

УДК 519.859



Ф-ФУНКЦИИ ДЛЯ НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ КРУГОВЫХ СЕГМЕНТОВ И БАЗОВЫХ 2D ОБЪЕКТОВ

Е.А. Ступак¹, Т.Е. Романова², М.В. Злотник³¹ ИПМаш НАНУ, г. Харьков, Украина, cats_sea@mail.ru² ИПМаш НАНУ, г. Харьков, Украина, sherom@kharkov.ua³ ИПМаш НАНУ, г. Харьков, Украина, zlotnik@ipmach.kharkov.ua

Приводятся конструктивные средства математического моделирования отношений включения, пересечения, касания, расположения на заданном расстоянии неориентированных круговых сегментов и базовых объектов, допускающих отображения трансляции и поворота. Используется метод Ф-функций для неориентированных геометрических объектов.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ОТНОШЕНИЯ, ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ, ТРАНСЛЯЦИЯ, ПОВОРОТ, КРУГОВЫЕ СЕГМЕНТЫ, МНОГОУГОЛЬНИКИ, КРУГИ, Ф-ФУНКЦИЯ

Введение

Задачи упаковки, раскроя и покрытия (Packing Cutting and Covering), в дальнейшем — задачи размещения, возникают в различных областях науки и техники, например, в легкой и тяжелой промышленности при построении карт раскроя материала, в задачах аппаратурно-технологической компоновки. Кроме того, интересные приложения встречаются в медицине (планирование радиохирургического лечения), в химическом машиностроении (при моделировании процессов транспортировки и смешивания сыпучих материалов), ядерной энергетике (для компьютерного моделирования упаковки топливных элементов, в системах проектирования захоронения радиоактивных отходов), робототехнике и т. д.

Достаточно полный обзор литературы, посвященной 2D задачам размещения, приведен в работе [1]. В большинстве своем публикации посвящены проблемам размещения кругов и ориентированных многоугольников. Предлагаемые подходы, как правило, используют различные эвристики и модификации метода оптимизации по группам переменных. В статье [2] рассматривается метод решения оптимизационной задачи размещения базовых неориентированных объектов, основанный на комбинации методов возможных направлений Зонтендейка и сужающихся окрестностей. В статье [3] авторы излагают эвристический подход к решению задачи размещения геометрических объектов с нелинейной границей. Оригинальный метод решения задачи размещения конгруэнтных прямоугольных объектов в составной области с нелинейной границей приводится в [11].

Следует также отметить, что, несмотря на высокий уровень организации архитектуры баз знаний существующих интеллектуальных систем решения задач размещения, их построение основывается на узкой классификации пространственных форм

геометрических объектов, ограничений и функций цели. Это объясняется отсутствием фундаментальной основы математического моделирования задач данного класса, в том числе конструктивных средств аналитического описания отношений геометрических объектов, обладающих конкретными пространственными формами, метрическими характеристиками и параметрами размещения.

Разработка эффективных методов решения оптимизационных задач размещения неориентированных составных объектов (объектов, граница которых образована объединением линейных и нелинейных сегментов, (рис. 1)) требует построения математических моделей, которые позволяют применить для решения этих задач методы локальной и глобальной оптимизации.

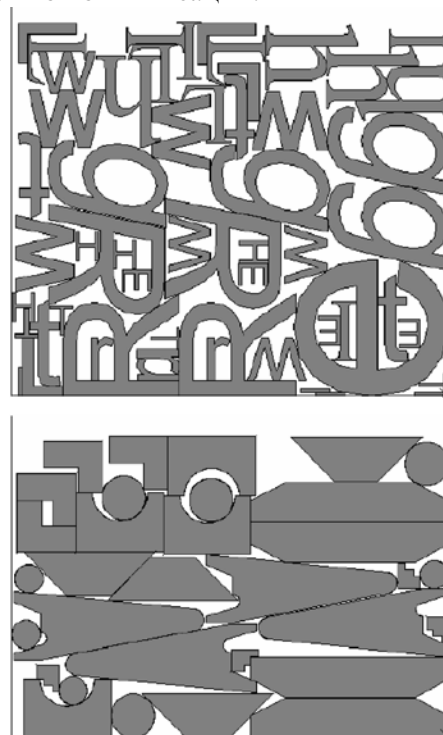


Рис. 1. Примеры размещения базовых и составных геометрических объектов

1. Метод Ф-функций

Основой построения математических моделей задач рассматриваемого класса является аналитическое описание отношений включения, пересечения, касания, расположения на заданном расстоянии пары геометрических объектов, обладающих произвольной пространственной формой.

