

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПЛОСКОЙ РЕШЕТКОЙ РЕЗОНАНСНЫХ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СФЕР

Введение

Исследование рассеяния электромагнитных волн на плоских решетках, у которых структурное электромагнитное взаимодействие между рассеивающими элементами решеток и сами рассеивающие элементы обладают резонансными свойствами, имеет практический интерес для различных областей радиоэлектроники.

Целью работы является решение задачи о рассеянии электромагнитных волн плоской решеткой одинаковых малых однородных изотропных резонансных магнитодиэлектрических сфер [1, 2, 3]. В данной задаче длина рассеиваемой волны может быть сравнима с постоянными решетки, что позволяет изучить влияние решеточных структурных резонансов электромагнитного взаимодействия между сферами на внутренние резонансы сфер решетки и их тонкую структуру. Это решение описывает области аномальной дисперсии решетки. Будем использовать результаты решения задачи, рассмотренной в работе [3].

Постановка и решение задачи

Рассмотрим плоскую решетку узлов, порождаемую в декартовой системе координат координатным представлением вида [3] $(x_{p,s} = x_s, y_{p,t} = y_t)$

$$\begin{aligned} x_s &= \left[s - 0,5 \left\{ (-1)^s - 1 \right\} \right] d - (-1)^{s-1} x_{s=0} \quad (s=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ y_t &= \left[t - 0,5 \left\{ (-1)^t - 1 \right\} \right] h - (-1)^{t-1} y_{t=0} \quad (t=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ z_p &= z_{p=0} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где величины d, h определяются условиями $x = 0, x = d; y = 0, y = h$, а $x_{s=0}, y_{t=0}, z_{p=0}$ — координаты узла, порождающего решетку и находящегося внутри области, рис.1,

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_{s=0} \leq d, \\ 0 &\leq y_{t=0} \leq h, \\ z_{p=0} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Координаты x_s, y_t, z_p — определяют положения узлов вне области (2), координаты x_s, y_t являются функциями координат $x_{s=0}, y_{t=0}$. В координатное представление можно ввести зависимость от времени, если координаты $x_{s=0}, y_{t=0}$ считать некоторыми функциями времени. Каждому узлу решетки сопоставляются числа $c = (s, t)$, выделенный узел решетки будем обозначать $c' = (s', t')$, а узел внутри области (2) — $c = (s = 0, t = 0)$. Задавая максимальные значения для чисел (s, t) в (1), можно рассматривать конечные и бесконечные решетки.

Если изменять координаты узла, находящегося в пределах области (2), то в соответствии с координатным представлением (1) положение узлов решетки вне области (2) будет также соответствующим образом смещаться, что позволяет перестраивать пространственную конфигурацию решетки.

В узлы решетки (1) помещаются центры малых однородных резонансных магнитодиэлектрических сфер с проницаемостями ε, μ и радиусом a . Проницаемости заполнения

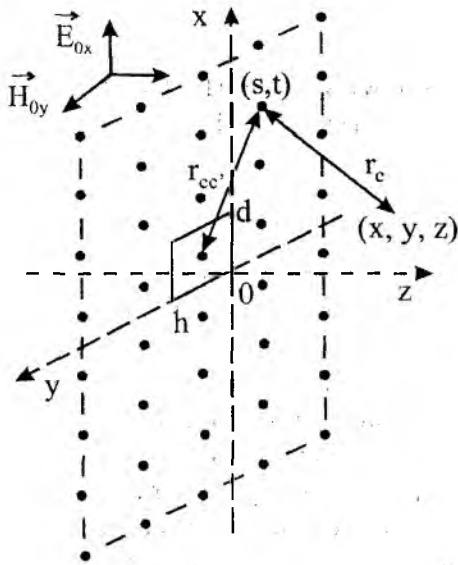


Рис. 1

пространства вне сфер – ε_0, μ_0 . Поля будем записывать в виде $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}$, $\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r})e^{i\omega t}$. Расстояние между центрами сфер s и s' представим (1)

$$r_{cc'} = \sqrt{(x_{s'} - x_s)^2 + (y_{t'} - y_t)^2}. \quad (3)$$

Считаем, что вне сфер $a/\lambda' \ll 1$, но внутри сфер возможен резонансный случай $a/\lambda_g \sim 1$, где λ' – длина волны вне сферы, а λ_g – длина волны в сфере.

На плоскую решетку падает плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в направлении оси z , рис.1. Ограничимся рассмотрением случая поляризации волны, когда вектор \vec{E}_{0x} параллелен оси Ox , рис.1.

Рассеянное поле по известному внутреннему полю рассеивателей определим через электрический $\bar{\Pi}^{\text{э}}$ и магнитный $\bar{\Pi}^{\text{м}}$ потенциалы Герца плоской решетки

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{расс}} &= (\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0)\bar{\Pi}^{\text{э}} - ik\mu_0[\nabla, \bar{\Pi}^{\text{м}}], \\ \vec{H}_{\text{расс}} &= (\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0)\bar{\Pi}^{\text{м}} + ik\varepsilon_0[\nabla, \bar{\Pi}^{\text{э}}]. \end{aligned} \quad (4)$$

Будем считать, что поле падающей волны

$$\begin{aligned} \vec{E}_{0x}(z, t) &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_1 z)}, \\ \vec{H}_{0y}(z, t) &= \vec{H}_0 e^{i(\omega t - k_1 z)} \end{aligned}$$

внутри сфер плоской решетки и внутреннее поле сфер решетки $\vec{E}^0(\vec{r}', t), \vec{H}^0(\vec{r}', t)$ имеют соответственно одинаковые значения для всех сфер решетки.

