УДК 621.385.69

А.В. ГРИЦУНОВ, канд. техн. наук

К РЕШЕНИЮ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ РЕЗОНАТОРНОЙ ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

В работе [1] получены общие выражения для расчета коэффициентов матричного уравнения возбуждения замедляющей системы (ЗС) в виде цепочки связанных резонаторов на базе параметров нормальных видов колебаний и бегущих волн. Данное уравнение предназначено для нестационарного и спектрального моделирования СВЧ-приборов методом мгновенных значений [2] и в матричном виде записывается как:

$$\frac{d^2\mathrm{T}}{dt^2}+2\left\|\delta_0\right\|\frac{d\mathrm{T}}{dt}+\left\|\omega_0{}^2\right\|\mathrm{T}=-\frac{1}{2}\left\|\mathrm{W}_0\right\|^{-1}\int\limits_V \mathrm{E}_0\frac{\partial \mathrm{j}_{exc}}{\partial t}dV \qquad (1)$$

(здесь и далее обозначения всех переменных соответствуют принятым в работе [1]). Для однородной ЗС оно может быть представлено в виде системы

$$\frac{d^2T_n}{dt^2}+2\sum_u \delta_{0|u|}\frac{dT_{n+u}}{dt}+\sum_u \omega_{0|u|}{}^2 T_{n+u}=-\frac{1}{2}\sum_u W^i{}_{0|u|}\int\limits_V \mathrm{E}_{0n+u}\frac{\partial \mathrm{j}_{exc}}{\partial t}dV\ , \qquad (2)$$

где суммирование осуществляется по всем $u=-N_{coup}\ \dots\ +N_{coup}$ ячейкам, связь с которыми учитывается для текущего (n-го) резонатора. При расчете коэффициентов $\omega_{0|u|}{}^2$, $\delta_{0|u|}$ и $W_{0|u|}$ необходимо, во-первых, задаться конкретным значением N_{coup}, во-вторых – выбрать нормальные виды колебаний ЗС, являющиеся исходными (маркерными) для расчета.

Определим, какое значение N_{coup} является оптимальным. При малом количестве учитываемых пар связанных ячеек основная погрешность расчетов будет вызвана неточностью интерполяции реальной дисперсионной характеристики ЗС формулой

$$\sum_u \omega_{0|u|}{}^2\cos u\Delta\varphi_q=\omega_q{}^2\ . \qquad (3)$$

С увеличением N_{coup} эта погрешность неограниченно убывает. Взамен увеличиваются ошибки, возникающие вследствие пренебрежения запаздывающими потенциалами в элементах связи. Кроме того, всегда присутствует погрешность, вызванная игнорированием частотных зависимостей структуры поля и энергии парциальных видов колебаний ячеек и не зависящая от N_{coup}. Строгая оценка соотношения всех трех погрешностей для произвольной ЗС, по-видимому, невозможна. Поэтому воспользуемся эвристическим подходом, и при выборе числа N_{coup} будем исходить из принципа его минимума, обеспечивающего приемлемую точность интерполяции дисперсионной зависимости.

На рис. 1 приведена реальная дисперсионная характеристика амплитрона QK-434, взятая из книги [3] (кривая 4), а также синтезированные по формуле (3) расчетные дисперсионные зависимости при N_{coup} = 1 (кривая 1), N_{coup} = 2 (кривая 2) и N_{coup} = 4 (кривая 3). Видно, что последнее значение обеспечивает достаточную точность интерполяции дисперсионной характеристики, поэтому его можно считать оптимальным для этой цели.