Конструктивным средством математического моделирования задач размещения является метод Ф-функций [4].

В работах [5, 6] приведены Ф-функции для базовых и составных ориентированных геометрических объектов (допускающих аффинные преобразования только трансляции).

Полный класс Ф-функций для ориентированных базовых объектов и круговых сегментов приводится в [7]. Ф-функции базовых неориентированных объектов (допускающих аффинные преобразования трансляции и поворота) построены в [8, 9].

Поскольку некоторые составные объекты могут быть представлены в виде объединения и пересечения базовых объектов и круговых сегментов, целью данных исследований является построение Ф-функций для неориентированных круговых сегментов и базовых объектов.

Для удобства и краткости введем следующие обозначения: C — круги, K — выпуклые многоугольники, S — круговые сегменты, $C_i^* = cl(R^2 \setminus C_i)$, $K_i^* = cl(R^2 \setminus K_i)$, $S_i^* = cl(R^2 \setminus S_i)$, $T^* = cl(R^2 \setminus T)$, где $cl(T)$ — топологическое замыкание [10] объекта $T \in \{C, K, S\}$. Полагаем, что объекты задаются следующим образом: $C = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 - r^2 \leq 0\}$, где r — радиус круга C ; $K = conv\{v_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i), i = 1, \dots, n\}$, $conv\{\cdot\}$ — выпуклая оболочка множества $\{\cdot\}$, v_i , $i = 1, \dots, n$ — вершины многоугольника, заданные в собственной системе координат многоугольника против часовой стрелки; круговые сегменты $S = T = T_{12} \cap T_{22} = \bar{C} \cap \bar{H}$, где $T_{12} = \bar{C}$, $T_{22} = \bar{H}$,

$$\bar{C} = \{(x, y) \in R^2 : g_0(x, y) \leq 0\},$$

$$g_0(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - \bar{r}^2,$$

$$\bar{H} = \{(x, y) \in R^2 \mid g_1(x, y) \leq 0\},$$

$g_1(x, y) = Ax - By + C$, $A^2 + B^2 = 1$, если $s_0 = (x_0, y_0) \in S$ и $\bar{H} = \{(x, y) \in R^2 \mid g_1(x, y) \geq 0\}$, если $s_0 \notin S$, при этом $fr S = arc(s^1, s^2) \cup [s^2, s^1]$, где $s^1 = (\hat{x}^1, \hat{y}^1)$ и $s^2 = (\hat{x}^2, \hat{y}^2)$, $arc(s^1, s^2)$ — дуга окружности $\bar{C}$, $[s^2, s^1]$ — отрезок прямой $fr \bar{H}$.

Полагаем, что полюс объектов совпадает с началом их собственной системы координат и является центром окружности C или $\bar{C}$ для C , C^* или S , S^* ; внутренней точкой многоугольника K для K и K^* .

Положение объекта в пространстве R^2 задают параметры размещения $u = (v, \theta) = (x, y, \theta)$, где (x, y) — вектор трансляции объекта T , а θ — угол поворота объекта относительно центра собственной системы координат. В дальнейшем $T(u) = T(v, \theta)$ — объект, транслированный на вектор v и повернутый на угол θ .

Если объект $T \in \{S, S^*, K, K^*\}$ может вращаться, то координаты точек s^1 , s^2 объекта $T \in \{S, S^*\}$ зависят от углового параметра, то есть $s'^i = s^i(\theta) = (\hat{x}'^i, \hat{y}'^i)$ и задаются следующим образом:

$$\hat{x}'^i = \hat{x}^i \cdot \cos(\theta) + \hat{y}^i \cdot \sin(\theta),$$

$$\hat{y}'^i = -\hat{x}^i \cdot \sin(\theta) + \hat{y}^i \cdot \cos(\theta), i = 1, 2;$$