Тогда потенциалы Герца рассеянного решеткой поля представим [3]

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}^{\text{э}}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \left(\frac{\varepsilon_{\text{эф}}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \vec{E}^0(\vec{r}', t) \sum_{-s}^s \sum_{-t}^t \frac{e^{-ik_1 r_{(s,t)}}}{r_{(s,t)}}, \\ \bar{\Pi}^{\text{м}}(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \left(\frac{\mu_{\text{эф}}}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H}^0(\vec{r}', t) \sum_{-s}^s \sum_{-t}^t \frac{e^{-ik_1 r_{(s,t)}}}{r_{(s,t)}}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$r_c = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_t)^2 + z^2}; \quad (6)$$

здесь координаты (x, y, z) определяют вне сфер точку наблюдения поля, рассеянного плоской решеткой, а координаты (x_s, y_t) – точку нахождения центра рассеивающей сферы решетки, рис. 1; $\varepsilon_{\text{эф}}, \mu_{\text{эф}}$ – эффективные проницаемости [3, 4]

$$\varepsilon_{\text{эф}} = \varepsilon \cdot F(ka\sqrt{\varepsilon\mu}), \quad \mu_{\text{эф}} = \mu \cdot F(ka\sqrt{\varepsilon\mu}), \quad (7)$$

где, рис. 2,

$$F(ka\sqrt{\epsilon\mu}) = \frac{2(\sin ka\sqrt{\epsilon\mu} - ka\sqrt{\epsilon\mu} \cos ka\sqrt{\epsilon\mu})}{(k^2 a^2 \epsilon\mu - 1)\sin ka\sqrt{\epsilon\mu} + ka\sqrt{\epsilon\mu} \cos ka\sqrt{\epsilon\mu}}$$

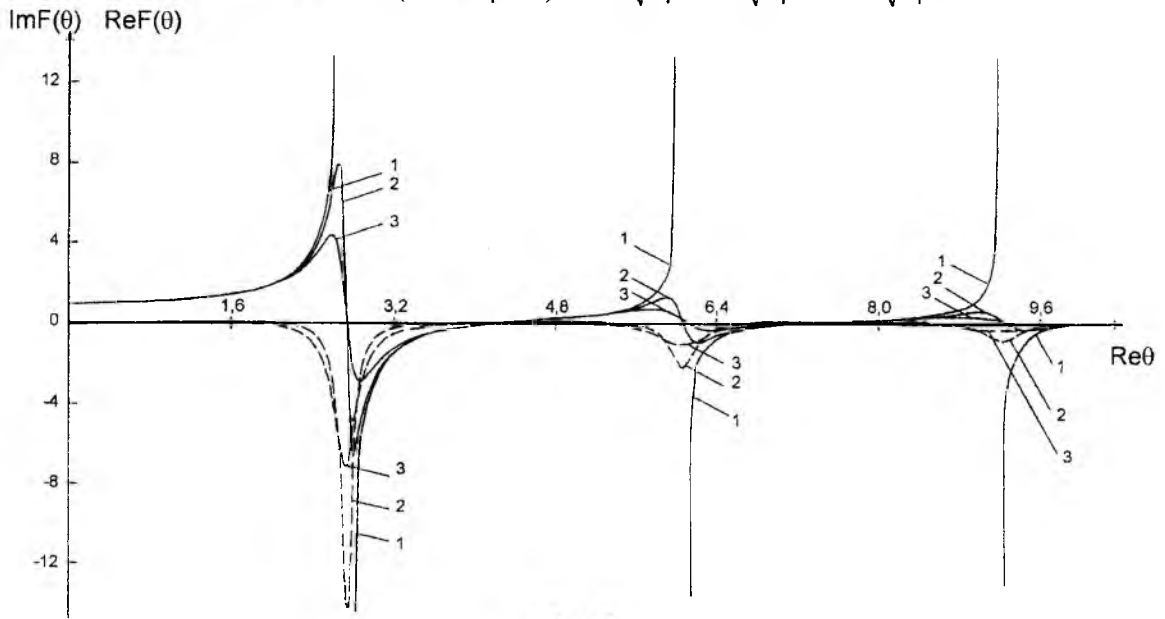


Рис. 2

На рис. 2 представлены особенности поведения $\text{Re}F(\theta)$ (сплошная кривая) и $\text{Im}F(\theta)$ (штриховая кривая) в зависимости от $\text{Re}\theta$ при разных значениях тангенса угла диэлектрических потерь $\text{tg}\delta_\epsilon$ (кривая 1 – $\text{tg}\delta_\epsilon=0$; кривая 2 – $\text{tg}\delta_\epsilon=0,05$; кривая 3 – $\text{tg}\delta_\epsilon=0,1$) и $\mu=1$; здесь $\theta = ka\sqrt{\epsilon\mu}$.

