

ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВОЙНОГО КОЛЬЦЕВОГО ВОЛНОВОДА

С. С. Третьякова

Двойной кольцевой волновод представляет собой периодическую структуру, состоящую из коаксиально расположенных металлических колец, изолированных друг от друга (рис. 1). Начало цилиндрической системы координат (r, φ, z) находится в середине щели. Предполагается, что кольца бесконечно тонкие, идеально проводящие и расположены строго одно под другим. Зависимость от времени $e^{-i\omega t}$. Аксиальная симметрия системы позволяет рассматривать случай симметричных E - и H -волн. Вследствие периодичности структуры решение будем отыскивать на одном

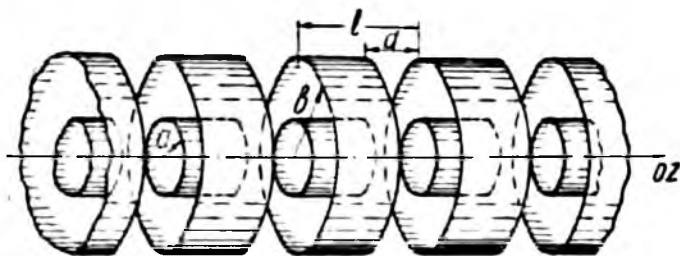


Рис. 1.

из ее периодов, поскольку решения на других, согласно теореме Флоке, отличаются на некоторый постоянный множитель $e^{ih_0 z}$. Электромагнитные поля внутри и вне волноводов в этом случае представляются в виде рядов Фурье

$$\begin{aligned} \vec{E}(r, z) &= e^{ih_0 z} \sum_m \vec{E}_m(r) e^{i \frac{2\pi m}{l} z}, \\ \vec{H}(r, z) &= e^{ih_0 z} \sum_m \vec{H}_m(r) e^{i \frac{2\pi m}{l} z}. \end{aligned} \quad (1)$$

(Множитель $e^{-i\omega t}$ здесь и далее опускается).

Разобьем рассматриваемую систему на три области: I область — $r < a$ — внутри кольцевого волновода радиуса a , II область — $a < r < b$ — пространство между волноводами, III область $r > b$ — вне кольцевого волновода радиуса b . Запишем составляющие поля в каждой из областей, исходя из уравнений Максвелла.

I область:

$$\begin{aligned} E_{zm}^{(I)}(r) &= \alpha_m \rho_m^2 J_0(\rho_m r); \\ E_{rm}^{(I)}(r) &= \alpha_m i h_m \rho_m J_0'(\rho_m r); \\ H_{\varphi m}^{(I)}(r) &= \alpha_m i k \rho_m J_0'(\rho_m r); \\ H_{zm}^{(I)}(r) &= \beta_m \rho_m^2 J_0(\rho_m r); \\ H_{rm}^{(I)}(r) &= \beta_m i h_m \rho_m J_0'(\rho_m r); \\ E_{\varphi m}^{(I)}(r) &= -\beta_m i k \rho_m J_0'(\rho_m r). \end{aligned}$$

II область:

$$\begin{aligned} E_{zm}^{(2)}(r) &= \bar{\alpha}_m \rho_m^2 J_0(\rho_m r) + \bar{\gamma}_m \rho_m^{(2)} H_0^{(1)'}(\rho_m r); \\ E_{rm}^{(2)}(r) &= \bar{\alpha}_m i h_m \rho_m J_0'(\rho_m r) + \bar{\gamma}_m i h_m \rho_m H_0^{(1)'}(\rho_m r); \\ H_{\varphi m}^{(2)}(r) &= +\bar{\alpha}_m i k \rho_m J_0'(\rho_m r) + \bar{\gamma}_m i k \rho_m H_0^{(1)'}(\rho_m r); \\ H_{zm}^{(2)}(r) &= \bar{\beta}_m \rho_m^2 J_0(\rho_m r) + \bar{\sigma}_m \rho_m^2 H_0^{(1)}(\rho_m r); \\ H_{rm}^{(2)}(r) &= \bar{\beta}_m i h_m \rho_m J_0'(\rho_m r) + \bar{\sigma}_m i h_m \rho_m H_0^{(1)'}(\rho_m r); \\ E_{\varphi m}^{(2)}(r) &= -\bar{\beta}_m i k \rho_m J_0'(\rho_m r) - \bar{\sigma}_m i k \rho_m H_0^{(1)'}(\rho_m r). \end{aligned}$$

