r}{\partial q_s}(\bar{q}_1^{(k)}) \Delta q_s^{(k)} = 0. \quad (r = 1, 2, \dots, s). \quad (12)$$

или

$$W(\bar{q}_1^{(k)}) \Delta \bar{q}_1^{(k)} = -\bar{f}(\bar{q}_1^{(k)}),$$

где

$$W(\bar{q}_1^{(k)}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1}(\bar{q}_1^{(k)}) & \frac{\partial f_1}{\partial q_2}(\bar{q}_1^{(k)}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_s}(\bar{q}_1^{(k)}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1}(\bar{q}_1^{(k)}) & \frac{\partial f_2}{\partial q_2}(\bar{q}_1^{(k)}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial q_s}(\bar{q}_1^{(k)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_s}{\partial q_1}(\bar{q}_1^{(k)}) & \frac{\partial f_s}{\partial q_2}(\bar{q}_1^{(k)}) & \dots & \frac{\partial f_s}{\partial q_s}(\bar{q}_1^{(k)}) \end{vmatrix}.$$

W — матрица Якоби системы функций f_r ($r = 1, 2, \dots, s$), которую можно представить в виде вектор-функции

$$\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_s).$$

Система (12) представляет собой линейную систему относительно вектора поправки $\Delta \bar{q}_1^{(k)}$. Матрица этой системы есть якобиан вектор-функции $\bar{f}$, а столбец свободных членов — вектор-функция $\bar{f}$, взятая с обратным знаком, при k -м приближении корня системы нелинейных уравнений (9).

Определим элементы матрицы Якоби, воспользовавшись выражением (9) для вектор-функции.

$$\left(\frac{\partial f_r}{\partial q_k} \right)_{k=r} = 2(R_r | q_r | + \sum_{i=s+1}^m (K_{ri})^2 R_i | q_i |) \quad (r = 1, 2, \dots, s; k = 1, 2, \dots, s) \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial f_r}{\partial q_k} \right)_{k \neq r} = 2 \sum_{i=s+1}^m K_{ri} K_{ki} R_i | q_i | \quad (r = 1, 2, \dots, s; k = 1, 2, \dots, s). \quad (14)$$

Из формул (13) и (14) следует, что матрица Якоби симметрическая с положительными диагональными элементами, причем, каждый диагональный элемент больше любого в строке и столбце. Предполагая, что $W(\bar{q}_1^{(k)})$ — неособенная матрица, из (12) получим

$$\Delta \bar{q}_1^{(k)} = -W^{-1}(\bar{q}_1^{(k)}) \bar{f}(\bar{q}_1^{(k)}) \quad (15)$$

или, учитывая выражение (10), имеем

$$\bar{q}_1^{(k+1)} = \bar{q}_1^{(k)} - W^{-1}(\bar{q}_1^{(k)}) \bar{f}(\bar{q}_1^{(k)}). \quad (16)$$

Изложенные математические выкладки позволяют составить универсальную программу для решения на ЭВМ задачи расчета установившегося воздухораспределения в шахтной вентиляционной сети любой топологии при использовании метода Ньютона. На рис. 2 приведена блок-схема такой программы. В нее входят следующие блоки:

- 1) блок преобразования числового массива осуществляет перевод исходного числового материала из одной системы счисления в другую;
- 2) блок настройки программы производит автоматическую настройку программы на сеть новой топологии и на иную точность расчета;
- 3) блок $\bar{q}_2^{(k)}$ реализует вычисление по формуле (8а);
- 4) блок $\bar{f}^{(k)}$ осуществляет вычисление по формуле (8б);
- 5) блок анализа конца решения производит сравнение $|f_r^{(k)}|$ ($r = 1, \dots, s$) с заданной точностью расчета ϵ и передает при $|f_r^{(k)}| \leq \epsilon$ ($r =$

$= 1, \dots, s$) блоку печати результата и конца решения, а при $|f_r^{(k)}| > \epsilon$ ($r = 1, \dots, s$), хотя бы при одном r — блоку $W^{(k)}$;