Для плоской решетки одинаковых сфер, расположенных в плоскости xu , рис.1, внутреннее поле сфер $\vec{E}^0(\vec{r}',t), \vec{H}^0(\vec{r}',t)$ (5) найдем из алгебраической системы уравнений, которую представим в матричной форме

$$\begin{bmatrix} E_{ox(s=0,t=0)}(\vec{r}') \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_{oy(s=0,t=0)}(\vec{r}') \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{xx}^{\epsilon 0} + \Psi_{xx}^{\epsilon} & \Psi_{xy}^{\epsilon} & 0 & 0 & 0 & \Psi_y^{M0} \\ \Psi_{yx}^{\epsilon} & \Psi_{yy}^{\epsilon 0} + \Psi_{yy}^{\epsilon} & 0 & 0 & 0 & \Psi_x^M \\ 0 & 0 & \Psi_{zz}^{\epsilon 0} + \Psi_{zz}^{\epsilon} & \Psi_y^M & \Psi_x^{M0} & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_y^{\epsilon} & \Psi_{xx}^{M0} + \Psi_{xx}^M & \Psi_{xy}^M & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_x^{\epsilon 0} & \Psi_{yx}^M & \Psi_{yy}^{M0} + \Psi_{yy}^M & 0 \\ \Psi_y^{\epsilon 0} & \Psi_x^{\epsilon} & 0 & 0 & 0 & \Psi_{zz}^{M0} + \Psi_{zz}^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x(s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ E_{y(s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ E_{z(s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ H_{x(s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ H_{y(s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \\ H_{z(s=0,t=0)}^0(\vec{r}') \end{bmatrix} \quad (8)$$

Основная матрица системы уравнений (8) содержит сведения об особенностях электромагнитного взаимодействия сфер плоской решетки.

Элементы основной матрицы системы уравнений (8), входящие в строку, связанную с $E_{x(s=0,t=0)}^0(\vec{r}')$, представим в виде

$$(\Psi_{xx}^{\epsilon 0} + \Psi_{xx}^{\epsilon}) = A_\epsilon^0 - A_\epsilon B \sum_{-s-t}^s \sum_{(s,t) \neq (s'=0,t'=0)}^t [(c_{xx} \cos k_1 r_{cc'} + a_{xx} \sin k_1 r_{cc'}) + i(a_{xx} \cos k_1 r_{cc'} - c_{xx} \sin k_1 r_{cc'})],$$

$$\Psi_{xy}^{\epsilon} = -A_\epsilon B \sum_{-s-t}^s \sum_{(s,t) \neq (s'=0,t \neq 0)}^t [(c_{xy} \cos k_1 r_{cc'} + a_{xy} \sin k_1 r_{cc'}) + i(a_{xy} \cos k_1 r_{cc'} - c_{xy} \sin k_1 r_{cc'})],$$

$$\psi_y^{M0} = k\mu_0 A_\mu B \sum_{-s}^s \sum_{-t}^t (-1) \left[(c_y \cos k_1 r_{cc'} - a_y \sin k_1 r_{cc'}) - i(a_y \cos k_1 r_{cc'} + c_y \sin k_1 r_{cc'}) \right], \\ (s,t) \neq (s'=0, t'=0)$$

связанные с $E_{y(s=0, t=0)}^0(\vec{r}')$, представим в виде

$$\psi_{yx}^{\mathfrak{z}} = \psi_{xy}^{\mathfrak{z}},$$

$$(\psi_{yy}^{\mathfrak{z}0} + \psi_{yy}^{\mathfrak{z}}) = A_\varepsilon^0 - A_\varepsilon B \sum_{-s}^s \sum_{-t}^t \left[(c_{yy} \cos k_1 r_{cc'} + a_{yy} \sin k_1 r_{cc'}) + i(a_{yy} \cos k_1 r_{cc'} - c_{yy} \sin k_1 r_{cc'}) \right], \\ (s,t) \neq (s'=0, t'=0)$$

$$\psi_x^M = -k\mu_0 A_\mu B \sum_{-s}^s \sum_{-t}^t (-1) \left[(c_x \cos k_1 r_{cc'} - a_x \sin k_1 r_{cc'}) - i(a_x \cos k_1 r_{cc'} + c_x \sin k_1 r_{cc'}) \right], \\ (s,t) \neq (s'=0, t'=0)$$

связанные с $E_{z(s=0, t=0)}^0(\vec{r}')$, запишем как

$$(\psi_{zz}^{\mathfrak{z}0} + \psi_{zz}^{\mathfrak{z}}) = A_\varepsilon^0 - A_\varepsilon B \sum_{-s}^s \sum_{-t}^t \left[(c_{zz} \cos k_1 r_{cc'} + a_{zz} \sin k_1 r_{cc'}) + i(a_{zz} \cos k_1 r_{cc'} - c_{zz} \sin k_1 r_{cc'}) \right], \\ (s,t) \neq (s'=0, t'=0)$$

$$\psi_y^M = -k\mu_0 A_\mu B \sum_{-s}^s \sum_{-t}^t (-1) \left[(c_y \cos k_1 r_{cc'} - a_y \sin k_1 r_{cc'}) - i(a_y \cos k_1 r_{cc'} + c_y \sin k_1 r_{cc'}) \right], \\ (s,t) \neq (s'=0, t'=0)$$

$$\psi_x^{M0} = k\mu_0 A_\mu B \sum_{-s}^s \sum_{-t}^t (-1) \left[(c_x \cos k_1 r_{cc'} - a_x \sin k_1 r_{cc'}) - i(a_x \cos k_1 r_{cc'} + c_x \sin k_1 r_{cc'}) \right], \\ (s,t) \neq (s'=0, t'=0)$$