В то же время из практики расчетов известно, что погрешности в задании частотной характеристики затухания ЗС и аналогичной зависимости единичной энергии электрического поля нормального вида значительно меньше влияют на результаты моделирования, чем неточности в определении дисперсионной характеристики. Поэтому количество коэффициентов $\delta_{0|u|}$ и $W_{0|u|}$ (число ненулевых элементов в соответствующих суммах уравнения возбуждения) можно уменьшить в два раза по сравнению с количеством коэффициентов $\omega_{0|u|}{}^2$, без заметного ущерба для точности результатов. Это не приводит к упрощению модели, однако позволяет несколько снизить объем исходных данных для расчета. Итак, число диагоналей с ненулевыми элементами матрицы $|\omega_0^2|$ будем считать равным девяти, а число таких же диагоналей матриц $|\delta_0|$ и $|W_0|$ – пяти. В целях снижения погрешности при работе с обращенной матрицей единичных энергий $|W_0|^{-1}$, вызванной ограничением ее размера [4], количество ненулевых диагоналей этой матрицы можно увеличить до девяти.

Вторым этапом вычисления коэффициентов уравнения возбуждения является выбор пяти маркерных нормальных видов колебаний ЗС, для которых известны электродинамические параметры системы (собственная частота, коэффициент затухания, единичная энергия электрического поля и т.п.). В качестве двух из них целесообразно выбрать виды, лежащие вблизи границ полосы частот, анализируемой с помощью спектральной модели. Если исследуются процессы во всей полосе пропускания ЗС, таковыми являются 0- и π-виды. Остальные три маркерных вида можно расположить равномерно между двумя выбранными граничными. В данном случае погрешность аппроксимации дисперсионной характеристики будет примерно одинаковой во всей полосе частот. Другим вариантом может быть размещение одного из оставшихся видов вблизи рабочей частоты прибора. При этом увеличивается точность синтеза дисперсионной зависимости для спектральных компонент сигнала с наибольшими амплитудами за счет увеличения погрешности аппроксимации для остальных составляющих. Конкретный выбор зависит от характера задач, решаемых при моделировании.

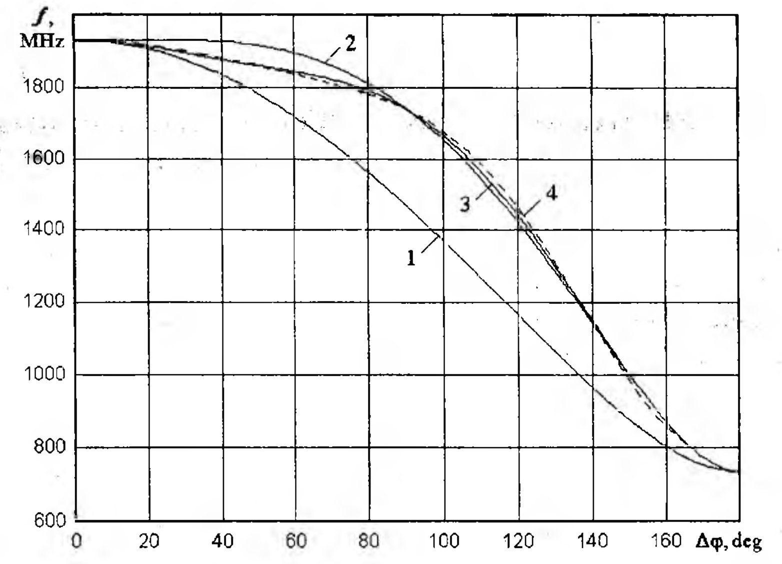

Рис. 1

Расчет коэффициентов на базе параметров нормальных видов колебаний

Дисперсионная характеристика системы стоячей волны является дискретной, поэтому выбирать маркерные виды колебаний приходится из ограниченного набора. Этот набор зависит, в частности, от количества резонаторов ЗС. Следовательно, для обеспечения возможности расчета произвольного прибора необходимо использовать численное решение систем линейных алгебраических уравнений работы [1], например методом исключения Гаусса [5]. Как вариант, можно подготовить аналитические решения этих систем для наиболее типичных конфигураций приборов. Например, для 8-, 16-, 24-резонаторных магнетронов и т.д. в качестве маркерных целесообразно взять 0-вид (присвоим ему номер $q = 0$), $\pi/4$-вид ($q = 1$), $\pi/2$-вид ($q = 2$), $3\pi/4$-вид ($q = 3$) и π-вид ($q = 4$). Подставляя частоты всех этих видов в уравнение (3), получим следующую систему уравнений относительно неизвестных квадратов парциальных частот и коэффициентов связи $\omega_{0|u|}^2$:

$$2\omega_{04}^2 + 2\omega_{03}^2 + 2\omega_{02}^2 + 2\omega_{01}^2 + \omega_{00}^2 = \omega_0^2 ,$$

$$-2\omega_{04}^2 - \sqrt{2}\omega_{03}^2 + 0 \cdot \omega_{02}^2 + \sqrt{2}\omega_{01}^2 + \omega_{00}^2 = \omega_1^2 ,$$

$$2\omega_{04}^2 + 0 \cdot \omega_{03}^2 - 2\omega_{02}^2 + 0 \cdot \omega_{01}^2 + \omega_{00}^2 = \omega_2^2 ,$$

$$-2\omega_{04}^2 + \sqrt{2}\omega_{03}^2 + 0 \cdot \omega_{02}^2 - \sqrt{2}\omega_{01}^2 + \omega_{00}^2 = \omega_3^2 ,$$

$$2\omega_{04}^2 - 2\omega_{03}^2 + 2\omega_{02}^2 - 2\omega_{01}^2 + \omega_{00}^2 = \omega_4^2 .$$

Решение этой системы записывается как:

$$
\begin{aligned}
&\omega_{00}{}^2 = \frac{1}{8}(\omega_0{}^2 + 2\omega_1{}^2 + 2\omega_2{}^2 + 2\omega_3{}^2 + \omega_4{}^2)\,,\\
&\omega_{01}{}^2 = \frac{1}{8}(\omega_0{}^2 + \sqrt{2}\omega_1{}^2 - \sqrt{2}\omega_3{}^2 - \omega_4{}^2)\,,\\
&\omega_{02}{}^2 = \frac{1}{8}(\omega_0{}^2 - 2\omega_2{}^2 + \omega_4{}^2)\,,\\
&\omega_{03}{}^2 = \frac{1}{8}(\omega_0{}^2 - \sqrt{2}\omega_1{}^2 + \sqrt{2}\omega_3{}^2 - \omega_4{}^2)\,,\\
&\omega_{04}{}^2 = \frac{1}{16}(\omega_0{}^2 - 2\omega_1{}^2 + 2\omega_2{}^2 - 2\omega_3{}^2 + \omega_4{}^2)\,.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Для расчета коэффициентов затухания и единичных энергий достаточно использовать только параметры 0-вида, $\pi/2$-вида и π-вида (поскольку коэффициенты δ_{03}, δ_{04}, W_{03} и W_{04} считаются тождественно равными нулю). Подставляя собственные добротности перечисленных видов в уравнение (7) работы [1], получаем систему относительно неизвестных коэффициентов $\delta_{0|u|}$:

$$
\begin{aligned}
2\delta_{02} + 2\delta_{01} + \delta_{00} &= \frac{\omega_0}{2Q_{0int\,0}}\,,\\
-2\delta_{02} + 0\cdot\delta_{01} + \delta_{00} &= \frac{\omega_2}{2Q_{0int\,2}}\,,\\
2\delta_{02} - 2\delta_{01} + \delta_{00} &= \frac{\omega_4}{2Q_{0int\,4}}\,.
\end{aligned}
$$

