

МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ МНОЖЕСТВА ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ С ЗАДАНЫМИ КОРРЕЛЯЦИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ

Замула А.А., Ярыгина Т.Е.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники
61166, Харьков, пр. Ленина, каф. БИТ, тел. (057) 702-14-25,

E-mail: yarigina.tatyana@gmail.com

The advantages of noise-like signals in spread spectrum communication systems are noise immunity, secrecy, code division of subscribers, ability to evaluate coordinates of moving objects, electromagnetic compatibility, etc. They are based on large ensembles of weakly correlated signals. Currently there are no efficient methods for discrete sequences synthesis of optimal minimax criterion. It is also difficult to estimate how close are the known signals to optimal sequences. All known methods for discrete sequences synthesis are based on brute force computation, which exceedingly limits their applications. Our paper proposes method that significantly (in comparison with known exhaustion methods) reduces computation complexity of synthesizing discrete sequences with certain correlation sidelobe.

Помехозащищенность, скрытность, кодовое разделение абонентов, измерение координат подвижных объектов, электромагнитная совместимость – далеко не весь перечень преимуществ применения шумоподобных сигналов в широкополосных системах связи.

При установлении синхронизации и разрешении сложных сигналов важную роль играют корреляционные свойства дискретных последовательностей (ДП), с помощью которых расширяется спектр. Предположим, что приемник сложных сигналов вычисляет соответствующую корреляционную функцию принимаемого сигнала с эталонной копией, хранящейся в памяти. После осуществления синхронизации он переходит в режим приема информации и начинает операцию декодирования последней. Любые частичные корреляции могут привести к ложному срабатыванию и нарушению работы приемника. Очевидно, что не любая КП может быть использована для таких целей. Требования, предъявляемые к наилучшему сигналу, могут быть сформулированы в виде следующей оптимизационной задачи: на множестве всех возможных последовательностей длины N с символами из заранее выбранного алфавита найти последовательность или последовательности с минимальной величиной максимального бокового лепестка корреляционной функции [1]. Назовем такой критерий минимаксным.

В настоящее время отсутствуют регулярные методы синтеза ДП оптимальных по минимаксному критерию. Более того, довольно сложно оценить, насколько известные сигналы большой длины близки к оптимальным. Все известные методы синтеза ДП включают в себя перебор, что существенно ограничивает область их применения. К методам синтеза ДП относят [2]:

1. Метод направленного перебора.

Синтез предусматривает два этапа. Первый ориентирован на сужение области перебора и состоит в формулировке необходимых условий существования и допустимых комбинаторных соотношений параметров. Второй заключается в разработке эффективных переборных алгоритмов. Этим методом были найдены все бинарные последовательности Баркера с $N < 13$.

2. Метод синтеза аperiodических ДП на основе периодических.

Идея метода основана на взаимосвязи периодической и аperiodической АКФ для одной и той же ДП. Метод также состоит из двух этапов. Первый заключается в поиске ДП с «хорошей» ПАКФ. Второй — в поиске оптимальных по минимаксному критерию начальных условий. С помощью этого метода найдены оптимальные по минимаксному критерию бинарные и троичные последовательности. Однако второй этап этого метода также переборный и, следовательно, является существенным ограничением возможностей по периоду (длине) синтезируемой ДП.

3. Синтез ДП путем гомоморфного отображения мультипликативных групп простого и расширенного поля Галуа с помощью k -значного характера.

Последний метод, как показано в [3], поглощает практически все известные правила кодирования линейных ДП. Однако, с ростом характеристики поля и числа классов объем вычислений при направленном переборе резко увеличивается.

Существует и ряд других методов. Проблемы их усовершенствования состоят в синтезе ДП с «хорошей» ПАКФ и сокращении времени на этапе перебора. Метод, предлагаемый в данной работе, позволяет на этапе перебора существенно снизить объем вычислений по нахождению ДП с заданными значениями боковых лепестков корреляционной функции. В качестве ДП будем рассматривать характеристические дискретные сигналы (ХДС).

Пусть W_μ и W_ν есть ХДС с числом символов L , построенные посредством децимации исходного сигнала W_1 (сигнал, построенный по наименьшему из значений первообразных элементов поля) соответственно по коэффициентам μ и ν , а μ' и ν' новые коэффициенты децимации, причём $\mu' = \mu \cdot x \pmod{L}$; $\nu' = \nu \cdot x \pmod{L}$, где x – целое число, такое, что наибольший общий делитель (НОД) чисел x и L равен 1. Тогда децимация исходного ХДС W_1 по коэффициентам μ' и ν' дает новые пары, реализация ПФВК которых есть результат децимации ПФВК пары ХДС W_μ и W_ν .