Аналогично элементы основной матрицы системы уравнений (8), входящие в строку, связанную с $H_{x(s=0, t=0)}^0(\vec{r}')$, представим в виде

$$\psi_y^{\mathfrak{z}} = -k\varepsilon_0 A_\varepsilon B \sum_{-s}^s \sum_{-t}^t \left[(c_y \cos k_1 r_{cc'} - a_y \sin k_1 r_{cc'}) - i(a_y \cos k_1 r_{cc'} + c_y \sin k_1 r_{cc'}) \right], \\ (s,t) \neq (s'=0, t'=0)$$

$$(\psi_{xx}^{M0} + \psi_{xx}^M) = A_\mu^0 - A_\mu B \sum_{-s}^s \sum_{-t}^t (-1) \left[(c_{xx} \cos k_1 r_{cc'} + a_{xx} \sin k_1 r_{cc'}) + i(a_{xx} \cos k_1 r_{cc'} - c_{xx} \sin k_1 r_{cc'}) \right], \\ (s,t) \neq (s'=0, t'=0)$$

$$\psi_{xy}^M = -A_\mu B \sum_{-s}^s \sum_{-t}^t (-1) \left[(c_{xy} \cos k_1 r_{cc'} + a_{xy} \sin k_1 r_{cc'}) + i(a_{xy} \cos k_1 r_{cc'} - c_{xy} \sin k_1 r_{cc'}) \right], \\ (s,t) \neq (s'=0, t'=0)$$

связанные с $H_{y(s=0, t=0)}^0(\vec{r}')$, представим

$$\psi_x^{\mathfrak{z}0} = k\varepsilon_0 A_\varepsilon B \sum_{-s}^s \sum_{-t}^t \left[(c_x \cos k_1 r_{cc'} - a_x \sin k_1 r_{cc'}) - i(a_x \cos k_1 r_{cc'} + c_x \sin k_1 r_{cc'}) \right], \\ (s,t) \neq (s'=0, t'=0)$$

$$\psi_{yx}^M = \psi_{xy}^M,$$

$$(\psi_{yy1}^{M0} + \psi_{yy1}^M) = A_{\mu}^0 - A_{\mu} B \sum_{\substack{-s-t \\ (s,t) \neq (s'=0, t'=0)}}^s \sum_{-t}^t (-1) \left[(c_{yy} \cos k_1 r_{cc'} + a_{yy} \sin k_1 r_{cc'}) + i(a_{yy} \cos k_1 r_{cc'} - c_{yy} \sin k_1 r_{cc'}) \right],$$

связанные с $H_{z(s=0, t=0)}^0(\vec{r}')$

$$\psi_y^{\infty 0} = k \varepsilon_0 A_{\varepsilon} B \sum_{\substack{-s-t \\ (s,t) \neq (s'=0, t'=0)}}^s \sum_{-t}^t \left[(c_y \cos k_1 r_{cc'} - a_y \sin k_1 r_{cc'}) - i(a_y \cos k_1 r_{cc'} + c_y \sin k_1 r_{cc'}) \right],$$

$$\psi_x^{\infty} = -k \varepsilon_0 A_{\varepsilon} B \sum_{\substack{-s-t \\ (s,t) \neq (s'=0, t'=0)}}^s \sum_{-t}^t \left[(c_x \cos k_1 r_{cc'} - a_x \sin k_1 r_{cc'}) - i(a_x \cos k_1 r_{cc'} + c_x \sin k_1 r_{cc'}) \right],$$

$$(\psi_{zz}^{M0} + \psi_{zz}^M) = A_{\mu}^0 - A_{\mu} B \sum_{\substack{-s-t \\ (s,t) \neq (s'=0, t'=0)}}^s \sum_{-t}^t (-1) \left[(c_{zz} \cos k_1 r_{cc'} + a_{zz} \sin k_1 r_{cc'}) + i(a_{zz} \cos k_1 r_{cc'} - c_{zz} \sin k_1 r_{cc'}) \right].$$

Здесь (1),(3),(7)

$$k = 2\pi/\lambda; k_1^2 = k^2 \varepsilon_0 \mu_0; A_{\varepsilon} = \left(\frac{\varepsilon_{\varepsilon\phi} - 1}{\varepsilon_0} \right);$$

$$A_{\mu} = \left(\frac{\mu_{\varepsilon\phi} - 1}{\mu_0} \right);$$

$$B = \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a); \theta_1^2 = k^2 a^2 \varepsilon_0 \mu_0;$$

$$A_{\varepsilon}^0 = \frac{(\varepsilon_{\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0) + \theta_1^2 \varepsilon_{\varepsilon\phi} + i\theta_1 (\varepsilon_{\varepsilon\phi} + 2\varepsilon_0)}{3\varepsilon_0 e^{i\theta_1}};$$

$$A_{\mu}^0 = \frac{(\mu_{\varepsilon\phi} + 2\mu_0) + \theta_1^2 \mu_{\varepsilon\phi} + i\theta_1 (\mu_{\varepsilon\phi} + 2\mu_0)}{3\mu_0 e^{i\theta_1}};$$

$$a_{xx} = k_1 \frac{|3(x_{s'=0} - x_s)^2 - r_{cc'}^2|}{r_{cc'}^4};$$

$$c_{xx} = \frac{1}{r_{cc'}} k_1^2 + \left| \frac{3(x_{s'=0} - x_s)^2 - r_{cc'}^2}{r_{cc'}^5} - k_1^2 \frac{(x_{s'=0} - x_s)^2}{r_{cc'}^3} \right|;$$

$$a_{yy} = k_1 \frac{|3(y_{t'=0} - y_t)^2 - r_{cc'}^2|}{r_{cc'}^4};$$

$$c_{yy} = \frac{1}{r_{cc'}} k_1^2 + \left| \frac{3(y_{t'=0} - y_t)^2 - r_{cc'}^2}{r_{cc'}^5} - k_1^2 \frac{(y_{t'=0} - y_t)^2}{r_{cc'}^3} \right|; a_{zz} = k_1 \left| -\frac{1}{r_{cc'}^2} \right|; c_{zz} = \frac{1}{r_{cc'}} k_1^2 + \left| -\frac{1}{r_{cc'}^3} \right|;$$

$$a_{xy} = k_1 \frac{3(x_{s'=0} - x_s)(y_{t'=0} - y_t)}{r_{cc'}^4}; c_{xy} = \left| \frac{3(x_{s'=0} - x_s)(y_{t'=0} - y_t)}{r_{cc'}^5} - k_1^2 \frac{(x_{s'=0} - x_s)(y_{t'=0} - y_t)}{r_{cc'}^3} \right|;$$

$$a_x = \frac{(x_{s'=0} - x_s)}{r_{cc'}^3}; c_x = k_1 \frac{(x_{s'=0} - x_s)}{r_{cc'}^2}; a_y = \frac{(y_{t'=0} - y_t)}{r_{cc'}^3}; c_y = k_1 \frac{(y_{t'=0} - y_t)}{r_{cc'}^2};$$