III область:

$$\begin{aligned} E_{zm}^{(3)}(r) &= \bar{\alpha}_m \rho_m^2 H_0^{(1)}(\rho_m r); \\ E_{rm}^{(3)}(r) &= \bar{\alpha}_m i h_m \rho_m H_0^{(1)'}(\rho_m r); \\ H_{\varphi m}^{(3)}(r) &= +\bar{\alpha}_m i k \rho_m H_0^{(1)'}(\rho_m r); \\ H_{rm}^{(3)}(r) &= \bar{\beta}_m \rho_m^2 H_0^{(1)}(\rho_m r); \\ H_{zm}^{(3)}(r) &= \bar{\beta}_m i h_m \rho_m H_0^{(1)'}(\rho_m r); \\ E_{\varphi m}^{(3)}(r) &= -\bar{\beta}_m i k \rho_m H_0^{(1)'}(\rho_m r), \end{aligned}$$

где $k = \frac{\omega}{c}$, $\rho_m = \sqrt{k^2 - \left(h_0 + \frac{2-m}{l}\right)^2} = \sqrt{k^2 - h_m^2}$;

$J_0(\rho_m r)$, $H_0^{(1)}(\rho_m r)$ — функции Бесселя и Ханкеля;

$J_0'(\rho_m r)$, $H_0^{(1)'}(\rho_m r)$ — их производные по аргументу;

$\alpha_m, \beta_m, \bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_m, \bar{\gamma}_m, \bar{\sigma}_m, \bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_m$ — коэффициенты Фурье.

Для определения неизвестных коэффициентов Фурье подчиним поля точным граничным условиям на поверхностях $r = a$ и $r = b$. При $r = a$

$$\begin{aligned} E_z^{(1)} = E_z^{(2)} = 0 & \quad (\text{металл}), \\ E_\varphi^{(1)} = E_\varphi^{(2)} = 0 & \quad (2) \\ E_z^{(1)} = E_z^{(2)}, \quad H_z^{(1)} = H_z^{(2)} & \quad (\text{щель}); \\ E_\varphi^{(1)} = E_\varphi^{(2)}, \quad H_\varphi^{(1)} = H_\varphi^{(2)} & \end{aligned}$$

при $r = b$

$$\begin{aligned} E_z^{(2)} = E_z^{(3)} = 0 & \quad (\text{металл}), \\ E_\varphi^{(2)} = E_\varphi^{(3)} = 0 & \quad (3) \\ E_z^{(2)} = E_z^{(3)}, \quad H_z^{(2)} = H_z^{(3)} & \quad (\text{щель}). \\ E_\varphi^{(2)} = E_\varphi^{(3)}, \quad H_\varphi^{(2)} = H_\varphi^{(3)} & \end{aligned}$$

Подставляя выражения полей в граничные условия (2) и (3), получим следующие уравнения.
E-волны:

$$\begin{aligned} \sum_m \alpha_m \rho_m^2 J_0(\rho_m a) e^{i h_m z} &= 0 \quad (\text{металл}), \\ \sum_m \bar{\gamma}_m \frac{1}{J_0(\rho_m a)} e^{i h_m z} &= 0 \quad (\text{щель}), \\ \sum_m \bar{\alpha}_m \rho_m^2 H_0^{(1)}(\rho_m b) e^{i h_m z} &= 0 \quad (\text{металл}), \\ \sum_m \bar{\alpha}_m \frac{1}{H_0^{(1)}(\rho_m b)} e^{i h_m z} &= 0 \quad (\text{щель}). \end{aligned} \quad (4)$$

H -волны:

$$\begin{aligned} \sum_m \beta_m \rho_m J_0(\rho_m a) e^{ihmz} &= 0 \quad (\text{металл}), \\ \sum_m \sigma_m \rho_m \frac{1}{J_0'(\rho_m a)} e^{ihmz} &= 0 \quad (\text{щель}), \\ \sum_m \bar{\beta}_m \rho_m H_0^{(1)'}(\rho_m a) e^{ihmz} &= 0 \quad (\text{металл}), \\ \sum_m \bar{\sigma}_m \rho_m \frac{1}{H_0^{(1)'}(\rho_m b)} e^{ihmz} &= 0 \quad (\text{щель}). \end{aligned} \quad (5)$$