координаты вершин объекта $T \in \{K, K^*\}$ зависят от углового параметра, то есть $v'_i = v_i(\theta) = (\bar{x}'_i, \bar{y}'_i)$ и задаются так:

$$\bar{x}'^i = \bar{x}^i \cdot \cos(\theta) + \bar{y}^i \cdot \sin(\theta),$$

$$\bar{y}'^i = -\bar{x}^i \cdot \sin(\theta) + \bar{y}^i \cdot \cos(\theta), i = 1, \dots, n.$$

По определению [8] Ф-функция — это непрерывная, всюду определенная функция $\Phi: R^6 \rightarrow R^1$ объектов $T_1(u_1)$ и $T_2(u_2)$, такая, что $\Phi(u_1, u_2) > 0$, если объекты $T_1(u_1)$ и $T_2(u_2)$ не пересекаются; $\Phi(u_1, u_2) = 0$, если объекты касаются, то есть имеют общие только граничные точки; $\Phi(u_1, u_2) < 0$, если объекты $T_1(u_1)$ и $T_2(u_2)$ имеют общие внутренние точки.

В данном исследовании строятся Ф-функции для неориентированных круговых сегментов и базовых объектов.

Для построения Ф-функций обозначенных выше объектов в работе используется подход, изложенный в работах [4, 9].

Пусть уравнение $\chi(u) = 0$ определяет поверхность

$$\gamma_{12} = fr T_{12} \subset R^3,$$

где $T_{12} = \bigcup_{\theta_2} T_{12}(\theta_2)$,

здесь $T_{12}(\theta_2) = T_1(0, 0, 0) \oplus (-1) \cdot T_2(0, 0, \theta_2)$ — сумма Минковского двух объектов $T_1(0)$ и $T_2(\theta_2)$. Поверхность γ_{12} делит пространство R^3 на два множества Γ_1 и Γ_2 таким образом, что $\Gamma_1 \cup \gamma_{12} \cup \Gamma_2 = R^3$, $\Gamma_1 = \text{int } \Gamma_1$, $\Gamma_2 = \text{int } \Gamma_2$, $fr \Gamma_1 = fr \Gamma_2 = \gamma_{12}$.

Уравнение $\chi(u) = 0$ называется ориентированным, если функция $\chi(u)$ всюду определена в пространстве R^3 и на множествах Γ_1 и Γ_2 знаки значений функции $\chi(u)$ противоположны, то есть $\chi(w) \cdot \chi(v) < 0$ для любых $w \in \Gamma_1$ и $v \in \Gamma_2$.

Стратегия построения Ф-функций двух неориентированных объектов состоит в следующем:

1. Фиксируем объект T_1 и полагаем $u_1(0, 0, 0) = 0$.
2. Строим уравнение $\chi(u) = 0$ поверхности нулевого уровня Ф-функции для объектов $T_1(0, 0, 0)$

и $T_2(x_2, y_2, \theta_2)$, основываясь на уравнении поверхности 0-уровня Φ -функции для ориентированных объектов $T_1(0, 0, 0)$ и $T_2(x_2, y_2, 0)$.

3. Задаем ориентацию уравнения $\chi(u) = 0$ таким образом, чтобы $\chi(u^*) < 0$, если $u^* \in \text{int } T_{12}$, и $\chi(u^*) > 0$ в случае, если $u^* \in R^3 \setminus T_{12}$, $u^* = (x^*, y^*, \theta^*)$.

4. Полагаем $\Phi(0, 0, 0, x_2, y_2, \theta_2) = \chi(x_2, y_2, \theta_2)$.

5. Определяем Φ -функцию

$$\Phi(u_1, u_2) = \chi(x'_2 - x'_1, y'_2 - y'_1, \theta_2 - \theta_1),$$

где $x'_i = x_i \cos \theta_1 - y_i \sin \theta_1$; $y'_i = x_i \sin \theta_1 + y_i \cos \theta_1$; $i = 1, 2$.

В случае, если $T_1 \subset \{C, C^*\}$, тогда

$$\Phi(u_1, u_2) = \chi(x_2 - x_1, y_2 - y_1, \theta_2),$$

поскольку $\theta_1 \equiv 0$, $x'_i = x_i$, $y'_i = y_i$, $i = 1, 2$.

А если $T_2 \subset \{C, C^*\}$, тогда

$$\Phi(u_1, u_2) = \chi(x'_2 - x'_1, y'_2 - y'_1, -\theta_1)$$

поскольку $\theta_2 \equiv 0$.