Значение кодов ХДС, полученных путём децимации исходной последовательности по коэффициентам μ и ν , могут быть описаны выражениями [3]:

$$\mu_i = \begin{cases} \psi(\Theta_a^{\mu_i} + 1), & \text{если } (\Theta_a^{\mu_i} + 1) / \equiv 0 \pmod{P}; \\ 1, & \text{если } (\Theta_a^{\mu_i} + 1) \not\equiv 0 \pmod{P}; \end{cases} \quad (1)$$

$$\nu_i = \begin{cases} \psi(\Theta_m^{\nu_i} + 1), & \text{если } (\Theta_m^{\nu_i} + 1) / \equiv 0 \pmod{P}; \\ 1, & \text{если } (\Theta_m^{\nu_i} + 1) \not\equiv 0 \pmod{P}, i = \overline{0, L-1}. \end{cases} \quad (2)$$

Поскольку всегда можно найти такое k , что $\Theta_1 = \Theta^k$, где $\Theta = \Theta_1^\mu$, $\Theta_1 = \Theta_1^\nu$, и НОД $(k, L) = 1$, то (1) и (2) можно записать в следующем виде:

$$\mu_i = \begin{cases} \psi(\Theta^i + 1), & \text{если } (\Theta^i + 1) / \equiv 0 \pmod{P}; \\ 1, & \text{если } (\Theta^i + 1) \not\equiv 0 \pmod{P}; \end{cases} \quad \nu_i = \begin{cases} \psi(\Theta_1^i + 1), & \text{если } (\Theta_1^i + 1) / \equiv 0 \pmod{P}; \\ 1, & \text{если } (\Theta_1^i + 1) \not\equiv 0 \pmod{P}. \end{cases}$$

Для сигналов, полученных по μ' и ν' , имеем

$$\mu'_i = \begin{cases} \psi(\Theta^{i^x} + 1), & \text{если } (\Theta^{i^x} + 1) / \equiv 0 \pmod{P}; \\ 1, & \text{если } (\Theta^{i^x} + 1) \not\equiv 0 \pmod{P}; \end{cases} \quad \nu'_i = \begin{cases} \psi(\Theta_1^{i^x} + 1), & \text{если } (\Theta_1^{i^x} + 1) / \equiv 0 \pmod{P}; \\ 1, & \text{если } (\Theta_1^{i^x} + 1) \not\equiv 0 \pmod{P}. \end{cases}$$

Выражения для ПФВК пар ХДС, построенных соответственно по μ , ν и μ' , ν' имеют вид:

$$R_{\mu, \nu}(m) = \sum_{i=0}^{L-1} \psi(\Theta^i + 1) \psi(\Theta_1^{i+m} + 1), \quad R_{\mu', \nu'}(m) = \sum_{i=0}^{L-1} \psi(\Theta^{i^x} + 1) \psi(\Theta_1^{(i+m)^x} + 1).$$

И с учётом (1)

$$R_{\mu, \nu}(m) = \sum_{i=0}^{L-1} \psi(\Theta^i + 1) \psi(\Theta^{k(i+m)} + 1), \quad R_{\mu', \nu'}(m) = \sum_{i=0}^{L-1} \psi(\Theta^{i^x} + 1) \psi(\Theta^{k^x(i+m)^x} + 1)$$

Введём произвольные переменные $\{a, b, b'\} \in GF(P^n)$. Пусть для сигналов, построенных путём децимации исходного сигнала, выполняются условия $a = \Theta^{k(i+m)}$, $b = \Theta^i$. Тогда $a/b = \Theta^{ki+km-i}$. Для пары сигналов, полученных путём децимации исходного сигнала по коэффициентам μ' и ν' , найдём некоторое значение $\Theta^{kx(i_1+m_1)}$ равное a , т.е.

$$\Theta^{kx(i_1+m_1)} = \Theta^{k(i+m)} = a. \quad (3)$$

Для выполнения равенства (3) необходимо, чтобы

$$kx(i_1+m_1) \equiv k(i+m) \pmod{L}. \quad (4)$$

Поскольку НОД $(k, L) = 1$, выражение (4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} x(i_1+m_1) &\equiv i+m \pmod{L}; \\ xi_1+xm_1 &\equiv i+m \pmod{L}; \\ xi_1 &\equiv i \pmod{L}; \\ xm_1 &\equiv m \pmod{L}. \end{aligned}$$

Найдём отношение a/b' , где $b' = Q^{i_1x}$ для пары ХДС, построенной в соответствии с μ' и ν' .

$$a/b' = \frac{\Theta^{kx(i_1+m_1)}}{\Theta^{i_1x}} = \Theta^{kxi_1+kxm_1-i_1x}. \quad (5)$$

С учётом (5) можно заключить, что $a/b' = a/b$, и следовательно, $b' = b$. А это означает, что в выражении для ПФВК $R_{\mu', \nu'}(m_1)$ изменится лишь порядок набора суммы для которого фиксированного отсчёта ПФВК пары ХДС, построенной по μ' и ν' . Другими словами, значения функции ПФВК для пары ХДС, построенной путём децимации исходного сигнала по коэффициентам μ' и ν' будут такими же, как для ПФВК последовательностей, полученных по μ и ν . Но с учётом того, что $m = xm_1$, $R_{\mu', \nu'}(m_1)$ - есть результат децимации $R_{\mu, \nu}(m)$ по коэффициенту x , т.е. реализация ПФВК $R_{\mu', \nu'}(m_1)$ будет результатом децимации ПФВК $R_{\mu, \nu}(m)$.