Соотношения между коэффициентами Фурье

$$\alpha_m = \alpha_m + \bar{\alpha}_m \frac{H_0^{(1)}(\rho_m a)}{J_0(\rho_m a)}; \quad \bar{\alpha}_m = \bar{\alpha}_m + \alpha_m \frac{J_0(\rho_m b)}{H_0^{(1)}(\rho_m b)}, \quad (6)$$

$$\beta_m = \beta_m + \bar{\beta}_m \frac{H_0^{(1)'}(\rho_m a)}{J_0'(\rho_m a)}; \quad \bar{\beta}_m = \bar{\beta}_m + \beta_m \frac{J_0'(\rho_m b)}{H_0^{(1)'}(\rho_m b)} \quad (7)$$

выполняются на всем периоде l . Подставим эти выражения в уравнения (4), (5) и обозначим

$$\begin{aligned} a_m &= \alpha_m \rho_m^2 J_0(\rho_m a); \quad \bar{a}_m = \bar{\alpha}_m \rho_m^2 H_0^{(1)}(\rho_m b); \\ b_m &= \frac{\rho_m}{J_0'(\rho_m a)} g_m \left[\bar{\beta}_m - \beta_m \frac{J_0'(\rho_m b)}{H_0^{(1)'}(\rho_m b)} \right]; \\ \bar{b}_m &= \frac{\rho_m}{H_0^{(1)'}(\rho_m b)} g_m \left[\beta_m - \bar{\beta}_m \frac{H_0^{(1)'}(\rho_m a)}{J_0'(\rho_m a)} \right]; \end{aligned} \quad (8)$$

$$g_m = \frac{1}{1 - \frac{J_0(\rho_m b) H_0^{(1)}(\rho_m a)}{J_0(\rho_m a) H_0^{(1)}(\rho_m b)}}; \quad g_m' = \frac{1}{1 - \frac{J_0(\rho_m b) H_0^{(1)'}(\rho_m a)}{J_0(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m b)}}. \quad (9)$$

Тогда (4), (5) примут вид E -волны:

$$\begin{aligned} \sum_m a_m e^{ihmz} &= 0 \quad (\text{металл}), \\ \sum_m \bar{a}_m e^{ihmz} &= 0 \quad (\text{металл}), \\ \sum_m \frac{g_m}{J_0(\rho_m a)} \left[\frac{\bar{a}_m}{\rho_m^2 H_0^{(1)}(\rho_m a)} - \frac{a_m}{\rho_m^2 J_0(\rho_m a)} \frac{J_0(\rho_m b)}{H_0^{(1)}(\rho_m b)} \right] e^{ihmz} &= 0 \quad (\text{щель}), \\ \sum_m \frac{g_m}{H_0^{(1)'}(\rho_m b)} \left[\frac{a_m}{\rho_m^2 J_0(\rho_m a)} - \frac{\bar{a}_m}{\rho_m^2 H_0^{(1)}(\rho_m b)} \frac{H_0^{(1)}(\rho_m a)}{J_0(\rho_m a)} \right] e^{ihmz} &= 0 \quad (\text{щель}). \end{aligned} \quad (10)$$

H -волны:

$$\begin{aligned} \sum_m b_m e^{ihmz} &= 0 \quad (\text{щель}), \\ \sum_m \bar{b}_m e^{ihmz} &= 0 \quad (\text{щель}), \\ \sum_m [b_m J_0(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m a) + \bar{b}_m J_0(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m b)] e^{ihmz} &= 0 \quad (\text{металл}) \\ \sum_m [b_m J_0(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m b) + \bar{b}_m J_0(\rho_m b) H_0^{(1)'}(\rho_m b)] e^{ihmz} &= 0 \quad (\text{металл}). \end{aligned} \quad (11)$$

Если теперь четвертое уравнение в (10) и (11) умножить соответственно на $\sqrt{\frac{a}{b}}$ и $\sqrt{\frac{b}{a}}$, сложить и вычесть их (соответственно) из третьего уравнения, то уравнения на щели в (10) и на металле в (11) можно записать так:

$$\sum_m \frac{g_m}{p_m^2} \left\{ \frac{1}{J_0(\rho_m a) H_0^{(1)}(\rho_m b)} (\bar{a}_m + a_m \sqrt{\frac{a}{b}}) - \frac{1}{J_0(\rho_m a) H_0^{(1)}(\rho_m b)} \times \right. \\ \left. \times \frac{J_0(\rho_m b)}{J_0(\rho_m a)} \left[a_m + \bar{a}_m \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{J_0(\rho_m a) H_0^{(1)}(\rho_m a)}{J_0(\rho_m b) H_0^{(1)}(\rho_m b)} \right] \right\} e^{ihmz} = 0 \quad (\text{щель}). \quad (12)$$