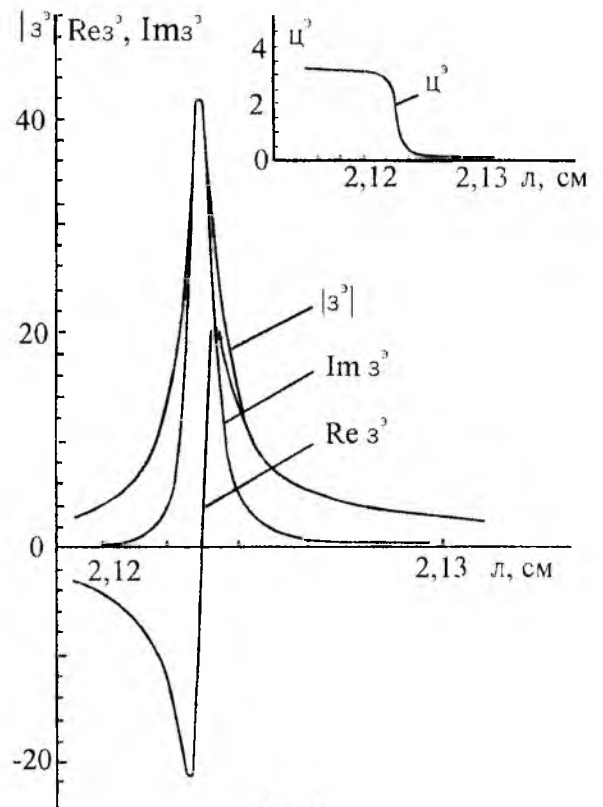


Рис. 3

Для сферы (s, t) плоской решетки решение системы уравнений (8) имеет вид

$$\begin{aligned}\bar{E}^0(\bar{r}', t) &= \frac{1}{\Delta^{\text{эм}}} \left(\hat{g}^{\text{э}} \bar{E}_{ox}(\bar{r}') + \hat{\beta}^{\text{э}} \bar{H}_{oy}(\bar{r}') \right) e^{i\omega t}, \\ \bar{H}^0(\bar{r}', t) &= \frac{1}{\Delta^{\text{эм}}} \left(\hat{\beta}^{\text{м}} \bar{H}_{oy}(\bar{r}') + \hat{g}^{\text{м}} \bar{E}_{ox}(\bar{r}') \right) e^{i\omega t},\end{aligned}\tag{9}$$

где $\Delta^{\text{эм}}$ – определитель основной матрицы системы уравнений.

Для случая, когда электромагнитным взаимодействием между сферами решетки можно пренебречь, выражения для внутреннего поля произвольной сферы решетки (9) приобретают вид (7)

$$\begin{aligned}\bar{E}^0(\bar{r}', t) &= \frac{3\varepsilon_0 e^{i\theta_1}}{(\varepsilon_{\text{эф}} + 2\varepsilon_0) + \theta_1^2 \varepsilon_{\text{эф}} + i\theta_1(\varepsilon_{\text{эф}} + 2\varepsilon_0)} \bar{E}_{ox}(z', t), \\ \bar{H}^0(\bar{r}', t) &= \frac{3\mu_0 e^{i\theta_1}}{(\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0) + \theta_1^2 \mu_{\text{эф}} + i\theta_1(\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0)} \bar{H}_{oy}(z', t),\end{aligned}$$

а потенциалы Герца рассеянного поля (5) запишем в виде

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}^{\text{э}}(\bar{r}, t) &= \frac{3}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \frac{(\varepsilon_{\text{эф}} - \varepsilon_0) e^{i\theta_1}}{(\varepsilon_{\text{эф}} + 2\varepsilon_0) + \theta_1^2 \varepsilon_{\text{эф}} + i\theta_1(\varepsilon_{\text{эф}} + 2\varepsilon_0)} \cdot \bar{E}_{ox}(z', t) \sum_{-s}^s \sum_{-t}^t \frac{e^{-ik_1 r_c}}{r_c}, \\ \bar{\Pi}^{\text{м}}(\bar{r}, t) &= -\frac{3}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \frac{(\mu_{\text{эф}} - \mu_0) e^{i\theta_1}}{(\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0) + \theta_1^2 \mu_{\text{эф}} + i\theta_1(\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0)} \cdot \bar{H}_{oy}(z', t) \sum_{-s}^s \sum_{-t}^t \frac{e^{-ik_1 r_c}}{r_c}.\end{aligned}$$

На рис. 3 представлены зависимости $\text{Re } \eta^{\text{э}}$, $\text{Im } \eta^{\text{э}}$, модуля $|\eta^{\text{э}}|$ и аргумента $\varphi^{\text{э}}$ выражения

$$\eta^{\text{э}} = \frac{(\varepsilon_{\text{эф}} - \varepsilon_0) e^{i\theta_1}}{(\varepsilon_{\text{эф}} + 2\varepsilon_0) + \theta_1^2 \varepsilon_{\text{эф}} + i\theta_1(\varepsilon_{\text{эф}} + 2\varepsilon_0)},$$

которое выше входит в состав формулы для $\bar{\Pi}^{\text{э}}(\bar{r}, t)$, от длины падающей волны λ в области первого внутреннего резонанса сферы электрического типа, когда $a = 0,1145$ см, $\varepsilon = 174$, $\mu = \mu_0 = \varepsilon_0 = 1$.