2. Φ -функции неориентированных круговых сегментов и базовых объектов

Следуя стратегии, изложенной выше, построим Φ -функции для пар объектов из множества $\{C, K, S, C^*, K^*, S^*\}$. Поскольку Φ -функции для базовых ориентированных и неориентированных объектов: $C(u_1)$ и $C(u_2)$, $C^*(u_1)$ и $C(u_2)$, $K(u_1)$ и $K(u_2)$, $C(u_1)$ и $K(u_2)$, $C^*(u_1)$ и $K(u_2)$, $K^*(u_1)$ и $C(u_2)$, $K^*(u_1)$ и $C(u_2)$ приведены в статьях [5, 8, 9], то в данном исследовании строятся Φ -функции для следующих пар неориентированных объектов: $C(u_1)$ и $S(u_2)$, $S^*(u_1)$ и $C(u_2)$, $C^*(u_1)$ и $S(u_2)$, $S(u_1)$ и $K(u_2)$, $S^*(u_1)$ и $K(u_2)$.

Рассмотрим каждую из перечисленных выше пар объектов непосредственно.

2.1. Круг $C(u_1)$ и неориентированный сегмент $S(u_2)$. Строим уравнение $\chi(u) = 0$ поверхности

$$frT_{12}(\theta_2) = fr\{C_1(0, 0, 0) \oplus (-1) \cdot S_2(0, 0, \theta_2)\},$$

то есть уравнение проекции поверхности нулевого уровня Φ -функции для объектов $C(u_1)$ и $S(u_2)$.

С этой целью введем функцию следующего вида:

$$\chi(u) = \max\{\min\{\omega^0(u), \varphi^0(u)\}, \min\{\omega^1(u), \psi^1(u)\}, \min\{\omega^2(u), \psi^2(u)\}, \varphi(u)\},$$

где

$$\omega^0(u) = x^2 + y^2 - r^2, \quad r = r_1 + r_2,$$

$$\omega^k(u) = (x + \hat{x}^k \cos(\theta) + \hat{y}^k \sin(\theta))^2 + (y - \hat{x}^k \sin(\theta) + \hat{y}^k \cos(\theta))^2 - r_1^2, k = 1, 2.$$

$$\varphi(u) = A(\theta) \cdot x - B(\theta) \cdot y + C(\theta),$$

$$A(\theta) = \tilde{y}^1 - \tilde{y}^2, \quad B(\theta) = \tilde{x}^1 - \tilde{x}^2$$

$$C(\theta) = -A^1(\theta) \cdot \tilde{x}^1 + B^1(\theta) \cdot \tilde{y}^2,$$

здесь

$$(\tilde{x}^k, \tilde{y}^k) = -(\hat{x}^k, \hat{y}^k) + \frac{r_i}{\sqrt{\tilde{A}^2(\theta) + \tilde{B}^2(\theta)}} \begin{pmatrix} \tilde{A}(\theta) \\ -\tilde{B}(\theta) \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2,$$

$$\tilde{A}(\theta) = \sin(\theta)(-\hat{x}^2 + \hat{x}^1) - \cos(\theta)(-\hat{y}^2 + \hat{y}^1),$$

$$\tilde{B}(\theta) = \cos(\theta)(\hat{x}^2 - \hat{x}^1) + \sin(\theta)(\hat{y}^2 - \hat{y}^1);$$

$$\varphi^0(u) = A^0(\theta) \cdot x - B^0(\theta) \cdot y + C^0(\theta), \quad A^0(\theta) = \tilde{y}^1 - \tilde{y}^2,$$

$$B^0(\theta) = \tilde{x}^1 - \tilde{x}^2, \quad C^0(\theta) = -A^0(\theta) \cdot \tilde{x}^2 + B^0(\theta) \cdot \tilde{y}^2,$$

$$\text{где } (\tilde{x}^k, \tilde{y}^k) = -(\hat{x}^k, \hat{y}^k) +$$

$$+ \frac{r_i}{\sqrt{(A^k(\theta))^2 + (B^k(\theta))^2}} \begin{pmatrix} B^k(\theta) \\ A^k(\theta) \end{pmatrix}$$

