УДК 62.506.2

Е. П. ПУТЯТИН, д-р техн. наук, *Т. Г. ДОЛЖЕНКОВА*

НОРМАЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

СООБЩЕНИЕ 2

В работах [1—3] рассмотрены вопросы нормализации некоторых видов нелинейных преобразований, предложены методы определения параметров этих преобразований. Один из методов [1, 2] предполагает нахождение обратных величин, связанных с искомыми параметрами, и только после этого — самих параметров преобразований. Второй метод [3] сводился к непосредственному определению коэффициентов нелинейных преобразований. Следует отметить, что оба метода приводили в конечном итоге к решению систем нелинейных уравнений. В случае сложных нелинейных преобразований не существует способа получения решения такого рода систем в виде формул, их приходится решать приближенно.

Нами продолжены исследования по отысканию коэффициентов нелинейных преобразований, в частности рассмотрен метод, позволяющий определить коэффициенты нелинейных искажений путем решения систем линейных уравнений.

Рассмотрим преобразование, когда между изображением $B(x, y)$ и эталонным изображением $B_0(x, y)$ существует следующая зависимость:

$$B(x, y) = B_0(a_1x^2 + a_2y^2, \quad b_1x^2 + b_2y^2). \qquad (1)$$

При вычислении якобиана преобразования (1) пользуемся рассуждениями, приведенными в [3], тогда

$$I(x, y) = \Delta xy, \tag{2}$$

где $\Delta = 4(a_1 b_2 - a_2 b_1)$.

Для определения параметров a_i и b_j $(i, j = 1, 2)$ рассмотрим наборы функционалов эталонов:

$$\Phi_{00}(B_0^k) = \iint_D \varphi_k(B)\, dudv; \quad \Phi_{10}(B_0^k) = \iint_D \varphi_k(B)\, ududv;$$

$$\Phi_{01}(B_0^k) = \iint_D \varphi_k(B)\, vdudv, \tag{3}$$

здесь $\varphi_k(B)$ — произвольная, наперед заданная функция, $k = 1, 2, \ldots$ В качестве $\varphi_k(B)$ можно, например, выбрать степенную зависимость. Для определенности в дальнейшем будем считать $\varphi_k(B) = B^k$, $k = 1, 2, \ldots$

С учетом (2) функционалы изображений, в свою очередь, будут иметь вид

$$\Phi_{11}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\, xydxdy; \quad \Phi_{31}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\, x^3 ydxdy;$$

$$\Phi_{13}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\, xy^3 dxdy. \tag{4}$$

Распишем выражение для $\Phi_{00}(B_0)$:

$$\Phi_{00}(B_0) = \iint_D B_0(u, v)\, dudv = \Delta \iint_D B(x, y)\, xydxdy = \Delta\Phi_{11}(B_0).$$

Отсюда

$$\Delta = \frac{\Phi_{00}(B_0)}{\Phi_{11}(B)}. \tag{5}$$

Преобразовав интегралы $\Phi_{10}(B^k)$ $(k = 1, 2)$ аналогичным образом, получим систему линейных уравнений $\Phi_{10}(B_0) = \Delta[a_1\Phi_{31}(B) + a_2\Phi_{13}(B)]$; $\Phi_{10}(B_0^2) = \Delta[a_1\Phi_{31}(B^2) + a_2\Phi_{13}(B^2)]$.

Учитывая (5), получаем

$$a_1\Phi_{31}(B) + a_2\Phi_{13}(B) = \Phi_{10}(B_0)\,\Phi_{11}(B)/\Phi_{00}(B_0);$$

$$a_1\Phi_{31}(B^2) + a_2\Phi_{13}(B^2) = \Phi_{10}(B_0^2)\,\Phi_{11}(B)/\Phi_{00}(B_0). \tag{6}$$

Полагаем, что множество M [1] плоских изображений удовлетворяет условию

$$\begin{vmatrix} \Phi_{31}(B) & \Phi_{13}(B) \\ \Phi_{31}(B^2) & \Phi_{13}(B^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \iint_D B(x, y)\, x^3 ydxdy & \iint_D B(x, y)\, xy^3 dxdy \\ \iint_D B^2(x, y)\, x^3 ydxdy & \iint_D B^2(x, y)\, xy^3 dxdy \end{vmatrix} \neq 0. \tag{7}$$

Система (6) в этом случае, очевидно, имеет единственное решение.