Рассеянное решеткой сфер поле получим из (4), (5)

$$\bar{E}_{\text{расс}}(\bar{r}, t) = \sum_{-s}^s \sum_{-t}^t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \left\{ \left(\frac{\varepsilon_{\text{эф}}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \hat{L}_s \bar{E}^0(\bar{r}') - ik\mu_0 \left(\frac{\mu_{\text{эф}}}{\mu_0} - 1 \right) (-1) \hat{P}_s \bar{H}^0(\bar{r}') \right\} e^{i(\omega t - k_1 r_c)},\tag{10}$$

$$\bar{H}_{\text{расс}}(\bar{r}, t) = \sum_{-s}^s \sum_{-t}^t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \left\{ \left(\frac{\mu_{\text{эф}}}{\mu_0} - 1 \right) (-1) \hat{L}_s \bar{H}^0(\bar{r}') + ik\varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_{\text{эф}}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \hat{P}_s \bar{E}^0(\bar{r}') \right\} e^{i(\omega t - k_1 r_c)},$$

где \hat{L}_s и \hat{P}_s – функциональные матрицы, которые имеют вид

$$\hat{L}_s = \begin{bmatrix} \Psi_{xx} & \Psi_{xy} & \Psi_{xz} \\ \Psi_{yx} & \Psi_{yy} & \Psi_{yz} \\ \Psi_{zx} & \Psi_{zy} & \Psi_{zz} \end{bmatrix}; \hat{P}_s = \begin{bmatrix} 0 & \Psi_z & \Psi_y^0 \\ \Psi_z^0 & 0 & \Psi_x \\ \Psi_y & \Psi_x^0 & 0 \end{bmatrix}.\tag{11}$$

Величины, входящие в функциональные матрицы (11), запишем в виде (1), (6)

$$\begin{aligned} \Psi_{xx} &= \frac{1}{r_c} k_1^2 + \left| \frac{3(x-x_s)^2 - r_c^2}{r_c^5} - k_1^2 \frac{(x-x_s)^2}{r_c^3} \right| + ik_1 \frac{|3(x-x_s)^2 - r_c^2|}{r_c^4}, \\ \Psi_{yy} &= \frac{1}{r_c} k_1^2 + \left| \frac{3(y-y_s)^2 - r_c^2}{r_c^5} - k_1^2 \frac{(y-y_s)^2}{r_c^3} \right| + ik_1 \frac{|3(y-y_s)^2 - r_c^2|}{r_c^4}, \\ \Psi_{zz} &= \frac{1}{r_c} k_1^2 + \left| \frac{3z^2 - r_c^2}{r_c^5} - k_1^2 \frac{z^2}{r_c^3} \right| + ik_1 \frac{|3z^2 - r_c^2|}{r_c^4}, \\ \Psi_{xy} = \Psi_{yx} &= \left| \frac{3(x-x_s)(y-y_t)}{r_c^5} - k_1^2 \frac{(x-x_s)(y-y_t)}{r_c^3} \right| + ik_1 \frac{3(x-x_s)(y-y_t)}{r_c^4}, \\ \Psi_{xz} = \Psi_{zx} &= \left| \frac{3(x-x_s)z}{r_c^5} - k_1^2 \frac{(x-x_s)z}{r_c^3} \right| + ik_1 \frac{3(x-x_s)z}{r_c^4}, \\ \Psi_{yz} = \Psi_{zy} &= \left| \frac{3(y-y_t)z}{r_c^5} - k_1^2 \frac{(y-y_t)z}{r_c^3} \right| + ik_1 \frac{3(y-y_t)z}{r_c^4}, \\ \Psi_x &= \frac{(x-x_s)}{r_c^3} + ik_1 \frac{(x-x_s)}{r_c^2}, \Psi_y^0 = -\Psi_y, \\ \Psi_y &= \frac{(y-y_t)}{r_c^3} + ik_1 \frac{(y-y_t)}{r_c^2}, \Psi_x^0 = -\Psi_x, \\ \Psi_z &= \frac{z}{r_c^3} + ik_1 \frac{z}{r_c^2}, \Psi_z^0 = -\Psi_z. \end{aligned}$$

Поле в произвольной точке пространства, лежащей вне сфер решетки, представим в виде

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{ox}(z, t) + \vec{E}_{расс}(\vec{r}, t).$$

Для случая, когда можно пренебречь электромагнитным взаимодействием между сферами решетки, компонента рассеянного поля $E_{x\text{расс}}(\vec{r}, t)$ (10) конечной решетки для ближней зоны имеет вид (7) ($e^{-ik_1 r_c} \approx 1$)

$$\begin{aligned} E_{x\text{расс}}(\vec{r}, t) &= \frac{3}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \left[\frac{(\varepsilon_{\text{эф}} - \varepsilon_0) e^{i\theta_1}}{(\varepsilon_{\text{эф}} + 2\varepsilon_0) + \theta_1^2 \varepsilon_{\text{эф}} + i\theta_1 (\varepsilon_{\text{эф}} + 2\varepsilon_0)} E_0 \sum_{-s-t}^s \sum_{-t}^t |3(x-x_s)^2 - r_c^2| \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{1}{r_c^5} + ik_1 \frac{1}{r_c^4} \right) + ik_1 \mu_0 \frac{(\mu_{\text{эф}} - \mu_0) e^{i\theta_1}}{(\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0) + \theta_1^2 \mu_{\text{эф}} + i\theta_1 (\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0)} H_0 \sum_{-s-t}^s \sum_{-t}^t \frac{z}{r_c^3} \right] e^{i\omega t}, \quad (12) \end{aligned}$$