Пусть $\|R\|$ есть матрица максимальных значений боковых лепестков ПФВК пар ХДС w_i и w_j , $i, j = \overline{1, M}$ размерности $M \times M$, причём M – число изоморфизмов ХДС, а строки и столбцы матрицы обозначены значениями упорядоченных по возрастанию коэффициентов децимации. Тогда строка матрицы (первая строка), содержащая значения боковых лепестков ПФВК исходного изоморфизма со всеми оставшимися $(M-1)$ изоморфизмами, содержит все возможные значения боковых лепестков ПФВК, которые дают пары w_i и w_j , $i, j = \overline{1, M}$.

Очевидно, что для определения значений максимальных боковых выбросов ПФВК сочетаний всех пар ХДС достаточно рассчитать реализации ПФВК исходного сигнала w_1 со всеми оставшимися $w_2, w_3, \dots, w_{M-1}$ изоморфизмами, т.е. реализации ПФВК для первой строки матрицы $\|R\|$.

В таблице приведена взаимокорреляционная матрица боковых лепестков ПФВК для ХК с числом элементов $L = 60$ для пар ХК. Первая строка матрицы включает в себя значения боковых лепестков ПФВК исходного кода (коэффициент децимации $k_1 = 1$) со всеми другими ХК, полученными путём децимации исходного ХДС по множеству коэффициентов децимации $k_i \in \varphi(L)$. Исходя из данных таблицы, минимальное значение максимальных боковых лепестков ПФВК имеет место для пар ХК, полученных по коэффициентам децимации 1 и 7.

Таблица 1. Взаимокорреляционная матрица для ХДС с числом элементов $L = 60$

Козф. децима- ции Козф. децимации	1	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	49
1	60	16	24	20	20	16	20	36	32	20	36	16	20	20	16	28
7	16	60	20	16	24	20	36	20	20	32	20	28	36	16	20	16
11	24	20	60	20	16	36	20	16	36	20	32	20	20	16	28	16
13	20	16	20	60	36	16	24	20	16	28	20	32	16	36	20	20
17	20	24	16	36	60	20	16	20	20	36	20	16	32	28	16	20
19	16	20	36	16	20	60	20	24	28	16	16	20	20	20	36	32
23	20	36	20	24	16	20	60	16	20	16	16	36	28	32	20	20
29	36	20	16	20	20	24	16	60	16	20	28	20	16	20	32	36
31	32	20	36	16	20	28	20	16	60	16	24	20	20	20	36	16
37	20	32	20	28	36	16	16	20	16	60	20	16	24	36	20	20
41	36	20	32	20	20	16	16	28	24	20	60	20	16	20	16	36
43	16	28	20	32	16	20	36	20	20	16	20	60	36	24	20	16
47	20	36	20	16	32	20	28	16	20	24	16	36	60	16	20	20
53	20	16	16	36	28	20	32	20	20	36	20	24	16	60	16	20
59	16	20	28	20	16	36	20	32	36	20	16	20	20	16	60	24
49	28	16	16	20	20	32	20	36	16	20	36	16	20	20	24	60

Соответствующим образом могут быть установлены все пары ХДС, приводящие к таким же значениям боковых лепестков. Например, умножая коэффициенты децимации $k = 1$ и $k = 7$ на $x = 7$, мы получим новую пару изоморфизмов ХДС, для которой $k = 49$ и $k = 49$. Как следует из таблицы, данная пара ХДС имеет такое же значение максимальных боковых лепестков ПФВК как и для исходной пары, т. е. 16. Нетрудно убедиться в том, что знание значений первой строки взаимокорреляционной матрицы является исчерпывающим для расчёта статистических характеристик ПФВК системы ХДС.

Оценим вычислительную сложность предложенного метода исследования корреляционных свойств ДП. Полный перебор всех возможных пар ДП характеристического кода для получения значений максимальных боковых лепестков функции корреляции требует выполнения N_1 операций. Очевидно, что $N_1 = C_{\varphi(L)}^2$. Для реализации предлагаемого метода число операций N_2 определяется из соотношения $N_2 = \varphi(L)$.

Выигрыш в вычислительной сложности (C) предлагаемого метода перебора по сравнению с известным оценивается соотношением:

$$C = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{2}(\varphi(L)-1) \quad (6)$$

Анализ выражения (6) показывает, что выигрыш в вычислительной сложности представленного метода с увеличением числа элементов L ДП возрастает. Приведенные в таблице данные позволяют выбрать ДП, минимизирующие вероятность ошибок при синхронизации и различении сигналов.

Литература:

1. Spread Spectrum and CDMA. Principles and Applications. Valery P. Ipatov, Univesity of Turku
2. Гантмахер В.Е., Быстров Н.Е., Чеботарев Д.В. Шумоподобные сигналы. Анализ, синтез, обработка – СПб.: Наука и Техника, 2005. – 400 с.
3. Свердлик М.Б. Оптимальные дискретные сигналы. М.: Советское радио, 1975. - 200 с.