$$A^k(\theta) = \hat{x}^k \sin(\theta) - \hat{y}^k \cos(\theta),$$

$$B^k(\theta) = -\hat{x}^k \cos(\theta) - \hat{y}^k \sin(\theta), \quad k = 1, 2;$$

$$\psi^k(u) = \frac{r_1}{\tilde{x}^k \tilde{y}^k - \tilde{y}^k \tilde{x}^k} (A^r(\theta) \cdot x - B^r(\theta) \cdot y + C^r(\theta)),$$

$$k = 1, 2, \quad r = 3, 4, \text{ соответственно.}$$

$$A^r(\theta) = \tilde{y}^k - \tilde{y}^k, \quad B^r_j(\theta) = \tilde{x}^k - \tilde{x}^k,$$

$$C^r(\theta) = -A^r(\theta) \cdot \tilde{x}^k + B^r(\theta) \cdot \tilde{y}^k.$$

Тогда Φ -функция круга $C(u_1)$ и неориентированного сегмента $S(u_2)$ примет вид

$$\Phi(u_1, u_2) = \chi(x_2 - x_1, y_2 - y_1, \theta_2).$$

2.2. Неориентированный многоугольник $K(u_1)$ и неориентированный сегмент $S(u_2)$. Задаем уравнение $\chi(u) = 0$ поверхности

$$frT_{12}(\theta_2) = fr\{K_1(0, 0, 0) \oplus (-1) \cdot S_2(0, 0, \theta_2)\}.$$

В этом случае функция $\chi(u)$ определяется так:

$$\chi(u) = \max\{\max_{k=1, \dots, k_1+1} \min\{\omega^k(u), \psi^k(u)\}, \chi_{r1}^1(u),$$

$$\chi_{r1}^2(u), \chi_{r2}^1(u), \chi_{r2}^2(u), \max_{k=1, \dots, k_1+k_2+1} \chi^k(u)\},$$

$$\text{где } \omega^k(u) = (x - \bar{x}^k)^2 + (y - \bar{y}^k)^2 - r_2^2,$$

$$i^m = \arg \min_{j=1, \dots, L} (d^m)^T \cdot (\bar{x}^j, \bar{y}^j),$$

$$t^m(u) = (d^m)^T ((\bar{x}^{i^m}, \bar{y}^{i^m}) - u),$$

$$d^m(\hat{x}_d^m, \hat{y}_d^m) := \frac{(\bar{x}^m, \bar{y}^m)}{\|(\bar{x}^m, \bar{y}^m)\|},$$

$$\bar{x}^m = \hat{x}^m \cdot \cos(\theta) + \hat{y}^m \cdot \sin(\theta),$$

$$\bar{y}^m = -\hat{x}^m \cdot \sin(\theta) + \hat{y}^m \cdot \cos(\theta), \quad m = 1, 2.$$

$$\psi^k(u) = \frac{r_2}{\bar{x}^{k-1} \bar{y}^k - \bar{x}^k \bar{y}^{k-1}} (\tilde{A}^k x - \tilde{B}^k y + \tilde{C}^k),$$

здесь $\tilde{A}^k = \tilde{y}^k - \tilde{y}^{k-1}$, $\tilde{B}^k = \tilde{x}^k - \tilde{x}^{k-1}$,
 $\tilde{C}^k = -\tilde{A}^k \tilde{x}^{k-1} + \tilde{B}^k \tilde{y}^{k-1}$, $k \in I = \{i^1, \dots, i^2\}$,

при этом, полагаем $k = l + 1$, когда $k = 1$.

Координаты точек $\tilde{v}^r = (\tilde{x}^r, \tilde{y}^r)$ определяются следующим образом:

$$\tilde{v}^r = (\tilde{x}^r, \tilde{y}^r) = \frac{r_2}{\sqrt{(A_{i_1}^r)^2 + (B_{i_1}^r)^2}} \begin{pmatrix} A_{i_1}^r \\ -B_{i_1}^r \end{pmatrix}, \quad r = i_1, i_2,$$

$$\tilde{v}^r = (\tilde{x}^r, \tilde{y}^r) = \frac{r_2}{\sqrt{(A^r)^2 + (B^r)^2}} \begin{pmatrix} A^r \\ -B^r \end{pmatrix}, \quad r = i_1 + 1, i_2 - 1.$$

