МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМАХ

Тихонов В. А., Кудрявцева Н. В.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
(61166, Харьков, пр. Ленина,14, каф. РЭС тел. (057) 702-15-87),
E-mail: res@kture.kharkov.ua; (057) 702-15-87

In the presentation we introduce new classes of multiplicative models of linear prediction of Gaussian and non-Gaussian processes. We also describe the main principals of synthesis of the multiplicative models of the linear prediction. Furthermore, we give examples of multiplicative AR(p1)AR(p2) models construction.

Введение

Некоторые гауссовы и негауссовы процессы в природе и технике получаются в результате последовательного преобразования линейными системами порождающего процесса. Если для таких процессов выбрать в качестве порождающего процесса гауссов или негауссов белый шум и полагать, что фильтры линейны и имеют рациональную передаточную функцию, то они описываются моделями линейного предсказания. Такие процессы предложено называть мультипликативными процессами линейного предсказания. Схема формирующих фильтров таких процессов представлена на рис. 1.

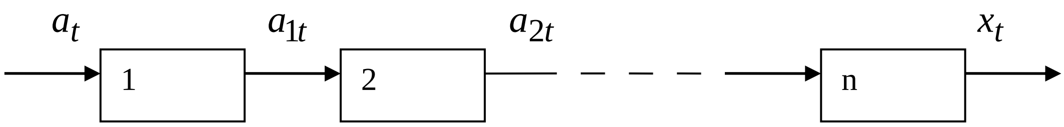

Рис. 1. Блок-схема формирователя мультипликативного процесса линейного предсказания. 1,2, …, n - линейные фильтры с рациональной системной функцией.

Мультипликативные модели линейного предсказания

Простейшим, хорошо известным, мультипликативным процессом можно считать процесс АРСС. Уравнение АРСС представляется в виде двух уравнений:

$$a_1[t] = \sum_{n=1}^{q} Q[n]a[t-n] + a[t], \tag{1}$$

$$x[t] = \sum_{i=1}^{p} \Phi[i]x[t-i] + a_1[t]\,. \tag{2}$$

Тогда выходной процесс может быть получен последовательным преобразованием порождающего БШ $a[t]$ широкополосным фильтром СС, выход которого преобразуется узкополосным АР фильтром (рис.2).

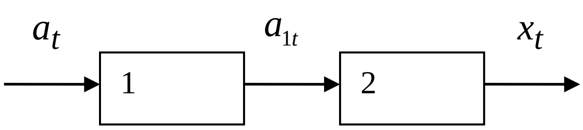

Рис. 2. Блок - схема формирователя мультипликативного процесса АРСС.

Системная функция результирующего фильтра АРСС равна произведению системных функций процесса СС (1-й фильтр)

$$H_{cc}(z) = 1 - \sum_{n=1}^{q} Q[n]z^{-n}\,, \tag{3}$$

и процесса АР (2-й фильтр)

$$H_{AP}(z) = (1 - \sum_{i=1}^{p} \Phi[i] z^{-i})^{-1} \ , \tag{4}$$

т.е.

$$H(z) = H_{cc}(z) H_{AP}(z) = \frac{1 - \sum_{n=1}^{q} Q[n] z^{-n}}{1 - \sum_{i=1}^{p} \Phi[i] z^{-i}} \, . \tag{5}$$

Использование концепции мультипликативного процесса позволяет ввести присоединенные модели АР(p_1)АР(p_2) и СС(q_1)СС(q_2). Такие модели полезны, когда выходной процесс получен в результате последовательного соединения двух узкополосных АР или широкополосных СС фильтров. Разностное уравнение АР(p_1)АР(p_2) имеет вид

$$x[t] = \sum_{i=1}^{p2} \Phi_2[i] x[t-i] + \sum_{i=1}^{p1} \Phi_1[i] a_1[t-i] + a[t] \, . \tag{6}$$

Аналогичным образом можно записать уравнение с произвольным количеством составляющих мультипликативного процесса. Уравнение (6) мультипликативно выражается через системные функции

$$H_2(z) H_1(z) a[t] = x[t] , \tag{7}$$

или

$$\Phi_2^{-1}(z) \Phi_1^{-1}(z) a[t] = x[t] \, . \tag{8}$$

Для произвольного числа моделей АР составляющих мультипликативного процесса линейного предсказания, выражение (8) представляется произведением n системных функций АР

$$\Phi_n^{-1}(z) \cdot \ldots \cdot \Phi_2^{-1}(z) \Phi_1^{-1}(z) a[t] = x[t] \, .$$

Условие оптимальности мультипликативной модели АР состоит в статистической независимости $a[t]$. В случае модели АР второго ранга ошибки $a[t]$ некоррелированные

$$a[t] a[t-j] = 0, \qquad \text{при } \ j \neq 0 \, .$$

Это условие эквивалентно минимуму дисперсии ошибки предсказания.

Условие оптимальности позволяет получить систему уравнений для расчета коэффициентов АР мультипликативной модели

$$\sum_{j=0}^{p2} \sum_{i=0}^{p1} \Phi_2[j] \Phi_1[i] R[k-i-j] = 0 \, . \tag{9}$$

Пусть в (2.20) $p_2 = p_1 = 1$. Тогда после преобразований получим систему уравнений для $k = 1,2$:

$$R[1] = (\Phi_1 + \Phi_2) R[0] - \Phi_1 \Phi_2 R[1], \tag{10}$$
$$R[2] = (\Phi_1 + \Phi_2) R[1] - \Phi_1 \Phi_2 R[0] ,$$

где Φ_1 и Φ_2 – коэффициенты первой и второй моделей АР соответственно. При $\Phi_2 = 0$ имеем

$$R[1] = \Phi_1 R[0], \qquad R[2] = \Phi_1 R[1],$$

или в общем виде $R[j] = \Phi_1 R[j-1]$. Это известное уравнение Юла - Уокера для первого порядка модели АР.

Пусть $p_1 = 1$, $p_2 = 2$. Тогда из (9) следует

$$R[k] = (\Phi_2[1] + \Phi_1)R[k-1] + (\Phi_2[2] - \Phi_2[1]\Phi_1)R[k-2] - \Phi_2[2]\Phi_1 R[k-3].$$

Это рекуррентное выражение позволяет сначала найти коэффициенты при $R[k-1]$, $R[k-2]$ и $R[k-3]$, а затем, решив систему нелинейных уравнений, вычислить Φ_1, $\Phi_2[1]$ и $\Phi_2[2]$. При $\Phi_1 = 0$ получаем известное уравнение Юла-Уокера для модели АР второго порядка. Аналогичным образом можно найти рекуррентные уравнения для расчета параметров мультипликативной модели для произвольного числа составляющих моделей и для любых порядков.

Выводы

Мультипликативные модели применяются для описания гауссовых и негауссовых процессов. Если на вход формирующего фильтра подать негауссов порождающий процесс, тогда на выходе получаем мультипликативный негауссов процесс. При этом следует учитывать, что узкополосные АР фильтры могут существенно нормализовать негауссов порождающий процесс. Однако, при получении ошибки предсказания с помощью обеляющего фильтра, происходит денормализация процесса. Следовательно, для статистически связанных ошибок предсказания можно синтезировать обобщенные модели линейного предсказания.

Предложенные модели существенно расширяют классы моделей линейного предсказания. Они позволяют синтезировать модели гауссовых и негауссовых статистически связанных случайных процессов.