$$\sum_m \left\{ J_0'(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m a) \left[b_m - \sqrt{\frac{b}{a}} \bar{b}_m \cdot \frac{J_0(\rho_m b) H_0^{(1)}(\rho_m b)}{J_0(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m a)} \right] - \right. \\ \left. - J_0'(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m b) \left[b_m \sqrt{\frac{b}{a}} - \bar{b}_m \right] \right\} e^{ihmz} = 0 \quad (\text{металл}). \quad (13)$$

Будем считать, что $\rho_m a$ достаточно большое, чтобы можно было заменить отношение бесселевых функций их асимптотическими значениями:

$$\frac{J_0(\rho_m a) H_0^{(1)}(\rho_m a)}{J_0(\rho_m b) H_0^{(1)}(\rho_m b)} \approx \frac{b}{a} \quad \text{и} \quad \frac{J_0(\rho_m b) H_0^{(1)'}(\rho_m b)}{J_0'(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m a)} \approx \frac{a}{b}.$$

Условие $\rho_m a \gg 1$ выполняется для малых значений $\Delta = \frac{l}{2\pi a}$, т. е. полученные нами уравнения будут пригодны для волноводов с малым по сравнению с длиной волны периодом и большим радиусом

E-волны:

$$\sum_m c_m e^{ihmz} = 0 \quad (\text{металл}),$$

$$\sum_m c_m \frac{g_m}{p_m^2} \left[\frac{1}{J_0(\rho_m a) H_0^{(1)}(\rho_m a)} - \frac{1}{J_0(\rho_m b) H_0^{(1)}(\rho_m a)} \sqrt{\frac{a}{b}} \right] e^{ihmz} = 0 \quad (\text{щель}). \quad (14)$$

H-волны:

$$\sum_m d_m e^{ihmz} = 0 \quad (\text{щель}),$$

$$\sum_m d_m \left[J_0'(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m a) - \sqrt{\frac{b}{a}} J_0'(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m b) \right] \times \\ \times e^{ihmz} = 0 \quad (\text{металл}), \quad (15)$$

где $c_m = \bar{a}_m + \sqrt{\frac{a}{b}} a_m$; $d_m = b_m - \sqrt{\frac{a}{b}} \bar{b}_m$.

Введем теперь новые переменные

$$\zeta = \frac{2\pi}{l} z \quad \nu = \frac{h_0 l}{2\pi} \quad \kappa = \frac{kl}{2\pi} \quad \nu + m = \frac{h_m l}{2\pi}$$

и обозначим

$$\epsilon_m = 1 - \frac{i(\nu + m) |m|}{\pi \Delta p_m^2 a^2} \frac{|m|}{m} g_m \left[\frac{1}{J_0(\rho_m a) H_0^{(1)}(\rho_m a)} - \frac{1}{J_0(\rho_m b) H_0^{(1)}(\rho_m a)} \sqrt{\frac{a}{b}} \right], \quad (16)$$

$$\delta_m = 1 - \frac{i\pi(\nu + m) |m|}{\Delta} \frac{|m|}{m} \left[J_0'(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m a) - \sqrt{\frac{b}{a}} J_0'(\rho_m a) H_0^{(1)'}(\rho_m b) \right]. \quad (17)$$

Можно показать, воспользовавшись асимптотическими выражениями бесселевых функций, что при $|m| \rightarrow \infty$ ε_m и δ_m стремятся к нулю как $\frac{1}{m^2}$.

Теперь (14) и (15) запишутся следующим образом.