Функции $\chi_{i_1}^m(u)$ задаются

где $\chi_{i_1}^m(u) = A_i^m(\theta) \cdot x - B_i^m(\theta) \cdot y + C_i^m(\theta)$,
 $A_i^m(\theta) = -\hat{x}_d^m$, $B_i^m(\theta) = \hat{y}_d^m$,
 $C_i^m(\theta) = \hat{x}_d^m \cdot (\bar{x}^m) + \hat{y}_d^m \cdot (\bar{y}^m) - r_2$, $m = i_1, i_2$.
 $\chi_{i_2}^k(u) = A_i^k(\theta) \cdot x - B_i^k(\theta) \cdot y + \bar{C}_i^k(\theta)$,
 $\bar{C}^k(\theta) = \min\{\chi_{i_1}^k((\hat{x}^1 \cdot \cos(\theta) + \hat{y}^1 \cdot \sin(\theta)),$
 $(-\hat{x}^1 \cdot \sin(\theta) + \hat{y}^1 \cdot \cos(\theta))),$
 $\chi_{i_1}^k((\hat{x}^2 \cdot \cos(\theta) + \hat{y}^2 \cdot \sin(\theta),$
 $(-\hat{x}^2 \cdot \sin(\theta) + \hat{y}^2 \cdot \cos(\theta)))\}$, $k = 1, 2$
 $\chi^k(u) = A^k x - B^k y + C^k$, $A^k = \bar{y}^{k+1} - \bar{y}^k$,
 $B^k = \bar{x}^{k+1} - \bar{x}^k$, $\bar{C}^k = (-A^r \cdot \bar{x}^k + B^r \cdot \bar{y}^k) - r_2$,
 $k = I_1 = \{i^1, \dots, i^2 - 1\}$, $k_1 = \text{card } I_1$,

при этом, если $k = l + 1$, тогда $k = 1$.

$$\tilde{v}^r = (\tilde{x}^r, \tilde{y}^r) = \frac{r_2}{\sqrt{(A_{i_1}^r)^2 + (B_{i_1}^r)^2}} \begin{pmatrix} A_{i_1}^r \\ -B_{i_1}^r \end{pmatrix}, \quad r = i_1, i_2,$$

$$\tilde{v}^r = (\tilde{x}^r, \tilde{y}^r) = \frac{r_2}{\sqrt{(A^r)^2 + (B^r)^2}} \begin{pmatrix} A^r \\ -B^r \end{pmatrix}, \quad r = i_1 + 1, i_2 - 1,$$

$$\chi^k(u) = A^k x - B^k y + C^k,$$

$$A^k = \bar{x}^{k+1} - \bar{x}^k, \quad B^k = \bar{y}^{k+1} - \bar{y}^k,$$

$$\bar{C}^k = -A^k \cdot \bar{x}^k + B^k \cdot \bar{y}^k, \quad \bar{\chi}^k(u) = A^k x - B^k y + \bar{C}^k(\theta),$$

$$C^k(\theta) = \min\{\bar{\chi}^k((\hat{x}^1 \cdot \cos(\theta) + \hat{y}^1 \cdot \sin(\theta), (-\hat{x}^1 \cdot \sin(\theta) + \hat{y}^1 \cdot \cos(\theta))),$$

$$\bar{\chi}^k((\hat{x}^2 \cdot \cos(\theta) + \hat{y}^2 \cdot \sin(\theta), (-\hat{x}^2 \cdot \sin(\theta) + \hat{y}^2 \cdot \cos(\theta)))\},$$

$$k = I_2 = \{i^2, \dots, i^1 - 1\}, \quad k_2 = \text{card } I_2,$$

если $k = l + 1$, тогда $k = 1$.