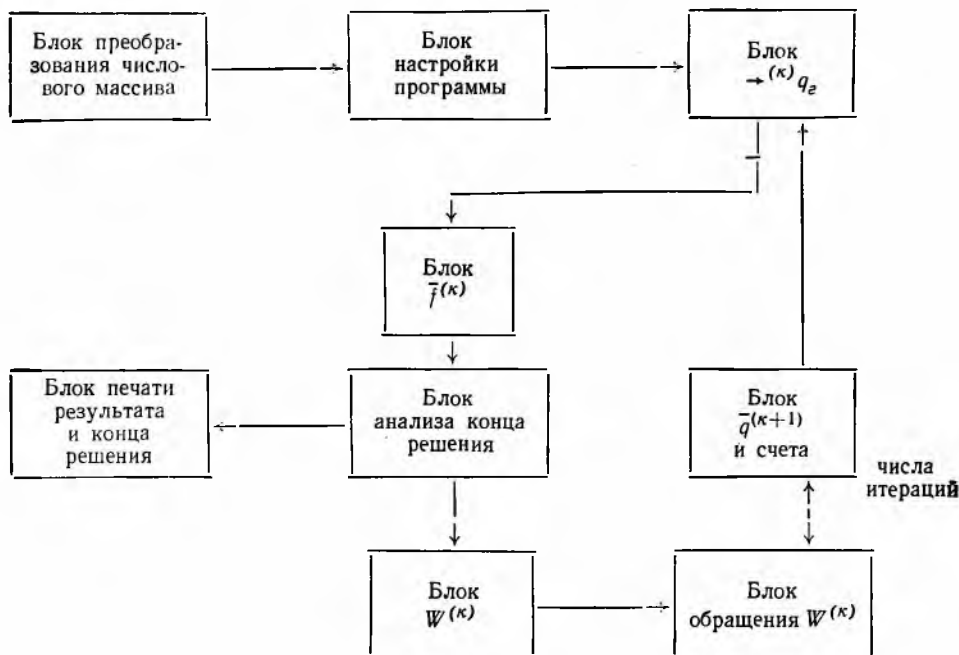


Рис. 2. Блок-схема программы расчета на ЭВМ установившегося процесса воздухораспределения в шахтной вентиляционной сети.

6) блок $W^{(k)}$ реализует вычисление матрицы Якоби по формулам (13) и (14);

7) блок обращения $W^{(k)}$ производит обращение матрицы Якоби;

8) блок $q_1^{(k+1)}$ и счета числа итераций осуществляет вычисление по формуле (16) и счет числа итераций, передает управление блоку $q_2^{(k)}$ на повторный цикл вычислений;

9) блок печати результата и конца решений осуществляет печать результата, производит остановку машины, фиксируя окончание решения задачи.

По данной блок-схеме была составлена программа для одной из трехадресных ЭВМ и произведен расчет ряда вентиляционных сетей различной топологии. Для расчета новой сети по этой программе в машину вводятся исходные данные о топологии и параметрах этой сети, а также величины, характеризующие цикломатическое число сети s и количество ее ветвей m . По этим величинам происходит автоматическая настройка программы на сеть новой топологии.

Машинное время, затрачиваемое на расчет каждой сети, находилось в пределах нескольких минут. Например, сеть, приведенная в [1], считалась менее двух минут.

Данный метод может также применяться при расчетах водопроводных, газовых и других сетей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. А. Абрамов, В. А. Бойко, Г. И. Булах. Применение быстродействующих ЭВМ для расчета проветривания шахт. «Изв. АН СССР, ОТН. Металлургия и горное дело», 1963, № 2.
 2. Greiner Rudolf, Die Berechnung von Wetternetzen mit elektronischen Digitalrechnern. Glückauf, 1959, 95, N 2.
 3. С. Цой, Е. И. Рогов. Решение задач сложных сетей методом линеаризации уравнений. «Вестник АН КазССР», 1962, № 9.
 4. С. Цой, Е. И. Рогов. К теории расчета вентиляционных сетей. «Известия АН СССР, ОТН. Металлургия и горное дело» 1963, № 3.
 5. К. Берж. Теория графов и ее применение. Изд.-во иностр. лит., М. 1962.
 6. С. Сешу, Н. Балабаниян. Анализ линейных цепей. Госэнергоиздат, 1963.
 7. Н. Г. Максимович. Линейные электрические цепи и их применение. Госэнергоиздат, 1961.
 8. А. А. Скочинский, В. Б. Комаров. Рудничная вентиляция. Углетехиздат, М., 1959.
-