Проделав аналогичной последовательности операции над функционалами $\Phi_{01}(B_0^k)$ $(k = 1, 2)$, получим подобную систему линейных уравнений

$$b_1\Phi_{31}(B) + b_2\Phi_{13}(B) = \Phi_{31}(B_0)\,\Phi_{13}(B)/\Phi_{00}(B); \quad b_1\Phi_{31}(B^2) + b_2\Phi_{13}(B^2) = \Phi_{31}(B_0^2)\,\Phi_{13}(B)/\Phi_{00}(B). \tag{8}$$

Решая систему (8) при аналогичных условиях (7), находим параметры b_j ($j = 1, 2$).

Проиллюстрируем возможности изложенного способа определения параметров нелинейных преобразований. Рассмотрим реализацию его для более сложных зависимостей, когда $B(x, y) = B_0(u(x, y), v(x, y))$, где

$$u = a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6xy^2; \quad v = b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2 + b_6xy^2. \qquad (9)$$

К анализу таких преобразований сводятся задачи фотограмметрии [4, с. 43].

Пользуясь выкладками, представленными в [3], несложно определить якобиан преобразования (9) $I(x, y) = Ex + Py + Rxy + Zx^2 + Ly^2 + Nx^2y + Wxy^2 + Ky^3 + H$, где

$$E = a_1b_4 - b_1a_4 - 2(a_2b_3 - b_2a_3); \quad P = a_4b_2 - b_4a_2 - 2(a_5b_1 - b_5a_1);$$
$$R = 2[a_1b_6 - b_1a_6 - 2(a_5b_3 - b_5a_3)]; \quad Z = 2(a_3b_4 - b_3a_4),$$
$$L = a_6b_2 - b_6a_2 - 2(a_5b_4 - b_5a_4); \quad N = 4(a_3b_6 - b_3a_6);$$
$$W = a_4b_6 - b_4a_6; \quad K = 2(a_6b_5 - b_6a_5); \quad H = a_1b_2 - b_1a_2. \qquad (10)$$

Воспользуемся набором функционалов эталонов (3). Функционалы изображений имеют вид

$$\Phi_{00}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\,dxdy; \quad \Phi_{10}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\,xdxdy;$$
$$\Phi_{01}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\,ydxdy; \quad \Phi_{11}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\,xydxdy;$$
$$\Phi_{20}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\,x^2dxdy; \quad \Phi_{02}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\,y^2dxdy;$$
$$\Phi_{21}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\,x^2ydxdy; \quad \Phi_{12}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\,xy^2dxdy;$$
$$\Phi_{22}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\,x^2y^2dxdy; \quad \Phi_{30}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\,x^3dxdy;$$
$$\Phi_{03}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\,y^3dxdy; \quad \Phi_{13}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\,xy^3dxdy;$$
$$\Phi_{31}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\,x^3ydxdy; \quad \Phi_{23}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\,x^2y^3dxdy;$$
$$\Phi_{32}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\,x^3y^2dxdy; \quad \Phi_{33}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\,x^3y^3dxdy;$$
$$\Phi_{40}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\,x^4dxdy; \quad \Phi_{04}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\,y^4dxdy;$$
$$\Phi_{14}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\,xy^4dxdy; \quad \Phi_{41}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\,x^4ydxdy;$$
$$\Phi_{24}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\,x^2y^4dxdy; \quad \Phi_{05}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\,y^5dxdy;$$
$$\Phi_{15}(B^k) = \iint_D B^k(x, y)\,xy^5dxdy. \qquad (11)$$

Учитывая (11), преобразуем выражение для $\Phi_{00}(B_0^k)$:

$$\Phi_{00}(B_0^k) = \iint_D B_0^k(u, v)\,du dv = \iint_D B(x, y)\,|I(x, y)|\,dx dy =$$

$$= \iint_D (Ex + Py + Rxy + Zx^2 + Ly^2 + Nx^2y^2 + Wxy^2 + Ky^3 +$$

$$+ H)\,dx dy = E\Phi_{10}(B^k) + P\Phi_{01}(B^k) + R\Phi_{11}(B^k) + Z\Phi_{20}(B^k) +$$

$$+ L\Phi_{02}(B^k) + N\Phi_{22}(B^k) + W\Phi_{12}(B^k) + K\Phi_{03}(B^k) + H\Phi_{00}(B^k).$$