E-волны:

$$\begin{aligned} \sum_m c_m e^{i(\nu+m)\zeta} &= 0, \quad \frac{\pi d}{l} < |\zeta| < \pi; \\ \sum_m c_m \frac{1 - \varepsilon_m |m|}{\nu + m} \frac{|m|}{m} e^{i(\nu+m)\zeta} &= 0, \quad |\zeta| < \frac{\pi d}{l}; \end{aligned} \quad (18)$$

H-волны:

$$\begin{aligned} \sum_m d_m e^{i(\nu+m)\zeta} &= 0, \quad |\zeta| < \frac{\pi d}{l}; \\ \sum_m d_m \frac{1 - \delta_m |m|}{\nu + m} \frac{|m|}{m} e^{i(\nu+m)\zeta} &= 0, \quad \frac{\pi d}{l} < |\zeta| < \pi. \end{aligned} \quad (19)$$

Такие системы уравнений могут быть решены сведением их к неоднородной задаче сопряжения для аналитической функции, согласно методу, изложенному в работе [1]. Решение представляется однородной бесконечной системой линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов Фурье c_m, d_m . Условие существования нетривиального решения этой системы, т. е. равенство нулю ее определителя, дает дисперсионные уравнения для *E*- и *H*-волн.

E-волны:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \varepsilon_N V_N^N - 1 & -\varepsilon_{-N} V_{-N}^{-N} & \dots & \varepsilon_0 V_0^0 & 2R_N \\ \dots & \varepsilon_N V_{-N}^{-N} & -\varepsilon_{-N} V_{-N}^{-N} - 1 & \dots & \varepsilon_0 V_{-N}^0 & 2R_{-N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \varepsilon_N V_0^0 & -\varepsilon_{-N} V_0^{-N} & \dots & \varepsilon_0 V_0^0 - 1 & 2R_0 \\ \dots & \varepsilon_N \bar{W}_{[\sigma]}^N & -\varepsilon_{-N} \bar{W}_{[\sigma]}^{-N} & \dots & \varepsilon_0 \bar{W}_{[\sigma]}^0 & 2\bar{R}_{[\sigma]} \end{vmatrix} = 0. \quad (20)$$

H-волны:

$$\begin{vmatrix} 2R_{[\sigma]} & -\delta_0 V_{[\sigma]}^0 & \dots & -\delta_{-N} V_{[\sigma]}^{-N} & -\delta_N V_{[\sigma]}^N & \dots \\ 2R_0 & \delta_0 (1 - V_0^0) - 1 & \dots & -\delta_{-N} V_0^{-N} & -\delta_N V_0^N & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2R_{-N} & -\delta_0 V_{-N}^0 & \dots & -\delta_{-N} (1 + V_{-N}^{-N}) + 1 & -\delta_{-N} V_{-N}^N & \dots \\ 2R_N & -\delta_0 V_N^0 & \dots & -\delta_{-N} V_N^{-N} & \delta_N (1 - V_N^N) - 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0, \quad (21)$$

где величины $V_{[\sigma]}^N, V_N^N, \bar{W}_{[\sigma]}^N, R_N, R_{[\sigma]}, \bar{R}_{[\sigma]}$ определяются через функции Лежандра $P_\nu(u)$ от аргумента $u = \cos \frac{\pi d}{l}$ (см. [1] и нашу статью в настоящем сборнике), $\bar{W}_{[\sigma]}^m = \bar{V}_{[\sigma]}^m - \frac{1}{\nu + m}$.

Благодаря тому, что ε_N и δ_N с возрастанием N стремятся к нулю, уравнения (20) и (21) решаются методом редукции. В простейшем случае нулевого приближения получаем довольно простые выражения для дисперсионного уравнения

Е-волны:

$$J_0(\rho_0 a) = \frac{i2va}{l(\rho_0 a)^2 H_0^{(1)}(\rho_0 a)} \cdot \frac{1 - \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{J_0(\rho_0 a)}{J_0(\rho_0 b)}}{1 - \frac{J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 b)}{J_0(\rho_0 b) H_0^{(1)}(\rho_0 a)}} \cdot \frac{P_\nu(-u) + P_{\nu-1}(-u)}{P_\nu(-u) - P_{\nu-1}(-u)}; \quad (22)$$

H-волны:

$$J_1(\rho_0 a) = \frac{-il}{2\pi^2 a \nu} \frac{1}{H_1^{(1)}(\rho_0 a) - \sqrt{\frac{b}{a}} H_1^{(1)}(\rho_0 b)} \cdot \frac{P_\nu(u) - P_{\nu-1}(u)}{P_\nu(u) + P_{\nu-1}(u)}. \quad (23)$$

При $b \rightarrow \infty$ эти дисперсионные уравнения переходят в уравнения для обычного кольцевого волновода (см., например, [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопапов. ЖТФ, XXXII, вып. 4, 1962.
2. З. С. Агранович, В. П. Шестопапов. ЖТФ, XXXIV, вып. 11, 1964.