Решение данной системы следующее:

$$
\begin{aligned}
\delta_{00} &= \frac{1}{8}\left(\frac{\omega_0}{Q_{0int\,0}} + 2\frac{\omega_2}{Q_{0int\,2}} + \frac{\omega_4}{Q_{0int\,4}}\right),\\
\delta_{01} &= \frac{1}{8}\left(\frac{\omega_0}{Q_{0int\,0}} - \frac{\omega_4}{Q_{0int\,4}}\right),\\
\delta_{02} &= \frac{1}{16}\left(\frac{\omega_0}{Q_{0int\,0}} - 2\frac{\omega_2}{Q_{0int\,2}} + \frac{\omega_4}{Q_{0int\,4}}\right).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Коэффициенты $W_{0|u|}$ определяются в результате решения следующей системы, полученной из уравнения (10) работы [1] подстановкой эквивалентных емкостей нормальных видов C_{1q} в расчете на одну ячейку ЗС:

$$
\begin{aligned}
2W_{02} + 2W_{01} + W_{00} &= \frac{g^2 C_{10}}{2}\,,\\
-2W_{02} + 0\cdot W_{01} + W_{00} &= g^2 C_{12}\,,\\
2W_{02} - 2W_{01} + W_{00} &= \frac{g^2 C_{14}}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Решение имеет вид:

$$W_{00} = \frac{g^2}{8}(C_{10} + 4C_{12} + C_{14}),$$
$$W_{01} = \frac{g^2}{8}(C_{10} - C_{14}), \tag{6}$$
$$W_{02} = \frac{g^2}{16}(C_{10} - 4C_{12} + C_{14}).$$

Поскольку нам необходимы не сами коэффициенты (6), а элементы обращенной матрицы $W^i{}_{0|u|}$, для нахождения последних используем стандартный алгоритм обращения матриц. Одним из простейших и самых надежных является метод Гаусса-Жордана, реализованный в виде подпрограммы MINV пакета научных программ на Фортране [5]. Размерность обращаемой матрицы $|\,W_0\,|$, как уже отмечалось, составляет 9×9.

Расчет коэффициентов на базе параметров бегущих волн

Теперь получим выражения для коэффициентов уравнения возбуждения на основе характеристик бегущей волны. Этот подход является более гибким, чем основанный на параметрах нормальных видов, поскольку дисперсионная характеристика непрерывна и тем самым не накладывает ограничений на выбор маркерных видов колебаний. Распределим их, как и ранее, равномерно в пределах полосы пропускания ЗС. Парциальные частоты и коэффициенты связи при этом можно рассчитывать по формулам (4). Для нахождения коэффициентов затухания и единичных энергий в качестве исходных используем соответствующие параметры ЗС на частотах выбранных ранее промежуточных маркерных видов ($\pi/4$-вида, $\pi/2$-вида и $3\pi/4$-вида). Несмотря на завершенность уравнений (16) и (19) работы [1], здесь во избежание чрезмерной громоздкости конечных формул целесообразно вновь ввести в качестве вспомогательной переменной групповую скорость волны. Тогда эти уравнения перепишутся соответственно как:

$$\sum_u \delta_{0|u|} \cos u\Delta\varphi_q = v_{gq}\alpha_q \tag{7}$$

и

$$\sum_u W_{0|u|} \cos u\Delta\varphi_q = \frac{g^2 D}{2} \frac{1}{Z_{0q}|v_{gq}|}, \tag{8}$$

где групповая скорость на частоте ω_q вычисляется по формуле

$$v_{gq} = -\frac{D}{2\omega_q} \sum_{u=-4}^{+4} \omega_{0|u|}{}^2 u \sin u\Delta\varphi_q . \tag{9}$$

Подставляя в (9) выражения для коэффициентов $\omega_{00}{}^2 \ldots \omega_{04}{}^2$ из (4), находим, что при $\Delta\varphi_q = \pi/4$, $\pi/2$ и $3\pi/4$ групповые скорости равны соответственно:

$$v_{g1} = -\frac{D}{8\omega_1}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)\omega_0{}^2 - 2\omega_2{}^2 + \left(1-\sqrt{2}\right)\omega_4{}^2\right],$$
$$v_{g2} = -\frac{\sqrt{2}D}{4\omega_2}\left(\omega_1{}^2 - \omega_3{}^2\right),$$
$$v_{g3} = \frac{D}{8\omega_3}\left[\left(1-\sqrt{2}\right)\omega_0{}^2 - 2\omega_2{}^2 + \left(1+\sqrt{2}\right)\omega_4{}^2\right].$$