Поскольку число неизвестных E, P, R, ..., H равно девяти, то индекс $k = 1, 2, \ldots, 9$. Неизвестные коэффициенты определяются путем решения следующей системы линейных уравнений:

$$\Phi_{00}(B_0) = E\Phi_{10}(B) + P\Phi_{01}(B) + R\Phi_{11}(B) + Z\Phi_{20}(B) + L\Phi_{02}(B) +$$
$$+ N\Phi_{22}(B) + W\Phi_{12}(B) + K\Phi_{03}(B) + H\Phi_{00}(B);$$

$$\Phi_{00}(B_0^2) = E\Phi_{10}(B^2) + P\Phi_{01}(B^2) + R\Phi_{11}(B^2) + Z\Phi_{20}(B^2) +$$
$$+ L\Phi_{02}(B^2) + N\Phi_{22}(B^2) + W\Phi_{12}(B^2) + K\Phi_{03}(B^2) + H\Phi_{00}(B^2); \quad (12)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Phi_{00}(B_0^9) = E\Phi_{10}(B^9) + P\Phi_{01}(B^9) + R\Phi_{11}(B^9) + Z\Phi_{20}(B^9) +$$
$$+ L\Phi_{02}(B^9) + N\Phi_{22}(B^9) + W\Phi_{12}(B^9) + K\Phi_{03}(B^9) + H\Phi_{00}(B^9).$$

Подобным образом распишем выражение для $\Phi_{10}(B_0^k)$ и получим систему, количество уравнений которой равно количеству искомых параметров a_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$, т. е. шести $(k = 1, 2, \ldots, 6)$. Каждое из уравнений системы имеет вид

$$\Phi_{10}(B_0^k) = [E\Phi_{20}(B^k) + P\Phi_{11}(B^k) + R\Phi_{21}(B^k) + Z\Phi_{30}(B^k) +$$
$$+ L\Phi_{12}(B^k) + N\Phi_{31}(B^k) + W\Phi_{22}(B^k) + K\Phi_{13}(B^k) + H\Phi_{10}(B^k)]\,a_1 +$$
$$+ [E\Phi_{02}(B^k) + P\Phi_{11}(B^k) + R\Phi_{12}(B^k) + Z\Phi_{21}(B^k) + L\Phi_{03}(B^k) +$$
$$+ N\Phi_{22}(B^k) + W\Phi_{13}(B^k) + K\Phi_{04}(B^k) + H\Phi_{01}(B^k)]\,a_2 + [E\Phi_{30}(B^k) +$$
$$+ P\Phi_{21}(B^k) + R\Phi_{31}(B^k) + Z\Phi_{40}(B^k) + L\Phi_{22}(B^k) + N\Phi_{41}(B^k) +$$
$$+ W\Phi_{32}(B^k) + K\Phi_{23}(B^k) + H\Phi_{20}(B^k)]\,a_3 + [E\Phi_{21}(B^k) + P\Phi_{12}(B^k) +$$
$$+ R\Phi_{22}(B^k) + Z\Phi_{31}(B^k) + L\Phi_{13}(B^k) + N\Phi_{32}(B^k) + W\Phi_{23}(B^k) +$$
$$+ K\Phi_{14}(B^k) + H\Phi_{11}(B^k)]\,a_4 + [E\Phi_{12}(B^k) + P\Phi_{03}(B^k) + R\Phi_{13}(B^k) +$$
$$+ Z\Phi_{22}(B^k) + L\Phi_{04}(B^k) + N\Phi_{23}(B^k) + W\Phi_{14}(B^k) + K\Phi_{05}(B^k) +$$
$$+ H\Phi_{02}(B^k)]\,a_5 + [E\Phi_{22}(B^k) + P\Phi_{13}(B^k) + R\Phi_{23}(B^k) + Z\Phi_{32}(B^k) +$$
$$+ L\Phi_{14}(B^k) + N\Phi_{33}(B^k) + W\Phi_{24}(B^k) + K\Phi_{15}(B^k) + H\Phi_{12}(B^k)]\,a_6.$$

Вместо переменных E, P, R, ..., H подставляем полученные ранее соответствующие им значения. Параметры a_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ преобразования (9) находим при решении системы линейных уравнений (13).

Аналогично, используя функционалы $\Phi_{01}(B^k)$, получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных $b_j (j = 1, 2, \ldots, 6)$.

Таким образом, введение функционалов вида (3), (4) позволило определить неизвестные параметры заданных нелинейных преобразований путем решения соответствующих систем линейных алгебраических уравнений.

Список литературы: 1. *Путятин Е. П., Долженкова Т. Г.* Вопросы нормализации нелинейных преобразований. Сообщение 1.— Проблемы бионики, 1980, вып. 24, с. 111—115. 2. *Путятин Е. П, Долженкова Т. Г.* Вопросы нормализации нелинейных преобразований. Сообщение 2.— Проблемы бионики, 1980, вып. 24, с. 116—120. 3. *Путятин Е. П., Долженкова Т. Г.* Нормализация нелинейных преобразований. Сообщение 1.— См. статью в настоящем сборнике. 4. *Лобанов А. Н.* Аналитическая фотограмметрия.— М.: Недра, 1972.—180 с.

Поступила 16 октября 1979 г.