а для дальней зоны представим как

$$\begin{aligned} E_{x\text{расс}}(\vec{r}, t) &= \frac{3}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \left[k_1^2 \frac{(\varepsilon_{\text{эф}} - \varepsilon_0) e^{i\theta_1}}{(\varepsilon_{\text{эф}} + 2\varepsilon_0) + \theta_1^2 \varepsilon_{\text{эф}} + i\theta_1 (\varepsilon_{\text{эф}} + 2\varepsilon_0)} E_0 \sum_{-s-t}^s \sum_{-t}^t \left(\frac{1}{r_c} + \left| \frac{(x-x_s)^2}{r_c^3} \right| \right) \times \right. \\ &\times \left. e^{-ik_1 r_c} - k_1 k_1 \mu_0 \frac{(\mu_{\text{эф}} - \mu_0) e^{i\theta_1}}{(\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0) + \theta_1^2 \mu_{\text{эф}} + i\theta_1 (\mu_{\text{эф}} + 2\mu_0)} H_0 \sum_{-s-t}^s \sum_{-t}^t z \frac{e^{-ik_1 r_c}}{r_c^2} \right] e^{i\omega t}. \quad (13) \end{aligned}$$

Из определителя (9) системы уравнений (8) находятся резонансные условия для случая, когда $a/\lambda_g \sim 1$ внутри сфер. Если ε , μ одинаковых сфер решетки действительны, то резонансные условия для индуцированных в сфере по осям x, y, z компонент внутреннего поля получим из выражения

$$\det \operatorname{Re} \| a_{ij} \| = 0, \quad (14)$$

разрешая уравнение (14) относительно функции $F(ka\sqrt{\varepsilon\mu})$ (7), рис. 2, для выделенной сферы, где $\| a_{ij} \|$ – основная матрица системы уравнений (8).

Анализ решения (9) системы уравнений (8) показывает, что компоненты внутреннего поля $\vec{E}^0(\vec{r}', t)$, $\vec{H}^0(\vec{r}', t)$ сфер решетки по осям системы координат x, y, z , рис. 1, имеют разные резонансные условия, что приводит к возникновению тонкой резонансной структуры внутреннего поля сфер и расщеплению резонансных кривых.

Если электромагнитным взаимодействием между сферами решетки пренебречь, то условия для резонансов внутреннего электрического и внутреннего магнитного полей произвольной сферы решетки из (14) имеют вид

$$F(ka\sqrt{\varepsilon\mu}) = -\frac{2\varepsilon_0(\cos\theta_1 + \theta_1 \sin\theta_1)}{\varepsilon \left[(1 + \theta_1^2) \cos\theta_1 + \theta_1 \sin\theta_1 \right]}, \quad F(ka\sqrt{\varepsilon\mu}) = -\frac{2\mu_0(\cos\theta_1 + \theta_1 \sin\theta_1)}{\mu \left[(1 + \theta_1^2) \cos\theta_1 + \theta_1 \sin\theta_1 \right]}.$$

Порядок уравнения (14) можно понизить, если в нем слагаемыми, связанными с \cot , (8) пренебречь в силу их малости при резонансе. Тогда уравнение (14) распадается на четыре независимых алгебраических уравнения первого и второго порядков, из которых можно найти искомые резонансные условия для компонент внутреннего поля сфер (9). Но при таком упрощении в выражениях для компонент внутреннего поля сфер (9) теряется некоторая информация о тонкой резонансной структуре внутреннего поля сфер.

В этом приближении условия для резонансов компонент внутренних полей $E_{z(s=0)}^0(\vec{r}')$ и $H_{z(s=0)}^0(\vec{r}')$ решетки имеют вид (14) ($\theta_1 \ll 1$)

$$F(ka\sqrt{\varepsilon\mu}) = -\frac{\varepsilon_0 \left[2(1 + \theta_1^2) + \tau_{zz}^{\varepsilon} \right]}{\varepsilon(1 + 2\theta_1^2 - \tau_{zz}^{\varepsilon})}, \quad F(ka\sqrt{\varepsilon\mu}) = -\frac{\mu_0 \left[2(1 + \theta_1^2) + \tau_{zz}^{\mu} \right]}{\mu(1 + 2\theta_1^2 - \tau_{zz}^{\mu})}, \quad (15)$$

где

$$\tau_{zz}^{\varepsilon} = \frac{3}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \sum_{-s}^s \sum_{-t}^t \left[\left[k_1^2 \frac{1}{r_{cc'}} + \left| -\frac{1}{r_{cc'}} \right| \right] \cos k_1 r_{cc'} + \left| -k_1 \frac{1}{r_{cc'}} \right| \sin k_1 r_{cc'} \right]; \quad \tau_{zz}^{\mu} = -\tau_{zz}^{\varepsilon}. \quad (16)$$

$(s, t) \neq (s'=0, t'=0)$

Если разложить функцию $F(ka\sqrt{\varepsilon\mu})$ (7) в выражениях (15) в ряд Тейлора в окрестности резонансных условий для свободной сферы [5], то из (15) можно получить резонансные условия для сфер плоской решетки в более простом виде.