$$\chi^k(u) = -A^k(\theta) \cdot x + B^k(\theta) \cdot y + C^k(\theta),$$

$$A^k(\theta) = -\sin(\theta) \cdot (\hat{x}^1 - \hat{x}^2) + \cos(\theta) \cdot (\hat{y}^1 - \hat{y}^2),$$

$$B^k(\theta) = \cos(\theta) \cdot (\hat{x}^1 - \hat{x}^2) + \sin(\theta) \cdot (\hat{y}^1 - \hat{y}^2),$$

$$\bar{C}^k(\theta) = -A^k \cdot (\hat{x}^2 \cdot \cos(\theta) + \hat{y}^2 \cdot \sin(\theta)) + B^k \cdot (-\hat{x}^2 \cdot \sin(\theta) + \hat{y}^2 \cdot \cos(\theta)),$$

$$\bar{\chi}^k(u) = A^k(\theta) \cdot x - B^k(\theta) \cdot y + \bar{C}^k(\theta),$$

$$C^k(\theta) = \min_{i=1, \dots, l} \bar{\chi}^k(\bar{x}^i, \bar{y}^i), \quad k = k_1 + k_2 + 1.$$

Тогда Ф-функция неориентированного многоугольника $K(u_1)$ и неориентированного сегмента $S(u_2)$ определяется так:

$$\Phi(u_1, u_2) = \chi(x'_2 - x'_1, y'_2 - y'_1, \theta_2 - \theta_1).$$

2.3. Объект $C^*(u_1)$ и неориентированный сегмент $S(u_2)$. Строим уравнение $\chi(u) = 0$ поверхности

$$frT_{12}(\theta_2) = fr\{C_1^*(0, 0, 0) \oplus (-1) \cdot S_2(0, 0, \theta_2)\},$$

где $\chi(u) = \max\{\min\{\omega^1(u), \omega^2(u), \psi(u)\}, \omega^0(u)\}$,

здесь $\omega^0(u) = -x^2 - y^2 + r^2$, $r = r_1 - r_2$,

$$\omega^k(u) = -(x + \hat{x}^k \cos(\theta) + \hat{y}^k \sin(\theta))^2 - (y - \hat{x}^k \sin(\theta) + \hat{y}^k \cos(\theta))^2 + r_1^2, \quad k = 1, 2,$$

$$\psi(u) = A(\theta) \cdot x - B(\theta) \cdot y + C(\theta),$$

$$A(\theta) = \hat{y}_1^* - \hat{y}_2^*, \quad B(\theta) = \hat{x}_1^* - \hat{x}_2^*,$$

$$C(\theta) = -A \hat{x}_2^* + B \hat{y}_2^*,$$

$$s_k^*(\hat{x}_k^*, \hat{y}_k^*) = \frac{r}{\sqrt{A_k^2(\theta) + B_k^2(\theta)}} \begin{pmatrix} B_k(\theta) \\ A_k(\theta) \end{pmatrix},$$

$$A_k(\theta) = -\hat{x}_k \cdot \sin(\theta) + \hat{y}_k \cdot \cos(\theta),$$

$$B_k(\theta) = \hat{x}_k \cdot \cos(\theta) + \hat{y}_k \cdot \sin(\theta), \quad k = 1, 2.$$

Таким образом, Ф-функция объекта $C^*(u_1)$ и неориентированного сегмента $S(u_2)$ может быть задана в следующем виде:

$$\Phi(u_1, u_2) = \chi(x_2 - x_1, y_2 - y_1, \theta_2).$$

2.4. Неориентированный объект $S^*(u_1)$ и круг $C(u_2)$. Строим уравнение $\chi(u) = 0$ поверхности

$$frT_{12}(\theta_1) = fr\{S_1^*(0, 0, \theta_1) \oplus (-1) \cdot C_2(0, 0, 0)\},$$

определяя

$$\chi(u) = \min\{\omega(u), \psi(u)\},$$

где

$$\omega(u) = -x^2 - y^2 + r^2, \quad r = r_1 - r_2,$$

$$\psi(u) = A \cdot x - B y + C',$$

$$C' = C - r_2, \quad A = \hat{y}^1 - \hat{y}^2,$$

$$B = \hat{x}^1 - \hat{x}^2, \quad C = -A \hat{x}^1 + B \hat{y}^1.$$

Тогда Φ -функция неориентированного объекта $S^*(u_1)$ и круга $C(u_2)$ примет вид:

$$\Phi(u_1, u_2) = \chi(x'_2 - x'_1, y'_2 - y'_1, -\theta_1).$$

2.5. Неориентированный объект $S^*(u_1)$ и неориентированный многоугольник $K(u_2)$. Задаем уравнение $\chi(u) = 0$ поверхности

$$frT_{12}(\theta_1) = fr\{S_1^*(0, 0, \theta_1) \oplus (-1) \cdot K_2(0, 0, 0)\},$$