В остальном методика вывода выражений для коэффициентов уравнения возбуждения сохраняется, приведем лишь конечные результаты:

$$
\begin{aligned}
\delta_{00} &= \frac{1}{2}\left(\nu_{g1}\alpha_1 + \nu_{g3}\alpha_3\right),\\
\delta_{01} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\nu_{g1}\alpha_1 - \nu_{g3}\alpha_3\right),\\
\delta_{02} &= \frac{1}{4}\left(\nu_{g1}\alpha_1 - 2\nu_{g2}\alpha_2 + \nu_{g3}\alpha_{p3}\right)
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

и

$$
\begin{aligned}
W_{00} &= \frac{g^2 D}{4}\left(\frac{1}{Z_{01}|\nu_{g1}|} + \frac{1}{Z_{03}|\nu_{g3}|}\right),\\
W_{01} &= \frac{g^2 D}{4\sqrt{2}}\left(\frac{1}{Z_{01}|\nu_{g1}|} - \frac{1}{Z_{03}|\nu_{g3}|}\right),\\
W_{02} &= \frac{g^2 D}{8}\left(\frac{1}{Z_{01}|\nu_{g1}|} - 2\frac{1}{Z_{02}|\nu_{g2}|} + \frac{1}{Z_{03}|\nu_{g3}|}\right).
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

Очевидно, что при решении уравнений возбуждения (1) и (2) с коэффициентами, полученными в результате применения описанной здесь методики, учитываются реальная форма дисперсионной характеристики, частотные зависимости коэффициента затухания и сопротивления взаимодействия ЗС в выбранном диапазоне частот, вплоть до всей полосы пропускания. Точность учета зависит от величины погрешностей аппроксимации этих характеристик с помощью найденных выше коэффициентов $\omega_{0|u|}^2$, $\delta_{0|u|}$ и $W_{0|u|}$, а также от степени корректности общих предположений, лежащих в основе метода мгновенных значений. Кроме того, автоматически моделируется частотная зависимость поперечной структуры поля бегущей волны. Это связано с тем, что данная структура синтезируется по формуле (2) работы [4] из полей парциальных видов колебаний отдельных ячеек. С изменением фазового сдвига между колебаниями в соседних резонаторах меняется форма зависимости напряженности ВЧ-поля от расстояния до торцов ламелей ЗС.

Таким образом, полученная в работе [1] общая методика нахождения коэффициентов матричного уравнения возбуждения замедляющей системы в виде цепочки связанных резонаторов на основе результатов «холодных» электродинамических измерений параметров и характеристик ЗС конкретизирована здесь применительно к использованию в реальных моделях. Выбрано оптимальное число пар резонаторов, связь с которыми должна учитываться в уравнении возбуждения для каждой ячейки. Получены аналитические выражения для расчета коэффициентов на базе параметров нормальных видов колебаний замкнутых систем с числом резонаторов 8, 16, 24 и т.д., а также характеристик бегущих волн. Аналогичным образом могут быть выведены выражения для систем с другим количеством ячеек.

Список литературы: 1. *Грицунов А.В.* К расчету коэффициентов матричного уравнения возбуждения резонаторной замедляющей системы // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2002. Вып. 124. С. 16 – 23. 2. *Gritsunov A.V.* On Spectral Modeling of Microwave Devices // Telecomm. and Radio Engineering. 2001. V. 55, No. 8. P. 98 – 102. 3. *Электронные* сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями. Т. 2 / Под ред. М.М. Федорова. М.: Мир, 1961. 471 с. 4. *Грицунов А.В.* К выводу уравнения возбуждения цепочки связанных резонаторов для метода мгновенных значений // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2001. Вып. 121. С. 156 – 162. 5. *Сборник* научных программ на Фортране. Вып. 1 / Под ред. С.Я. Виленкина. М.: Статистика, 1974. 224 с.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 08.01.2002