Для диэлектрической сферы ($\mu = 1$) для первого низшего внутреннего резонанса компоненты $E_{z(s=0)}^0(\vec{r}')$, когда $\varepsilon = 40$, и n -го резонанса компоненты $H_{z(s=0)}^0(\vec{r}')$ резонансные условия представим так:

$$4,384 = \frac{2\pi a \sqrt{\varepsilon}}{\lambda} + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \left(\frac{2(1 + \theta_1^2) + \tau_{zz}^{\varepsilon}}{1 + 2\theta_1^2 - \tau_{zz}^{\varepsilon}} - 2 \right) \frac{1}{0,472}; \quad n\pi = \frac{2\pi a \sqrt{\varepsilon}}{\lambda} + \left(\frac{2(1 + \theta_1^2) + \tau_{zz}^{\mu}}{1 + 2\theta_1^2 - \tau_{zz}^{\mu}} - 2 \right) \frac{\mu_0}{2\pi n},$$

где $n=1, 2, 3, \dots$ порядок резонансов магнитного типа. Величины $\tau_{zz}^{\varepsilon}, \tau_{zz}^{\mu}$ (16) учитывают структурное электромагнитное влияние сфер решетки на выделенную сферу ($s' = 0, t' = 0$).

На рис. 4 представлена зависимость τ_{zz}^M (16) от длины падающей волны λ для случая, когда радиус сферы $a = 0,15$ см, постоянные решетки $d = 2,3$ см, $h = 40$ см, $x_{s=0} = 1,15$ см, $y_{t=0} = 20$ см.

Анализ выражений (9), (10), (15), (16), рис. 4 говорит, что когда длина рассеиваемой волны соизмерима с постоянными решетки $\lambda \sim d, h$, то возникают решеточные структурные резонансы электромагнитного взаимодействия сфер решетки двух типов – электрического и магнитного.

Из резонансных условий следует, что при сближении сфер решетки резонансные значения длин волн для внутренних электрических резонансов сфер увеличиваются, а для внутренних магнитных резонансов сфер уменьшаются относительно аналогичных резонансных значений длин волн свободной сферы.

Заключение

Впервые получено решение задачи, которое учитывает влияние структурных резонансов электромагнитного взаимодействия магнитодиэлектрических сфер решетки на внутренние резонансы сфер, входящих в соответствующие резонансные зоны сфер [5], и их совместное влияние на рассеянное поле.

Найденное решение может быть полезно для разработки композиционных материалов с сильной дисперсией, используя области аномальной дисперсии решеток, изучения влияния дефектов решетки на рассеяние полей, а также для разработки устройств по управлению полем излучения электромагнитных излучателей, в которых используются тонкие эффекты взаимодействия решеточных структурных резонансов и внутренних резонансов сфер решетки [6, 7].

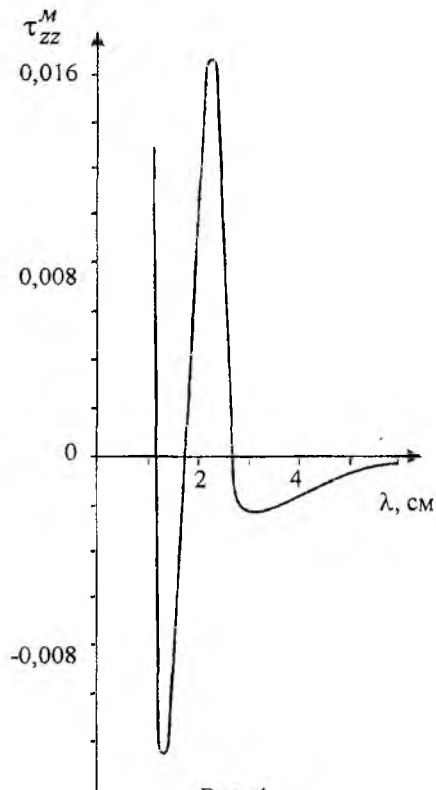


Рис. 4

Список литературы: 1. Козарь А.И., Хиженяк Н.А. Отражение электромагнитных волн от резонансной диэлектрической сферы в волноводе // Укр. физ. журн. 1970. Т.15. С. 847 – 849. 2. Хиженяк Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка. 1986. С. 279. 3. Козарь А.И. Рассеяние электромагнитных волн системой плоских однослойных решеток резонансных магнитодиэлектрических сфер // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.- техн. сб.2002. Вып.130. С. 42 – 53. 4. Левин Л. Современная теория волноводов. М.: Изд-во иностр. лит. 1954. С. 216. 5. Козарь А.И. Рассеяние электромагнитных волн в волноводе с однородными магнитодиэлектрическими сферами // Радиофизика и электроника. Харьков: Ин-т радиофизики и электроники НАН Украины. 2002. Т. 7. Спец.выпуск. С. 183 – 189. 6. Козарь А.И. Фигурные числа (арифметическая прогрессия) и рассеяние электромагнитных волн на пространственных решетках резонансных магнитодиэлектрических сфер // Радиофизика и электроника. Харьков: Ин-т радиофизики и электроники НАН Украины. 2003. Т. 8. №2. С. 206 – 212. 7. Kozar’A.I. Scattering of electromagnetic fields on complex spatial lattices of magnetodielectric spheres // IEEE Proceedings IVth International Conference on “Antenna theory and techniques”. Sevastopol, Ukraine. September 9-12. 2003. Vol. 1. P. 145 – 148.