где $\chi(u) = \min\{\bar{\chi}(u), \min_{i=1, \dots, n} \bar{\omega}_i(u)\},$

здесь $\bar{\omega}_i(u) = r^2 - (x + \bar{x}^i \cdot \cos(\theta) + \bar{y}^i \cdot \sin(\theta))^2 - (y - \bar{x}^i \cdot \sin(\theta) + \bar{y}^i \cdot \cos(\theta))^2,$

$$\bar{\chi}(u) = Ax - By + C, A = \hat{y}^1 - \hat{y}^2, B(\theta_1) = \hat{x}^1 - \hat{x}^2,$$

$$C = -A\hat{x}^1 + B\hat{y}^1, k = \arg \min_{i=1, \dots, l} \chi(\tilde{x}^i, \tilde{y}^i),$$

где $(\tilde{x}^i, \tilde{y}^i) = (\bar{x}^i \cdot \cos(\theta) + \bar{y}^i \cdot \sin(\theta), -\bar{x}^i \cdot \sin(\theta) + \bar{y}^i \cdot \cos(\theta)).$

Φ -функция неориентированного объекта $S^*(u_1)$ и неориентированного многоугольника $K(u_2)$ может быть определена следующим образом:

$$\Phi(u_1, u_2) = \chi(x'_2 - x'_1, y'_2 - y'_1, \theta_2 - \theta_1).$$

Выводы

Рассмотренные в данной статье Φ -функции являются конструктивным средством математического моделирования задач размещения базовых объектов и круговых сегментов, а также составных геометрических объектов, имеющих более сложную структуру, то есть несвязных объектов с многосвязными компонентами связности, граница которых образована объединениями дуг и отрезков прямых.

Построенные Φ -функции можно использовать для решения оптимизационных задач геометрического проектирования (задачи раскроя, упаковки и покрытия), в которых объекты могут не только транслироваться, но и вращаться.

Список литературы: 1. Dyckhoff H., Scheithauer G., Terno J. Cutting and packing// in: M. Dell'Amico, F. Maffioli and S. Martello Eds. Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization, John Wiley & Sons, Chichester. — 1997. — P. 393-412. 2. Стоян Ю.Г., Злотник М.В. Размещение кругов и невыпуклых многоугольников с поворотами в прямоугольнике минимальной длины // Докл. НАН Украины. — 2007. — № 2. — С. 37-42. 3. Burke E., Heller R., Kendall G., Whitwell G. A new bottom-left-fill heuristic algorithm for the two-dimensional irregular packing problem//Operational research, 2004, Volume 53, N3. 4. Stoyan Yu. G. Φ -function and its basic properties// Докл. АН Украины. Сер. А. — 2001. — № 8. — С. 112-117. 5. Stoyan Y., Terno J., Scheithauer G., Gil N., Romanova T. Φ -function for 2D primary objects// Studia Informatica, Paris, University. — 2002. — Vol. 2, № 1. — P. 1-32. 6. Stoyan Y., Scheithauer G., Gil M., Romanova T. Φ -function for complex 2D objects// 4OR Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies. Volume 2, Number 1, 2004 — P. 69-84. 7. Романова Т.Е., Ступак Е.А. Φ -функции для некоторых видов составных объектов нелинейного вида// Институт проблем искусственного интеллекта НАН Украины «Искусственный интеллект» 4'2006, 2006. — С. 232-242. 8. Стоян Ю.Г., Φ -function of non-convex polygons with rotations//Проблемы машиностроения, В. 6, № 1, 2003, С. 74-86. 9. Злотник М.В. Полный класс Φ -функций для кругов и многоугольников с поворотами // Радиоэлектроника и информатика. — 2006. — №3. — С. 29-33. 10. Kuratowski K. Topology// Vol. I: New York and London, — Academic press, 1966. — P. 594. 11. E.G. Birgin, J.M. Martinez, F.H. Nishihara, D.P. Ronconi Orthogonal packing of rectangular items within arbitrary convex regions by nonlinear optimization, Computers&Operations Research 33, 2006, P. 3535-3548.

Поступила в редколлегию 28.09.2007